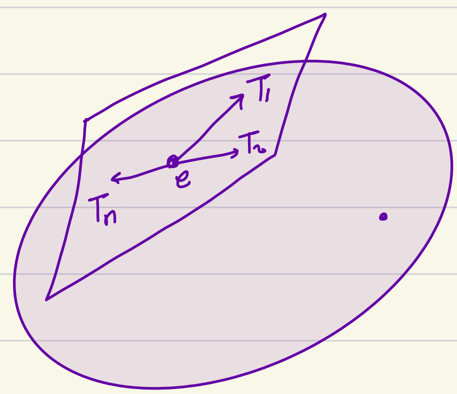
جلسه‌ی ۱ام، ۹۹,۳,۴

For Matrix Lie groups: $g \in G$ g near the identity   خلاصه‌ای از جلسه‌ی گذشته:

$$g = I + \underset{\text{infintesimal}}{L} \qquad L^2 = 0 \longrightarrow L = \theta^i T_i \rightarrow g \cong I + \theta^i T_i = I + \theta \cdot T$$

θ^i: پارامتر بی‌نهایت کوچک T_i: مولد $\theta^i T_i$: بی‌نهایت کوچک

For finite θ_i: $\vec{\theta}$. $$g = \lim_{N \to \infty} \left(I + \frac{\theta \cdot T}{N}\right)^N = e^{\theta \cdot T}$$ Exponential Map.



One-parameter subgroup:

$$G_1 = \{ g_1(\theta) = e^{\theta T_1} \quad 0 \le \theta \}$$

G_1 is a subgroup.

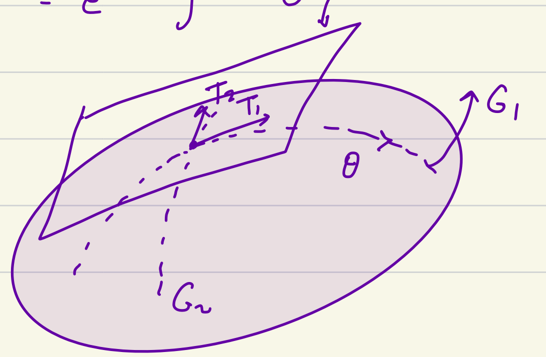
$$g_1(\theta)\, g_1(\theta') = e^{\theta T_1} e^{\theta' T_1} = e^{(\theta + \theta') T_1} = g_1(\theta + \theta')$$

G_1 ، G_N بعداً تعریف کرد.

But you can also define:

$$G = \{ g(\theta) \mid e^{\theta\left(\frac{2}{3} T_1 + \frac{1}{7} T_2\right)} = e^{\theta J} \}$$

$\mathfrak{g}$ = Lie Algebra of G

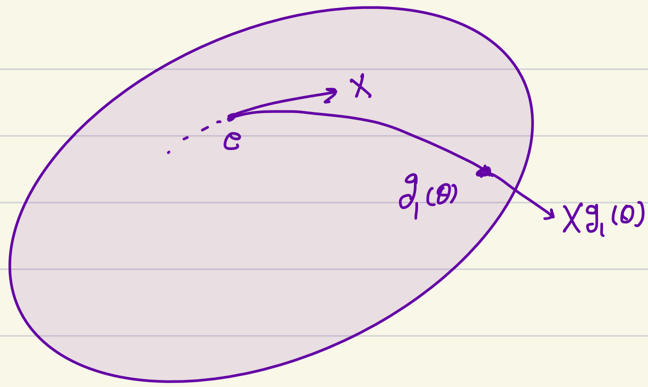


$$[T_i, T_j] = f_{ij}{}^k T_k$$

$f_{ij}{}^k$: ثابت ساختار گروه

$g_1(\theta) =$ یک منحنی در گروه است.

$$\frac{dg_1}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} e^{\theta T} = T e^{\theta T}$$



$$\frac{d g_1(\theta)}{d\theta} = \underbrace{X g_1(\theta)}$$

اثرش بر $g_1(\theta)$.

Left Invariant vector fields: (only for lie groups is defined).

