

## مسائل درس ریاضی فیزیک پیشرفته - سری پنجم

مهلت تحویل: ۲۵ خردادماه ۱۳۹۹

۱۳ خرداد ۱۳۹۹

---

سوال اول: در فضای  $R^n$  شار زیر را در نظر بگیرید:

$$\alpha(t) : \mathbf{x} \longrightarrow t\mathbf{x}. \quad (1)$$

میدان برداری وابسته به این شار را پیدا کنید.

---

سوال دوم: در فضای  $R^2$  با مختصات موضعی  $(x, y)$  میدان های برداری زیر را در نظر بگیرید:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} \quad (2)$$

الف: شار های مربوط به این میدان های برداری را حساب کنید.

ب: جابجاگرهای میدان های برداری فوق را حساب کنید.

پ: مشتقات لی زیر را حساب کنید:

$$\mathcal{L}_X Y, \quad \mathcal{L}_X Z, \quad \mathcal{L}_Y Z. \quad (3)$$

سوال سوم: در صفحه  $R^2$  نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$R_\theta : (x, y) \longrightarrow (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta). \quad (4)$$

الف: تحت این نگاشت حساب کنید که نقطه با مختصات  $(a, 0)$  به چه نقطه ای نگاشته می شود. هم چنین حساب کنید که در همین نقطه بردارهای زیر به چه بردارهایی در نقطه مقصد نگاشته می شوند:

$$A = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad B = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad C = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

به چه برداری تبدیل می شود. از نظر شهودی رابطه بردارهای جدیدی که بدست آمده با بردار اولیه چیست؟

ب: تحت این نگاشت حساب کنید که بردار  $X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$  به چه برداری تبدیل می شود.

سوال چهارم: در فضای سه بعدی دکارتی تانسور زیر تعریف شده است:

$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz \quad (5)$$

تحت نگاشت

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad (6)$$

بدست آورید که تانسور فوق چگونه تبدیل می شود. به عبارت دیگر  $pullback$  تانسور  $g$  را بدست آورید.

این کار را برای فرم دیفرانسیل زیر نیز انجام دهید:

$$\omega = dx \wedge dy \wedge dz. \quad (۷)$$

سوال پنجم. در فضای  $R^3$  میدان برداری زیر را در نظر بگیرید:

$$L_x = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_y = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad L_z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \quad (۸)$$

الف - نشان دهید که این سه میدان برداری تحت جابجا گر یک جبر بسته تشکیل می دهند. شار مربوط به هر میدان برداری را بدست آورید. نتیجه را از نظر شهودی تعبیر کنید.

ب- به میدان های قسمت قبل میدان های زیر را اضافه کنید:

$$P_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad P_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad P_z = \frac{\partial}{\partial z} \quad (۹)$$

نشان دهید که مجموعه میدان های  $L_i$  و  $P_j$  تحت جابجا گر تشکیل یک جبر بسته می دهند.

سوال ششم : روابط زیر را که برای میدان های برداری و مشتق لی ثابت کنید:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fX}Y &= f[X, Y] - Y[f]X, \\ \mathcal{L}_X(fY) &= f[X, Y] + X[f]Y. \end{aligned} \quad (۱۰)$$

در این روابط  $X$  و  $Y$  میدان های برداری روی یک خمینه  $M$  و  $f$  یک تابع مشتق پذیر حقیقی از  $M$  به سوی اعداد حقیقی است.

$$\phi_*[X, Y] = [\phi_*X, \phi_*Y]. \quad (11)$$

در این رابطه  $\phi$  یک تابع از یک خمینه  $M$  به سوی یک خمینه  $N$  است.

سوال هفتم: پوسته کره دو بعدی (که یک خمینه دوبعدی است) را در نظر بگیرید. در تصویر استریوگرافیک از قطب شمال هر نقطه با مختصات  $(\theta, \phi)$  به یک نقطه با یک مختصه مختلط  $z = x + iy$  در صفحه دوبعدی که از قطب جنوب می گذرد نگاشته می شود. این مختصه مختلط را پیدا کنید.

در قسمت یک جای قطب شمال و جنوب را عوض کنید. در این صورت همان نقطه مختصه مختلط  $z' = x' + iy'$  را پیدا خواهد کرد. این مختصه را بدست آورید و رابطه آن را با  $z$  روشن کنید.

سوال هشتم: پوسته کره سه بعدی (که یک خمینه سه بعدی است) را در نظر بگیرید. این کره در فضای چهاربعدی دکارتی با رابطه  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$  نشانده می شود. می توان مختصات موضعی  $(\theta, \phi, \psi)$  یعنی مختصات تعمیم یافته قطبی را روی این کره در نظر گرفت.

الف: بردارهای  $\frac{\partial}{\partial \theta}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \phi}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \psi}$  را بر حسب بردارهای یکه فضای دکارتی بدست آورید.

ب: بردارهای  $d\theta$ ,  $d\phi$ ,  $d\psi$  را بر حسب بردارهای  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ,  $dw$  بدست آورید.

ب: تصویر استریوگرافیک را از قطب شمال در نظر بگیرید. تعیین کنید که مختصات استریوگرافیک نقطه ای با مختصات  $(\theta, \phi, \psi)$  چیست.

ج: تعیین کنید که بردارهای  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  ,  $\frac{\partial}{\partial \phi}$  ,  $\frac{\partial}{\partial \psi}$  در تصویر استریوگرافیک به چه بردارهایی نگاشته می شوند.