

# درس دوم- اصل اساسی مکانیک آماری- آنزامل میکروکانونیک

وحید کریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۳ آبان ۱۳۹۷

---

## ۱ مقدمه

در این درس بازهم به اختصار به معرفی اصول اساسی مکانیک آماری می پردازیم. نخست به معرفی ماکروحالت و میکروحالت می پردازیم و سپس پس از توصیف کوتاهی از مفهوم خاصیت ارگودیک<sup>۱</sup> و آمیختگی<sup>۲</sup> به معرفی آنزامل میکروکانونیک می پردازیم. در هر قسمت مثال های ساده ای را نیز شرح می دهیم.

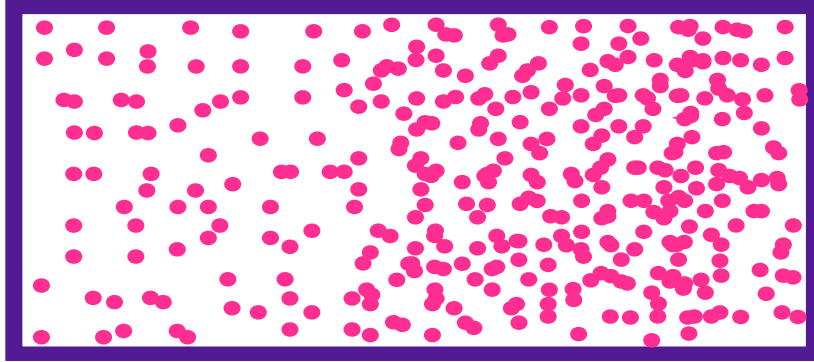
---

## ۲ معنای ماکروحالت و میکروحالت

وضعیت یک سیستم ماکروسکوپی با تعداد خیلی کمی از متغیرهای ماکروسکوپی مشخص می شود. این وضعیت را یک ماکروحالت می گوئیم. از طرف دیگر یک میکروحالت با تعیین تعداد بسیار زیادی پارامتر که وضعیت آن سیستم را از نقطه نظر میکروسکوپی تعیین می کنند مشخص می شود. ماکروحالت با متغیرهای ماکروسکوپی مشخص می شود و پارامترهای آن در آزمایشگاه عملاً قابل اندازه گیری است اما میکروحالت با

<sup>۱</sup>Ergodic Property

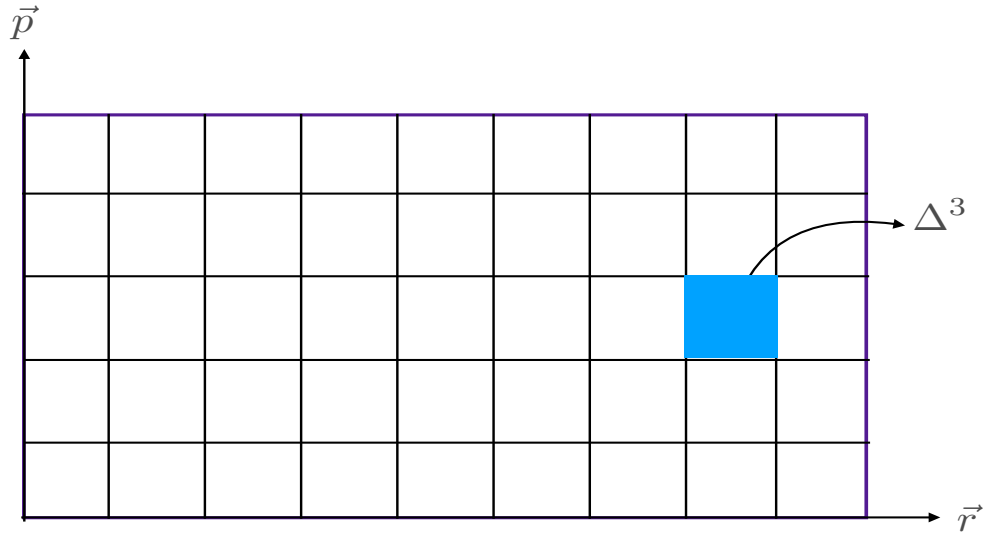
<sup>۲</sup>Mixing Property



شکل ۱: یک میکروحالت از یک گاز.

وضعیت تک تک ذرات مشخص می شود، بیشتر یک توصیف ذهنی است و ما نگران آن نیستیم که آیا این پارامترهای بسیار زیاد را می توانیم عملاً تعیین کنیم یا نه، شکل (۲). هم چنین میکروحالت ها بستگی به مدل میکروسکوپی و یا توصیف میکروسکوپی ای دارند که ما به کار می بریم و حال آنکه ماکروحالت بستگی به مدل میکروسکوپی ای که ما برای توصیف ذرات به کار می بریم ندارد. به عنوان ماکروحالت یک گاز همواره با حجم، تعداد ذرات و دمای آن مشخص می شود. اما توصیف میکروحالت های این سیستم بستگی به این دارد که ما در سطح ذرات مکانیک کوانتومی را به کار ببریم یا مکانیک کلاسیک را و چه درجه ای از دقت را نیز به کار ببریم. مثال های زیر می توانند این مفاهیم را روشن کنند.