$L_g : G \longrightarrow G \qquad L_g(h) := gh$

$$L_{g*} X(h) = X(gh) \quad (1)$$

ساختن یک میدان از این میدان
با کمک نگاشتی است
نیازی به چیز دیگر ندارد.

گفتن چنین رابطه‌ای
مولدها را نوشتن کمک.

$h \longrightarrow (h^1, h^2 \quad h^n)$ مختصات نقطه h

$g \longrightarrow (g^1, g^2 \quad g^n)$ 〃

$(gh) \longrightarrow ((gh)^1, \quad (gh)^n)$

$$X(h) = X^i(h) \frac{\partial}{\partial h^i} \qquad X^i(h) \equiv X^i(h^1, h^2 \quad h^n).$$

$$X(gh) = X^i(gh) \frac{\partial}{\partial (gh)^i}$$

$$(1) \longrightarrow X^i(h) \frac{\partial (gh)^k}{\partial h^i} \frac{\partial}{\partial (gh)^k} = X^i(gh) \frac{\partial}{\partial (gh)^i}$$

باید $X^i(h)$ چنین ترازی باشد
که در این رابطه صدق کند.

دلیل این ایده این است که $(gh)^i$ رابطه فوق‌العاده غیرخطی و پیچیده‌ای برحسب h^i و g^i دارند، پس کار کردن با آنها آسان نیست.

$$g \in SU(2) \qquad g = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta e^{i\alpha} & \sin\theta e^{i\gamma} \\ -\sin\theta e^{-i\gamma} & \cos\theta e^{i\beta} \end{bmatrix}$$

$g \to (\alpha, \gamma, \theta) \sim$ پارامترهای g

$\quad\;\; \overset{\shortparallel}{(g^1, g^2, g^3)}$

$$gh = \begin{bmatrix} \cos\theta e^{i\alpha} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta' e^{i\alpha'} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$h \to (\alpha', \gamma', \theta')$

$\quad\;\; \overset{\shortparallel}{(h^1, h^2, h^3)}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta'' e^{i\alpha''} & \\ & \end{bmatrix}$$

$gh \to (\alpha'', \gamma'', \theta'')$

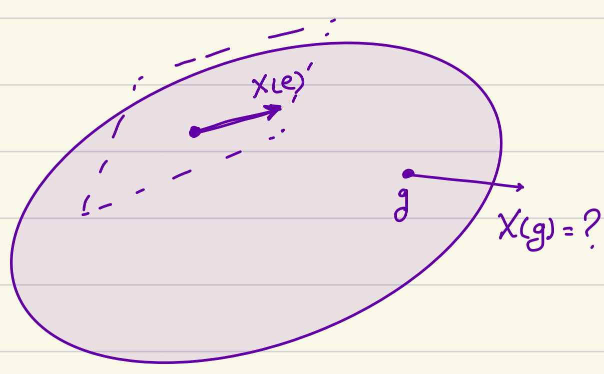
معلوم است که پارامترهای θ'' و α'' و γ'' برحسب θ و ... بسیار پیچیده است.

نکته جالب این است که احتیاجی به پیدا کردن فرم صریح این میدان‌ها نداریم. ← ولی به دو خاصیت دقیقه‌ای آن احتیاج داریم.

theorem: تناظر یک به یک بین $T_e(G)$ و $\mathfrak{g}$ = میدان‌های چپ ناوردا

$$T_e(G) \longleftrightarrow \mathfrak{g}.$$

$$X(g) = L_{g*} X(e). \longleftarrow \text{با کمک پوش‌فوروارد}$$



پس میدان $X(g)$ تنها با مقدارش در نقطه e مشخص می‌شود.

thm 2) let $X(g)$ & $Y(g)$ be 2 left-inv. vector field.

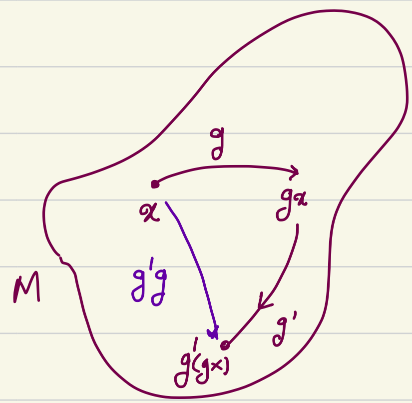
$$L_{g*}[X(h), Y(h)] \underset{\text{تمرین}}{=} [L_{g*}X(h), L_{g*}Y(h)] \underset{\text{تعریف}}{=} [X(gh), Y(gh)]$$

$\rightarrow$ $[X,Y]$ is also a Left inv vector field $\rightarrow$

$\mathfrak{g}$ is a Lie Algebra of the group.

