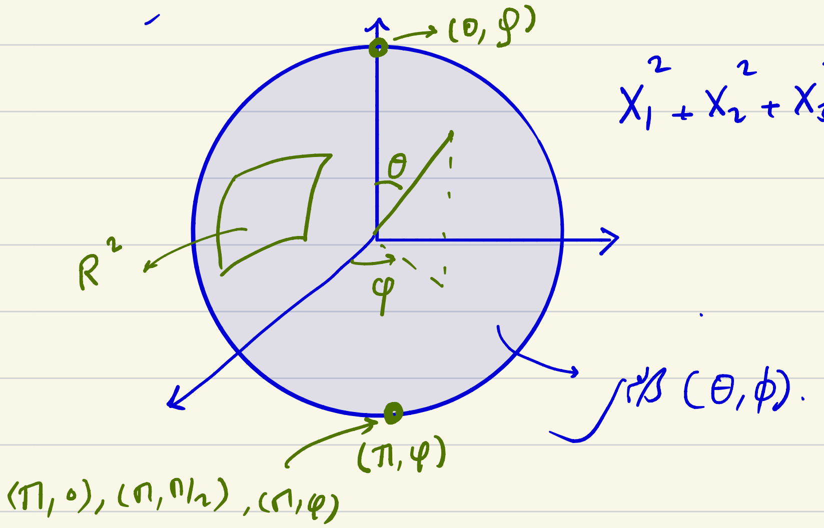
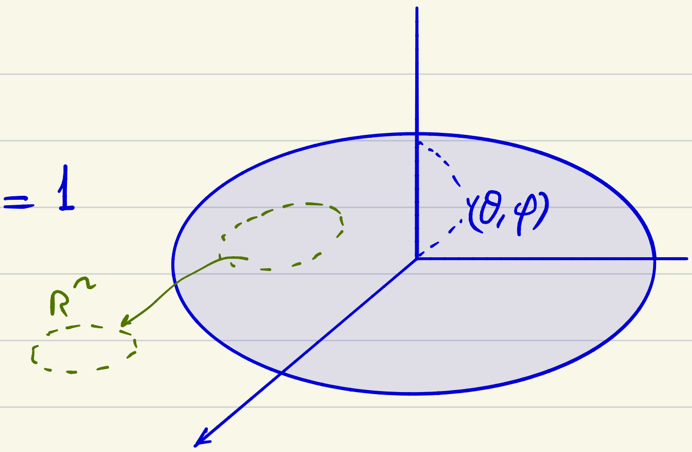
۹۹,۱,۲۴ صبح یکشنبه

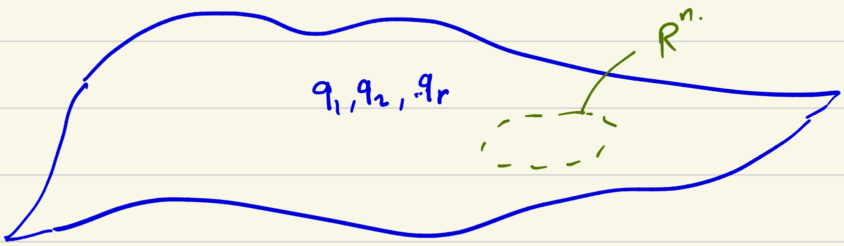
Manifolds.



$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$



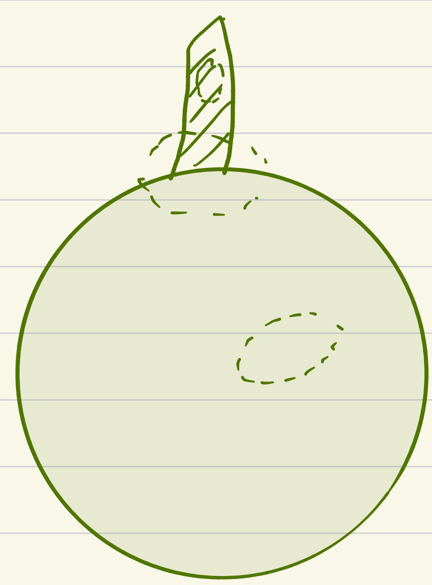
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$



