یکشنبه ۹۹,۲,۲۸ _ جلسهٔ بیست و نهم

گروه لی   Lie Group

$GL(n,\mathbb{R})$ = گروه ماتریس‌های $n\times n$ معکوس‌پذیر و حقیقی

$SL(n,\mathbb{R})$ = گروه ماتریس‌های $n\times n$ حقیقی وارون‌پذیر با دترمینان 1 $SL(n,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R})$

$$O(n,\mathbb{R}) = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid AA^t = A^tA = I \} =$$ ماتریس‌های متعامد

$$SO(n,\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{R}) \cap SL(n,\mathbb{R}) \quad \dots$$

$$O(p,q,\mathbb{R}) = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A^t \eta A = \eta \}$$

$$\eta = \left[\begin{array}{c|c} I_{p\times p} & \\ \hline & -I_{q\times q} \end{array}\right]$$

در همهٔ موارد بالا می‌توانید $\mathbb{R}$ را با $\mathbb{C}$ (اعداد مختلط) عوض کنید و گروه‌های لی دیگری به دست آورید.

$$GL(n,\mathbb{C}),\quad SL(n,\mathbb{C}),\quad U(n,\mathbb{C}),\ \dots$$

به صورت کیفی و شهودی: گروه لی $\cong$ یک گروه پیوسته است که هر نقطهٔ آن مختصات هم دارد.

$\cong$ یک گروه است که در عین حال یک خمینه است.

$\cong$ یک خمینه است که در عین حال گروه هم هست.

Def: Let G be a manifold:

$$m: G \times G \longrightarrow G$$

$$(g, g') \longrightarrow g'' \qquad \text{حاصلضرب}$$

$$i: G \longrightarrow G \qquad \text{وارون}$$

$$e \in G \qquad \text{یک عضو خاص } G$$

عضو واحد.

به علت اشتراک ویژگی‌های زیر، G با این اعمال یک گروه است.

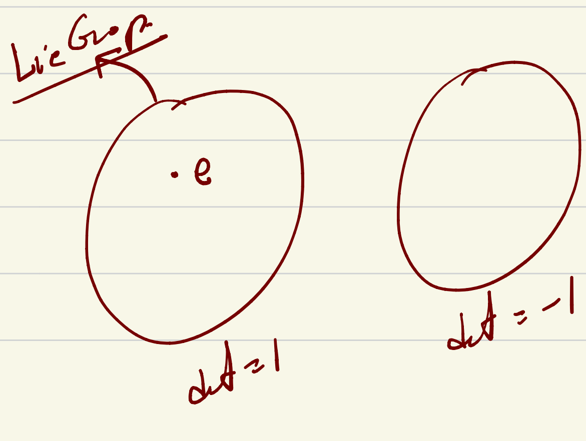
$$m\big(m(g, g'), g''\big) = m\big(g, m(g', g'')\big) \qquad \text{شرکت‌پذیری:}$$

$$m(g, e) = m(e, g) = g$$

$$m(i(g), g) = m(g, i(g)) = e$$

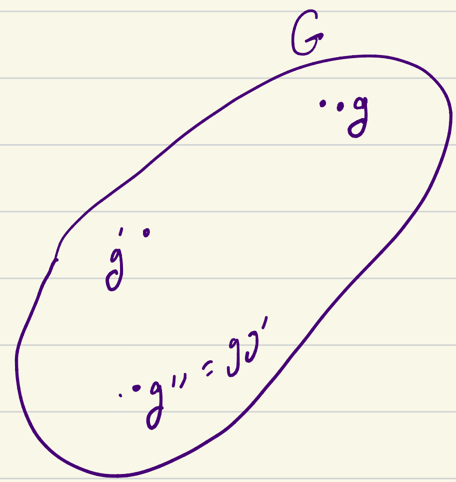
m & i are differentiable functions.

در صفحه ۵۶: the connected part to $\{e\}$ is called a Lie group.



$O(n, R)$ به عنوان مثال،

$$g \in G \to g\underbrace{(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots \theta_n)}_{\text{مختصات ریاضی } g}$$



فرض: $g(0,0,0, \ldots 0) = e$.