Action of a Lie group on a Manifold.

$$\underbrace{\text{Lie group}}_{G} \qquad \underbrace{\text{Manifold}}_{M}$$



مثال: $\quad G =$ گروه دوران $\qquad M \equiv R^3$

Def: we say that G acts on M if

$$\forall g \ \& \ x \qquad gx \in M \quad \& \quad g'(gx) = (g'g)(x).$$

تعریف دقیق‌تر: $\quad G$ acts on M if $\exists$ Continuous (& differentiable Map): $\phi : G \times M \to M$

$$\begin{cases} \text{Such that: i) } \ \phi(e, x) = x. \\ \qquad \text{ii) } \ \phi(g', \phi(g, x)) = \phi(g'g, x) \end{cases}$$

$G = \{ e, I \}$. $\qquad$ مثال: $\qquad$ G لزوماً گروه لی نیست.

G acts on R^n: $\qquad \begin{cases} e\vec{x} = \vec{x} \\ I\vec{x} = -\vec{x} \end{cases}$

مثال دیگر:

$G = \{ I, R, R^2, R^3, \ R^{n-1} \}$ $\qquad R =$ دوران حول z به اندازهٔ $\frac{2\pi}{n}$

G can act on any Cartesian space

تراگذری: The action of G on M is Transitive if $\forall\, x, y \in M$

$$\exists\ g \in G \mid gx = y.$$

مثال: عمل $SO(2)$ روی R^2 (دوران حول محور z) تراگذر هست یا نیست؟ نیست.

مثال: عمل $SO(3)$ روی R^3؟ نیست.

مثال: عمل $SO(3)$ روی S^2؟ هست. R^2

مثال: عمل $GL(2)$ روی $R^2-\{0\}$؟ هست. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $\quad \exists ?\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,R)$

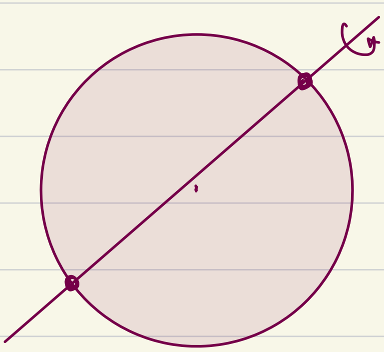
[illegible]: The action of G on M is called "free" if Any $g \neq e$ has no fixed point $\equiv \nexists\, x \in M \quad gx = x.$

هر عضو مثل $g \neq e$ هر نقطه‌ای را تغییر دهد.

مثال: عمل $SO(2)$ روی R^2 آزاد هست یا نیست؟ نیست چون همه عناصر نقطه‌ی 0 را جابجا نمی‌کنند.

مثال: عمل $SO(2)$ روی $R^2-\{0\}$ آزاد است؟ هست.

مثال: عمل $SO(3)$ روی R^3 و S^2؟



S^2

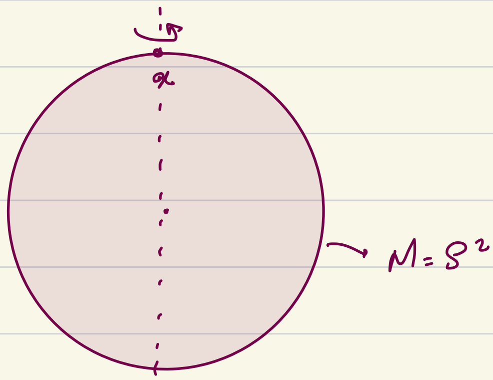
R^3

تمام محور نقطه ثابت است.

Def: Isotropy subgroup or Little group.

let $x \in M$ $\qquad H_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$

G_x = (مجموعه g هایی که آن x خاص را تغییر نمی‌دهند.



