

تمرین های درس ریاضی فیزیک پیشرفته – سری هفتم موعده تحویل : دهم تیرماه

وحید کریمی پور

۱۳ خرداد ۱۳۹۹

سوال اول: انحنا Curvature و تاب Torsion منحنی های زیر را پیدا کنید:

$$r = e^t (\sin(t), \cos(t), 1) \quad (1)$$

و

$$r = a(\cosh(t), \sinh(t), t). \quad (2)$$

شکل فضایی این منحنی ها را نیز رسم کنید.

سوال دوم: انحنا بیضی گون زیر را در نقاط داده شده محاسبه کنید:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a, 0), \quad (0, b). \quad (3)$$

سوال سوم: نشان دهید که تنها سطوح دوبعدی که انحناى متوسط آنها برابر با صفر است دو تا هستند: یکی صفحه R^2 و دیگری سطحی که به آن *Catenoid* می گوییم و عبارت است از سطح دواری که از چرخاندن منحنی زیر حول محور y بدست می آید:

$$x = \frac{\cosh(ay + b)}{a}. \quad (۴)$$

سوال چهارم: فرض کنید که (M, g) یک خمینه همدیس تخت Conformally Flat است. نشان دهید که در این صورت تانسور وایل - شوتن Weyl-Schouten برابر با صفر می شود. این تانسور به صورت زیر تعریف می شود:

$$C_{\lambda\mu\nu} := \nabla_\nu R_{\lambda\mu} - \nabla_\mu R_{\lambda\nu} - \frac{1}{4}(g_{\lambda\mu}\partial_\nu \mathcal{R} - g_{\lambda\nu}\partial_\mu \mathcal{R}) \quad (۵)$$

سوال پنجم: متریک زیر را در نظر بگیرید:

$$g = -dt \otimes dt + dr \otimes dr + (1 - 4\mu^2)r^2 d\phi \otimes d\phi + dz \otimes dz, \quad (۶)$$

که در آن $0 < \mu < \frac{1}{4}$ و $\mu \neq \frac{1}{4}$. یک متغیر جدید به صورت

$$\tilde{\phi} = (1 - 4\mu)\phi \quad (۷)$$

در نظر گرفته و نشان دهید که در این صورت متریک بالا به متریک مینکوسکی تبدیل می شود. آیا این بدان معناست که g فضا زمان مینکوسکی را توصیف می کند؟ تانسور ریمان را برای این متریک حساب کنید و نشان دهید که یک تکنیکی ریمان مانند در نقطه $r = 0$ وجود دارد. این متریک نشان دهنده فضای زمان اطراف یک ریمان کیهانی است.

سوال ششم: فرض کنید که M یک خمینه کیلر *Kahler Manifold* و Ω فرم کیلر آن باشد. در این صورت ثابت کنید که

$$\Omega^m := \Omega \wedge \dots \wedge \Omega \quad (۸)$$

یک فرم بسته است اما دقیق نیست. در این عبارت m بعد مختلط خمینه است. (راهنمایی: از قضیه استوکس استفاده کنید.) بنابراین اعداد Betti Numbers b^m صفر نیستند و در واقع $b^m > 1$.