مثال: $SU(2) = G$

$$g \in SU(2) \to g = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

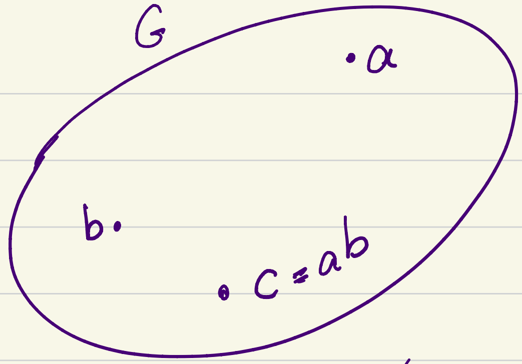
$$a = \cos\theta \, e^{i\alpha} \qquad b = \sin\theta \, e^{i\beta} \qquad (\theta, \alpha, \beta)$$

$$g = \begin{bmatrix} \cos\theta \, e^{i\alpha} & \sin\theta \, e^{i\beta} \\ -\sin\theta \, e^{-i\beta} & \cos\theta \, e^{-i\alpha} \end{bmatrix} = g(\theta, \alpha, \beta).$$

$$g(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad g(\theta, \alpha, \beta)\, g(\theta', \alpha', \beta') = g(\theta'', \alpha'', \beta'')$$

$$\theta'' = \theta''(\theta, \alpha, \beta, \theta', \alpha', \beta')$$
$$\alpha'' = \alpha''(\quad " \quad\quad " \quad)$$
$$\beta'' = \beta''(\quad " \quad\quad " \quad)$$

توابع مشتق‌پذیرند.



$$ab = c$$

$$a = g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$$

$$b = g(\beta_1, \beta_2 \quad \beta_n)$$

$$c = g(\gamma_1, \gamma_2, \quad \gamma_n)$$

بنا بر تعریف گروه‌های لی این توابع پیوسته و مشتق‌پذیرند.

$$\gamma_i = f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n). \qquad (1)$$

چون $ae = a \rightarrow$

$$\alpha_i = f_i(\alpha_1, \alpha_2, \quad \alpha_n, 0, 0, \quad 0) \qquad (2)$$

$$\beta_i = f_i(0, 0, \quad 0, \beta_1, \beta_2 \quad \beta_n) \qquad (3)$$

از رابطه (1) و با توجه به اینکه f_i یک تابع تحلیلی است

f_i را به‌صورت سری بسط داد.

$$\gamma_i = c_i + \alpha_i + \beta_i + C_i^{jk} \alpha_j \beta_k + \ldots \quad D_i^{jk} \alpha_j \alpha_k + E_i^{jk} \beta_j \beta_k$$

c_i - بنا بر رابطه 2, 3 باید وجود نداشته باشد.

این عبارت‌ها بنا بر رابطه (2), (3) نباید وجود داشته باشند.

$$\gamma_i = \alpha_i + \beta_i + C_i^{jk} \alpha_j \beta_k + \ldots$$ ← در نتیجه

از این به بعد جملات را محدود می‌کنیم به گروه‌های نازک. ←

let $g \in G$ = Matrix Lie Group.

$$g(\theta^1, \theta^2, \ldots \theta^n) = I + \theta^i T_i + \frac{1}{2}\theta^i\theta^j T_{ij} + \frac{1}{3!}\theta^i\theta^j\theta^k T_{ijk} + \cdots$$

ماتریس

یک قضیه خیلی خیلی مهم: همه $\{T_{ij\ldots}\}$ از $\{T_i\}$ بدست می‌آید. ← $\{T_i\}$ مولدهای گروه لی خوانده می‌شوند.

A

T_i = generators of Lie Group.

B

$\{T_i\}$ پایه‌ی یک جبر لی هستند

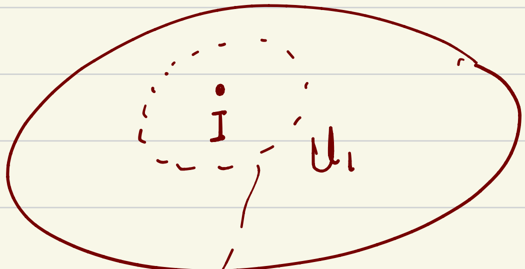
$$[T_i, T_j] = f_{ij}{}^k T_k.$$

قبل از بحث: مثال:

$$SL(2,R) = \{ g \in M_2(R) \mid \det g = 1 \}$$

$M_2(R)$ = ماتریس‌های 2×2 حقیقی [illegible]

تصور $SL(2,R)$ را [illegible] ←



نزدیک دور I.