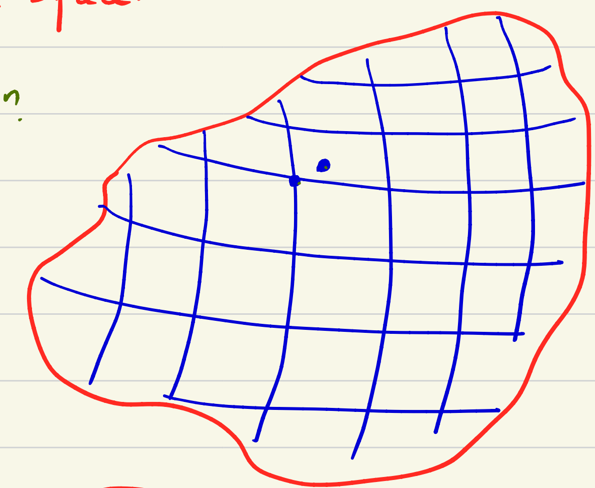
r-dimensional manifold

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_{n+1}^2 = 1 \rightarrow (q_1, q_2 \ldots q_n) = n\text{-coordinates.}$$

از نظر تئوری Manifold یعنی، فضای توپولوژیکی است که به صورت موضعی همارز است با نواحی از R^n.



Manifold : 1) M = is a topological space.



2) $M \xrightarrow{f}$ Subset of R^n.

دقیق‌تر

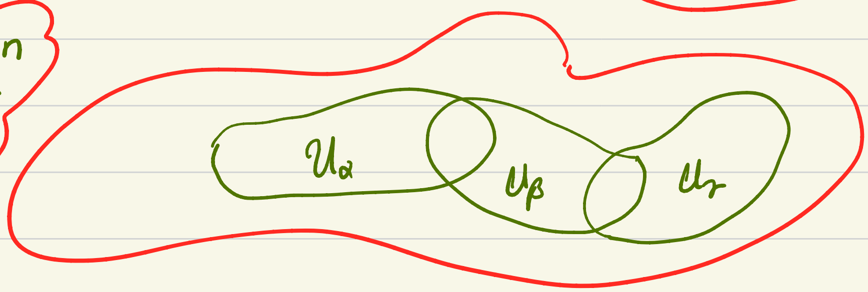
f is continuous.

2') $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ ←

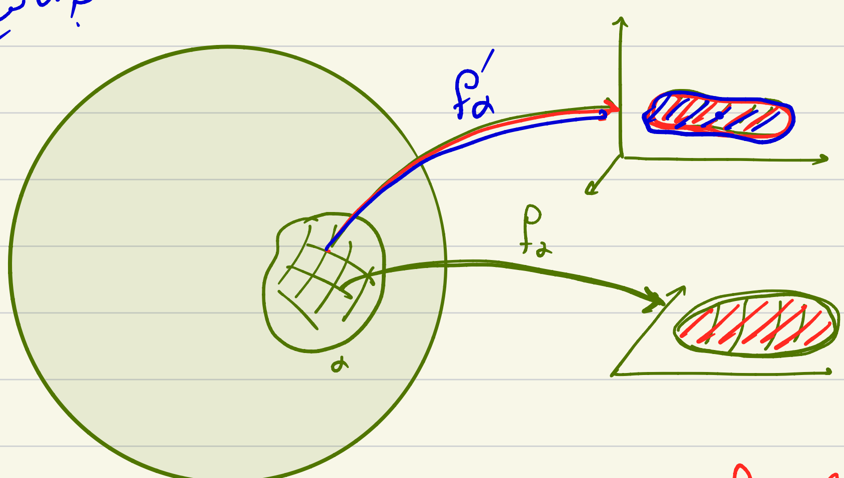
$f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \underline{f_\alpha(U_\alpha)} \subset R^n$

