

تمرینات سری هشتم - درس ریاضی فیزیک پیشرفته

خمینه های ریمانی

موعده تحویل پاسخ ها: ۲۰ تیرماه ۱۳۹۹ دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲۲ خرداد ۱۳۹۹

مسئله یک: الف: متریک صفحه تخت در مختصات قطبی به صورت

$$g = dr \otimes dr + r^2 d\phi \otimes d\phi.$$

است. برای این متریک مولفه های غیر صفر همبندی لوی-چیویتا را بدست آورید.

ب: متریک القا شده از فضای تخت سه بعدی روی کره دو بعدی برابر است با:

$$g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi.$$

مولفه های غیر صفر همبندی لوی-چیویتا را برای این متریک بدست آورید.

مسئله دوم: الف: کره سه بعدی S^3 را در نظر بگیرید. متریک القا شده از فضای چهاربعدی را روی آن بدست آورید.

ب: بیضی گون با معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ را در فضای سه بعدی R^3 در نظر بگیرید و متریک القا شده روی آن را محاسبه کنید.

مسئله سوم: الف: یک استوانه قائم با مقطع دایره ای به شعاع a در نظر بگیرید. متریک روی این استوانه همان متریک القا شده از فضای سه بعدی تخت است. نشان دهید که ژئودزی های این استوانه منحنی های مارپیچی روی استوانه هستند.

مسئله چهارم: یک مدل برای هندسه هذلولوی مدل پوانکاره است. در این مدل نیم صفحه بالای R^2 فضای مورد نظر پوانکاره است که با متریک زیر مجهز شده است:

$$g = \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

نشان دهید که ژئودزی های این فضا عبارتند از نیم دایره هایی که مرکز آن ها روی محور x قرار دارد. طول ژئودزی را برای هر دایره حساب کنید.

مسئله پنجم: الف: برای عالم همگن و همسانگرد متریک رابرتسون – والکر به صورت زیر است:

$$g = -dt \otimes dt + a^2(t) \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - kr^2} + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi) \right)$$

که در آن k یک عدد ثابت 0، -1 یا 1 است. برای این متریک مولفه های مستقل تانسور ریمان و سپس تانسور ریچی و انحنا اسکالر را حساب کنید.

ب: متریک شوارتسچیلد به صورت زیر است:

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt \otimes dt + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi)$$

برای این متریک مولفه های مستقل تانسور ریمان و سپس تانسور ریچی و انحنا اسکالر را حساب کنید.