$g = I + L(\theta_1, \ldots)$.

$L \to$ infinitesimal Matrix

چ? $\det g = 1 \longrightarrow \operatorname{tr}(L) = 0 \qquad L = \begin{bmatrix} \theta_3 & \theta_+ \\ \theta_- & -\theta_3 \end{bmatrix}$

$\det(I + L) = 1 + \operatorname{tr}(L) + \cdots \qquad \therefore \quad L = \begin{bmatrix} \theta_3 & \theta_1 - \theta_2 \\ \theta_1 + \theta_2 & -\theta_3 \end{bmatrix}$

$(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ are the params of $g \in \mathcal{U}_1$

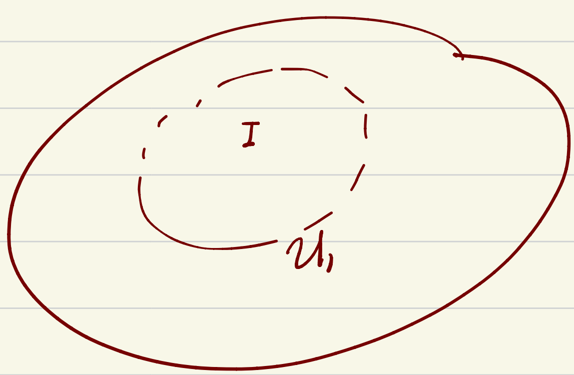
$$g(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = I + \begin{bmatrix} \theta_3 & \theta_1 - \theta_2 \\ \theta_1 + \theta_2 & -\theta_3 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= I + \theta_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \theta_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\left\{ T_1 = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \right\}$ are the generators of $SL(2, \mathbb{R})$.

مطالعه کنید

$G = SO(n, \mathbb{R}) \qquad$ if $g \in SO(n, \mathbb{R})$



$g \simeq I + L$

$g^T g = I \longrightarrow (I + L)(I + L^T) = I$

$I + L + L^T + \cdots = I \rightsquigarrow L + L^T = 0$

پس L باید یه ماتریس پادمتقارن باشه.

for $n=3$

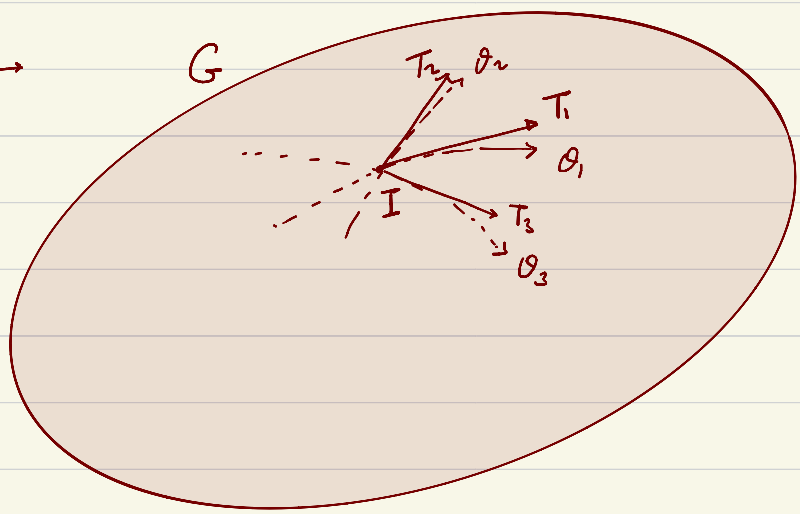
$$L = \begin{bmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad T_3 = \begin{bmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ & & \end{bmatrix} \qquad T_1 = \begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ & -1 & \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} & & -1 \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

یک کم تعبیر هندسی :

$$g(\theta^1, \theta^2, \quad \theta^n) = I + \theta^i T_i + \tfrac{1}{2}\theta^i \theta^j T_{ij} + \dots$$

$$\boxed{T_i = \frac{\partial g}{\partial \theta^i}\Big|_{\theta=0}} \rightarrow$$



T_i ها بردارهای مماس بر G هستند

نقطه‌ی I یا e.