مثال: $G = SO(3)$ $\qquad M = S^2$

$SO(2) \equiv H_x$ = دوران حول محور z

قضیه: thm: H_x is a subgroup of G.

proof: let g & $g' \in H_x \longrightarrow gg' \in H_x$?

$$\begin{cases} g \in H_x \to gx = x \\ g' \in H_x \to g'x = x \end{cases} \longrightarrow (gg')(x) = g(g'x) = g(x) = x$$

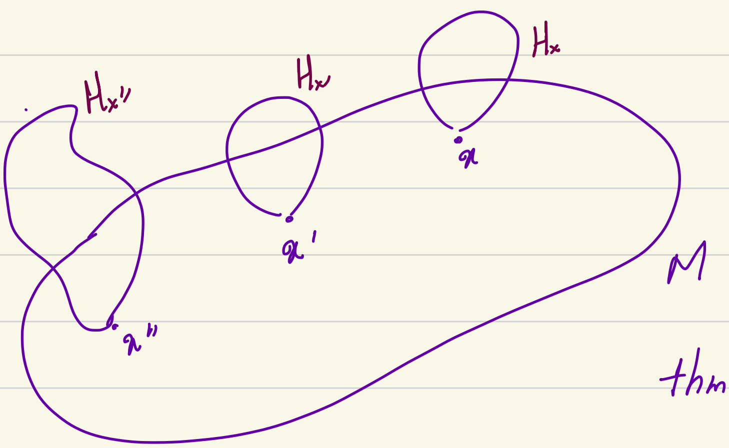
$$g^{-1}(gx) = g^{-1}x$$

$$\downarrow$$

$$(g^{-1}g)(x) = g^{-1}x \longrightarrow ex = g^{-1}x$$

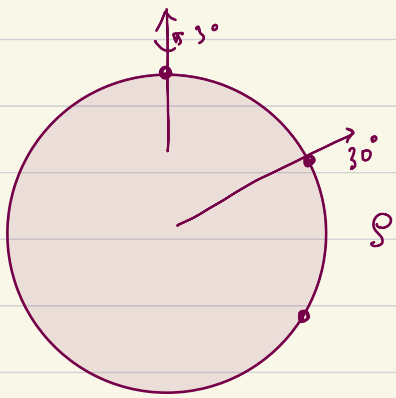
$$\downarrow$$

$$x = g^{-1}x.$$



thm: if the action of G on M is transitive, then $H_x \equiv H_{x'}$
isomorphism.

→ the isotropy subgroup of G is independent of the point in M.



$SO(3) = G$

$S^2 = M$

Proof:

$H_x \qquad\qquad H_y.$

$x \xrightarrow{\;h\;} y$

Since the action of G on M is transitive

$\exists\, h \in G \mid \quad hx = y$

$$\phi : \begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & y \\ \cup & & \cup \end{array}$$

$$\phi(g) := hgh^{-1}$$

چرا؟ $H_y = h\, H_x\, h^{-1}$

زود می‌بینیم که اگر $g \in G_x$ باشد، hgh^{-1} متعلق به G_y است.

$$(hgh^{-1})(y) = hg(h^{-1}y) = hgx = hx = y$$

why $g^{-1}y = x$? چون $hx = y \longrightarrow h^{-1}(hx) = h^{-1}y \longrightarrow (h^{-1}h)x = h^{-1}y \longrightarrow ex = h^{-1}y$

$\downarrow$

$.\, x = h^{-1}y$

why ϕ is an isomorphism?

$$\left\{\begin{array}{l} \phi(g_1g_2) = hg_1g_2h^{-1} = hg_1h^{-1}hg_2h = \phi(g_1)\,\phi(g_2). \longrightarrow \phi \text{ is an homomorphism} \\ \text{let } \phi(g_1) = \phi(g_2) \longrightarrow hg_1h^{-1} = hg_2h^{-1} \longrightarrow g_1 = g_2 \longrightarrow \phi \text{ is an isomorphism} \end{array}\right\}$$