R^n زیرمجموعه باز است در

لزوما ثابت نباشد



سوال: به کدام R^n ؟

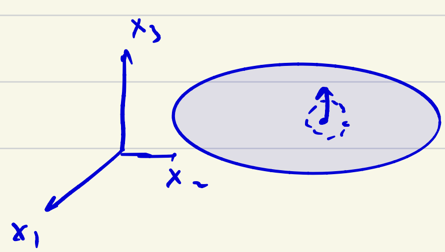


R^3 (q_1, q_2, q_3) سه بعدی

$f_\alpha(U_\alpha) \in R^2$ (θ_1, θ_2) دو بعدی

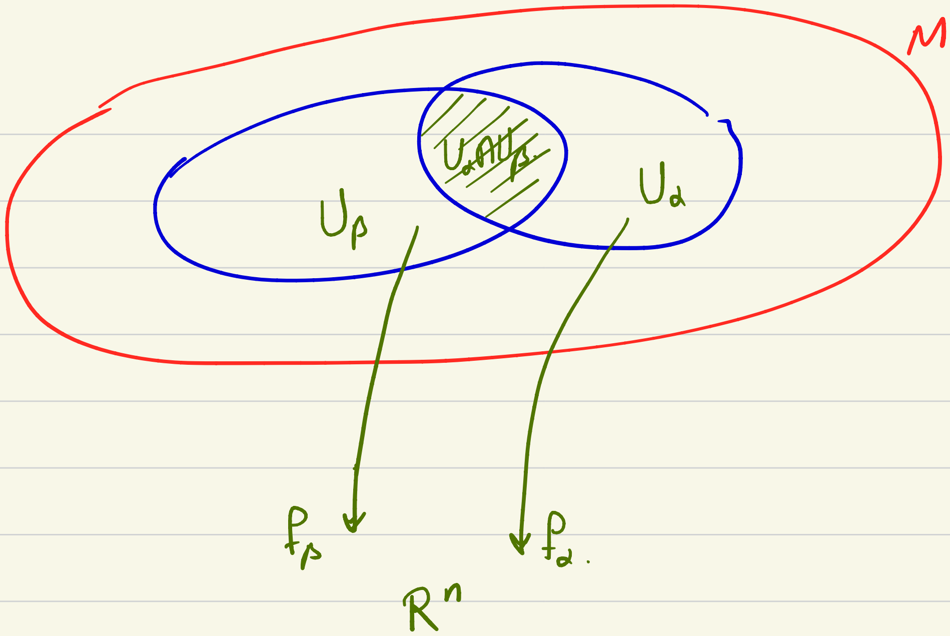
$f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subset R^n$

باز



f_α is a homomorphism between U_α & V_α.

3)



$U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} (x_\alpha^1, x_\alpha^2, \quad x_\alpha^n)$

$U_\beta \xrightarrow{f_\beta} (x_\beta^1, x_\beta^2, \quad x_\beta^n)$

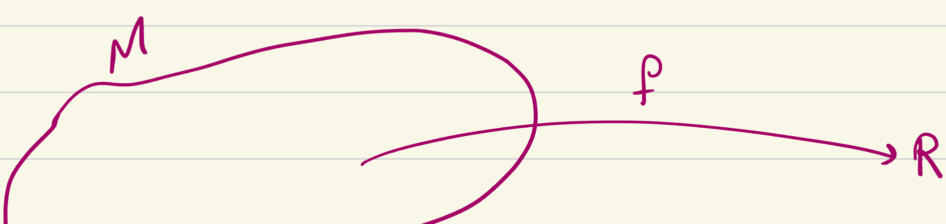
$$U_\alpha \cap U_\beta \quad P \; \begin{matrix} \xrightarrow{f_\alpha} \underbrace{(x_\alpha^1, \quad x_\alpha^n)} \leftarrow \\ \xleftarrow{f_\alpha^{-1}} \\ \xrightarrow{f_\beta} \underbrace{(x_\beta^1, \ldots \quad x_\beta^n)} \end{matrix}$$