$\{T_i\text{'s}\}$ form a basis for $T_e(G)$.

در گروه‌ها، خواص تابع ضرب : داریم

$$\gamma^i = \alpha^i + \beta^i + C^i_{jk}\,\alpha^j \beta^k + \dots$$

مختصات $ab \in G$ مختصات $a \in G$ مختصات $b \in G$

برای a :
$$a = I + \alpha^i T_i + \tfrac{1}{2}\alpha^i \alpha^j T_{ij} + \dots$$

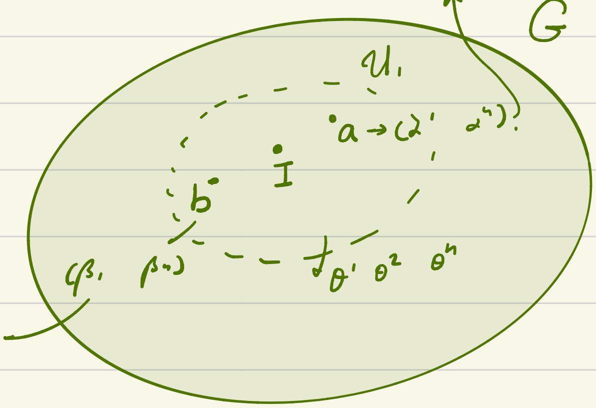
$a, b, ab \in \mathcal{U}_1$

$$b = I + \beta^i T_i + \frac{1}{2}\beta^i\beta^j T_{ij} + \dots$$

$$ab = I + \gamma^i T_i + \frac{1}{2}\gamma^i\gamma^j T_{ij} + \dots$$

$$\boxed{\left(I + \alpha^i T_i + \frac{1}{2}\alpha^i\alpha^j T_{ij} + \dots\right)\left(I + \beta^i T_i + \frac{1}{2}\beta^i\beta^j T_{ij} + \dots\right) = \left(I + \gamma^i T_i + \frac{1}{2}\gamma^i\gamma^j T_{ij} + \dots\right)} \quad (1)$$

مقادیر θ^i ها برای a.



مقادیر خاص θ^i ها برای b.

$$\boxed{\left(I + \alpha^i T_i + \underbrace{\frac{1}{2}\alpha^i\alpha^j T_{ij} + \dots}\right)\left(I + \beta^i T_i + \underbrace{\frac{1}{2}\beta^i\beta^j T_{ij} + \dots}\right) = \left(I + \gamma^i T_i + \frac{1}{2}\gamma^i\gamma^j T_{ij} + \dots\right)} \quad (1)$$

$$\gamma^i = \alpha^i + \beta^i + \underbrace{C^i{}_{jk}\,\alpha^j\beta^k + \dots}$$

$\Longleftarrow$ اگر بسط‌ها در (1) قرار دهیم.
و طرفین را تا مرتبه ۲ مقایسه کنیم.

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(I + \alpha^i T_i + \frac{1}{2}\alpha^i\alpha^j T_{ij} + \dots\right)\left(I + \beta^i T_i + \frac{1}{2}\beta^i\beta^j T_{ij} + \dots\right) = \\ &= I + \left(\alpha^i + \beta^i + C^i{}_{jk}\alpha^j\beta^k\right)T_i + \frac{1}{2}\left(\alpha^i + \beta^i + \dots\right)\left(\alpha^j + \beta^j + \dots\right)T_{ij}\end{aligned}} \quad (2)$$

در قدم ② دو تا بسط تیلور تا مرتبه دوم داریم. مقایسه می‌کنیم.

$$T_{jk} = T_j T_k - C^i_{jk} T_i \quad (*)$$

دلیل این رابطه

① T_{jk} را برحسب T_i ها بسط می‌دهیم.

یادآوری: $T_{jk} = T_{kj}$

② از تقارن استفاده کنید

$$T_{kj} = T_k T_j - C^i_{kj} T_i \quad (**)$$

$(*)$, $(**)$ $\rightsquigarrow$ $T_j T_k - T_k T_j = (C^i_{jk} - C^i_{kj}) T_i = f^i_{jk} T_i \rightarrow$

$[T_j ; T_k] = f^i_{jk} T_i \longrightarrow$ $T_e(G)$ is a Lie Algebra.