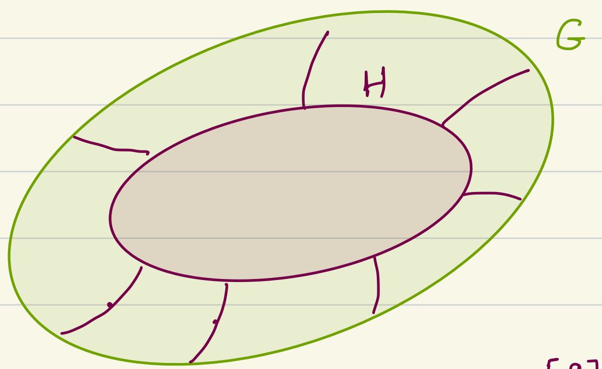
$H_x = H_y.$

یک قضیهٔ جالب و جذاب دیگر:

Let G acts transitively on M. & let H be its isotropy subgroup.

then: $G/H \underset{\text{homeomorphism.}}{\equiv} M$

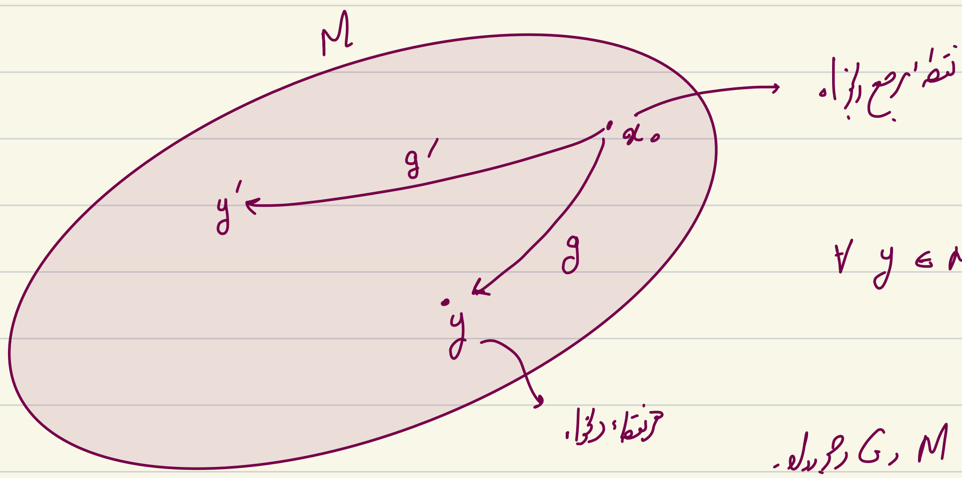
$G/H = \{$ the set of left cosets of $H \}$.



$G/H = ?$

$g \sim g'$ if $g' = gh$ for some $h \in H$.

$[g] = \{ g, gh_1, gh_2, \dots \} = gH$



$\forall y \in M \quad \exists g \in G \mid gx_0 = y$

بنابراین، به نظر می‌رسد یک تناظر یک‌به‌یک بین M و G وجود دارد.

پس

$\forall h \in H \qquad (gh)x_0 = y$

فقط یکتا نیست و چندتا دارد،

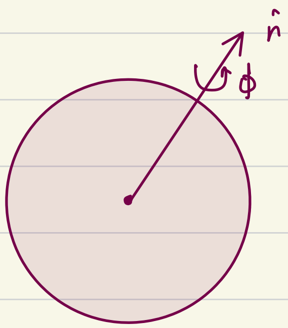
$\psi : G/H \longrightarrow M \qquad \psi[g] := gx_0 \in M.$

تمرین: نشان دهید که رابطهٔ بالا خوش تعریف است. و یک همریختی بین G/H و M تعریف می‌کند.

Example 1: $G = SO(3)$ $\quad M = S^2$ $\quad H = SO(2)$

$$\rightarrow \quad SO(3)/SO(2) \cong S^2.$$

خیلی عجیب نیست. هر دورانی با یه محور و یه زاویه مشخص میشه.



$\rightarrow$ اگر زاویه دوران رو در نظر نگیریم
فضای کل، مجموعه محور دوران است S^2.

Example 2: $SO(n+1)$ acts on S^n transitively: $H = SO(n)$.

$$SO(n+1)/SO(n) = S^n.$$

بقیه رو با تمرین ۲ می‌پردازیم.