$$\boxed{x_\beta^i = x_\beta^i(x_\alpha^1, \ldots x_\alpha^n)}$$

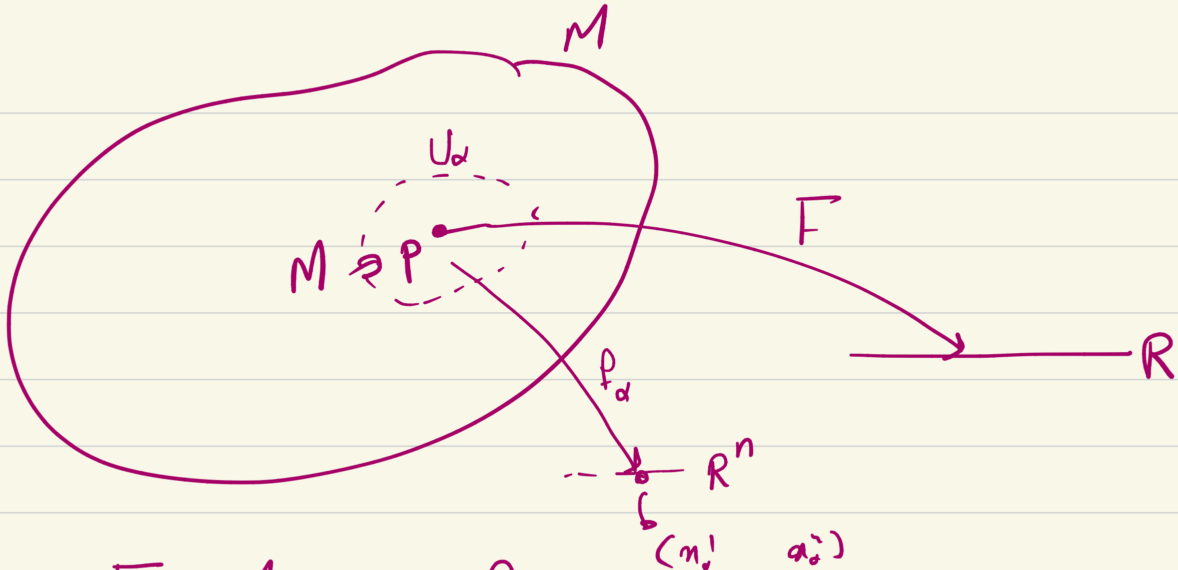
↑ یک به یک وارون‌پذیر هست.

Differentiable Manifold ← اگر توابع درجه k $U_\alpha \cap U_\beta$ مشتق‌پذیر باشند.

if $f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$ (توابع تغییر مختصات) are k-differentiable → M is a C^k-Differentiable Manifold.



تعریف: F مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر بر حسب مختصات سیستم، مشتق‌پذیر باشد.



$$F : M \longrightarrow R$$

$$\underbrace{(F \circ f_\alpha^{-1})} : R^n \longrightarrow R \qquad F(x_\alpha^1, x_\alpha^2, \ldots x_\alpha^n)$$

if $F \circ f_\alpha^{-1}$ is differentiable $\longrightarrow$ F is differentiable at p.

It may happen that $p \in U_\alpha$ & $p \in U_\beta$.

$$f_\alpha(p) = (x_\alpha^1 \quad x_\alpha^n) \qquad f_\beta(p) = (x_\beta^1 \quad x_\beta^n).$$

$F \circ f_\alpha^{-1}$ مشتق‌پذیر است

$F \circ f_\beta^{-1}$ 〃

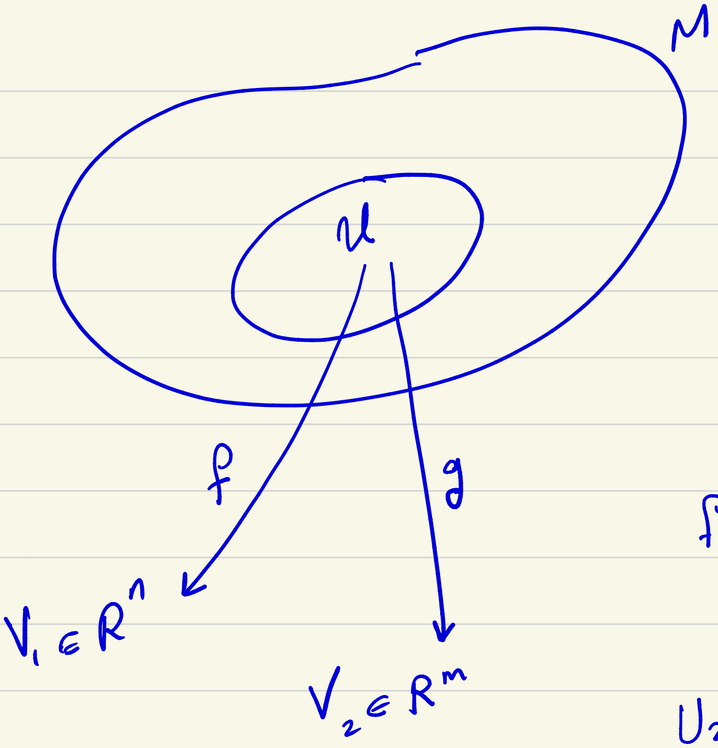
$$\underline{(F \circ f_\beta^{-1})} = \underline{F \circ f_\alpha^{-1}} \circ \underline{(f_\alpha \circ f_\beta^{-1})}$$

مشتق‌پذیر

$(U_\alpha, f_\alpha) \equiv$ Chart $\equiv$ نقشه

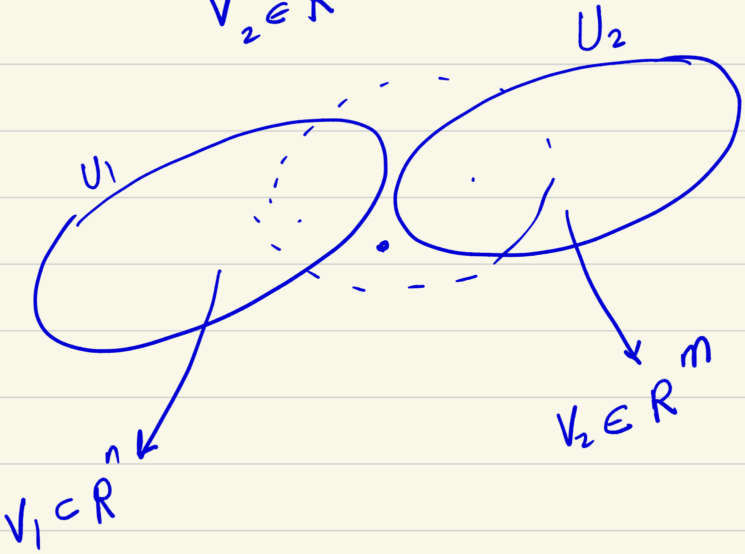
نام‌گذاری:

$\{(U_\alpha, f_\alpha)\} =$ Atlas



$f, g =$ نگاشت یک به یک و پیوسته

$f \circ g^{-1} : V_2 \longrightarrow V_1$ نگاشت یک به یک پیوسته و دیفرانسیل‌پذیر
و نیز هموار است.



$\bigcup_\alpha U_\alpha = M$

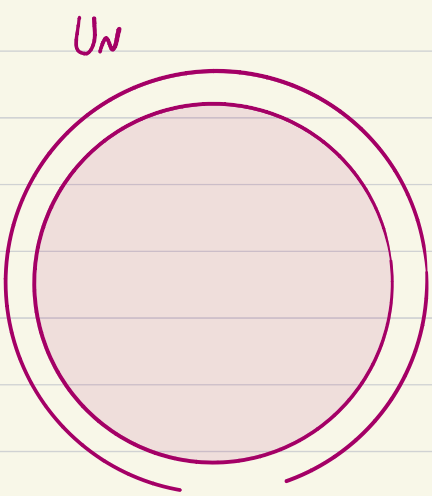
مثال ۱)

$M = R^n$

$M = U_1$

مثال ۲)

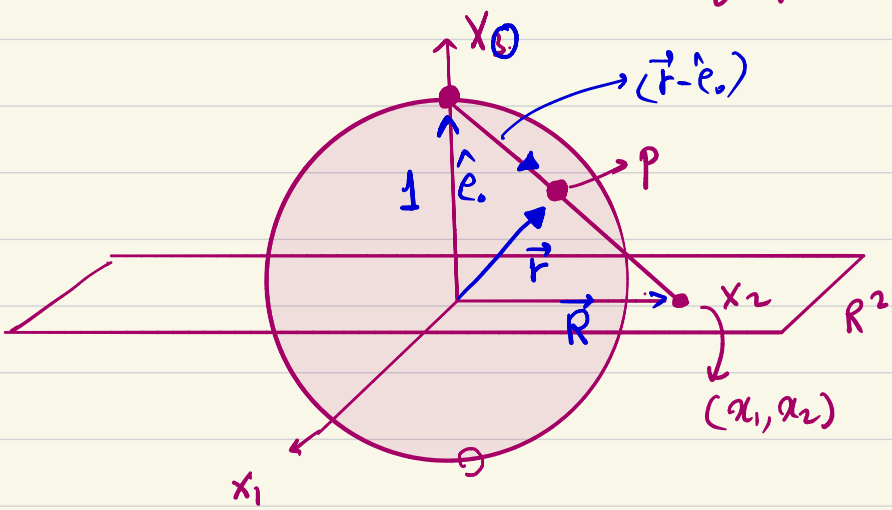
کره دو بعدی و بطور کلی n بعدی.



U_N : S_2 − South pole.

U_s : S_2 − North pole

Stroographic $\subseteq$ projective نگاشت



$U_s : \longrightarrow R^2$

South pol $\longrightarrow (0,0)$

$U_s \not\ni$ North pol $\longrightarrow \infty$

راه دیگر بدست آوردن نگاشت Streographic.

$\vec{R}$	?	$\vec{r}$
ابرکره دوبعدی	۲ بعدی	۳ بعدی
ابرکره n بعدی	n بعدی	n+1 بعدی

$$\vec{R} = \hat{e}_0 + \lambda(\vec{r}-\hat{e}_0) \quad \checkmark$$

$\hat{e}_0 \cdot \vec{R} = 0$ مرزی $\longrightarrow \quad 1 + \lambda(\vec{r}-\hat{e}_0)\cdot\hat{e}_0 = 0 \longrightarrow$

$$1 + \lambda\, \vec{r}\cdot\hat{e}_0 - \lambda = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{1}{1-\vec{r}\cdot\hat{e}_0} = \frac{1}{1-X_0}$$

$$\vec{R} = \hat{e}_0 + \frac{\vec{r}-\hat{e}_0}{1-X_0} \longrightarrow x_n = \vec{R}\cdot\hat{e}_n = \frac{X_n}{1-X_0}$$

$$x_n^+ = \frac{X_n}{1-X_0} \quad ① \qquad n=1,2,\dots n. \qquad \text{for } p \in U^+$$

کره: مختصات $(x_1, \dots x_n)$ مختصات ذاتی هستند.

مختصات $(X_0, X_1, \dots X_n)$ مختصات بیرونی ناشی از فضای R^{n+1} است.

$$x_n^- = \frac{X_n}{1+X_0} \quad ② \qquad \text{for } p \in U^-$$

in $U^+ \cap U^- = \{ X_0 \neq 1, -1 \}$. Are x_n^+ a differentiable function of x_m^- ?

$$\sum_{n=1}^{N} (x_n^+)^2 = \frac{\sum_{n=1}^{N} X_n^2}{(1-X_0)^2} = \frac{1-X_0^2}{(1-X_0)^2} = \frac{1+X_0}{1-X_0}$$

$$\sum_{n=1}^{N} (x_n^+)^2 = \frac{1+X_0}{1-X_0}$$

$$①, ② \longrightarrow \frac{x_n^+}{x_n^-} = \frac{1+X_0}{1-X_0} = \sum_{n=1}^{N} (x_n^+)^2 \longrightarrow$$

$$x_n^- = \frac{x_n^+}{\sum_{n=1}^{N} (x_n^+)^2}$$

should be differentiable in $U^+ \cap U^-$.

حل ۳)

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} / _{v \equiv \lambda v} = $$ خطوط مار بر مبدا در $\mathbb{R}^{n+1}$

نشان دهید $\mathbb{R}P^n$ یک خمینه n بعدی است.

$$\text{if } [v] \in \mathbb{R}P^n \rightarrow \underline{\underline{[v]}} = \{ \lambda v , \quad \lambda \neq 0 \} \qquad v = (v_1, v_2, v_3, \quad v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$U_1 \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid v_1 \neq 0 \rightarrow (v_1, v_2, \quad v_{n+1}) \equiv \left(1, \frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1}, \dots \frac{v_{n+1}}{v_1}\right)$$

$$q_i^{(1)} = \frac{v_i}{v_1} \qquad i = 2, \quad n+1$$

$i \neq 1$

$$U_2 \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid v_2 \neq 0 \qquad (v_1, v_2 \,.\, v_{n+1}) = \left(\frac{v_1}{v_2}, 1, \frac{v_3}{v_2}, \quad \frac{v_{n+1}}{v_2}\right)$$

$$q_i^{(2)} = \frac{v_i}{v_2} \qquad i \neq 2$$

$$q_i^{(j)} = \frac{v_i}{v_j} \qquad i \neq j$$

$$\text{in} \quad U_1 \cap U_2 : \quad \begin{matrix} v_1 \neq 0 \\ v_2 \neq 0 \end{matrix}$$

$$\xi_2 = \frac{v_2}{v_1} \quad \xi_3 = \frac{v_3}{v_1} \quad \dots \xi_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{v_1}$$

$$\eta_1 = \frac{v_1}{v_2} \quad \eta_3 = \frac{v_3}{v_2} \quad \eta_4 = \frac{v_4}{v_2} \quad \eta_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{v_2}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\eta_1} \qquad \xi_3 = \frac{\eta_3}{\eta_1}, \quad \xi_4 = \frac{\eta_4}{\eta_1} \dots$$