■ برای یک گاز  $(E, N, V)$  یک ماکروحالت را مشخص می کند که در آن  $E, N, V$  به ترتیب حجم، تعداد ذرات و انرژی کل هستند. یک نحوه توصیف از میکروحالت های این سیستم این است که مکان و تکانه ذرات تک تک اتم ها را مشخص کنیم به این معنا که چندتایی  $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$  را تعیین کنیم. این نحوه ی توصیف میکروحالت نیازمند دقت بی نهایت در اندازه گیری مکان و تکانه ی تک تک ذرات است. از نقطه نظر فیزیک کلاسیک این امر بدون اشکال است. در چنین توصیفی بی نهایت میکروحالت وجود دارد که با متغیرهای پیوسته از نوع فوق مشخص می شوند.



شکل ۲: برای توصیف میکرواحالت‌ها می‌توانیم یک درجه تقریب قایل شویم به این معنا که مکان و تکانه هر ذره را با یک دقت معین در اینجا به اندازه  $\Delta^3$  مشخص کنیم.

می‌توانیم میکرواحالت‌ها را به شیوه‌های دیگری نیز مشخص کنیم. این شیوه که در آن تعداد میکرواحالت‌ها تبدیل به یک مجموعه شمارش پذیر می‌شود ناشی از این است که دقت بی‌نهایت هیچگاه امکان پذیر نیست. هم از نظر اصولی (با توجه به مکانیک کوانتومی) و هم از نظر عملی. فرض کنید که ما موقعیت مکان و تکانه یک ذره را در یک بعد بتوانیم با دقت  $\Delta$  اندازه‌گیری کنیم. یعنی

$$\Delta x \Delta p \geq \Delta \quad (۱)$$

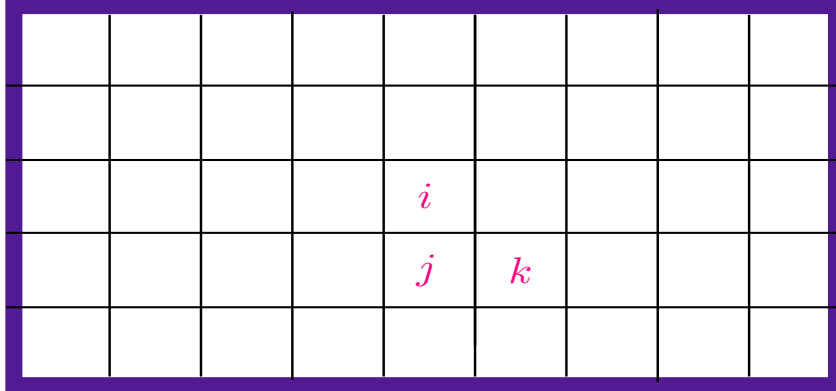
در این صورت خواهیم داشت:

$$\Delta \vec{r} \Delta \vec{p} \geq \Delta^3. \quad (۲)$$

در نتیجه می‌توانیم فضای فاز یک ذره را به سلول‌هایی با حجم  $\Delta^3$  تقسیم کنیم، شکل (۲).

دقت توصیف میکروسکوپی ما فقط در حدی است که بگوییم آیا یک ذره در درون یک سلول هست یا نه. بنابراین یک نحوه توصیف میکرواحالت این خواهد بود که بگوییم در هر سلول چند ذره هست. اگر سلول‌ها را شماره‌گذاری کنیم و قرار دهیم

$$n_i = \text{Number of particles in the } i - \text{th cell}, \quad (۳)$$

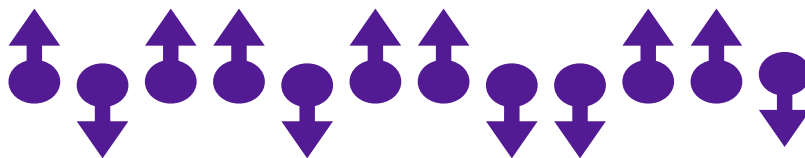


شکل ۳: برای توصیف میکرواحالت ها می توانیم فضای فاز را تبدیل به یک شبکه کنیم و بگوییم چه تعداد ذره در هر سلول وجود دارد. نیازی به این نیست که حجم هر سلول خیلی کوچک باشد. در اینجا هر میکرواحالت با اعداد  $(n_1, n_2, \dots, n_i, n_j, \dots)$  مشخص می شود. آنگاه یک توصیف از میکرواحالت ها آن خواهد بود که اعداد  $(n_1, n_2, n_3, \dots)$  را مشخص کنیم. هرچندتایی از نوع فوق یک میکرواحالت را مشخص می کند. شکل (۲).

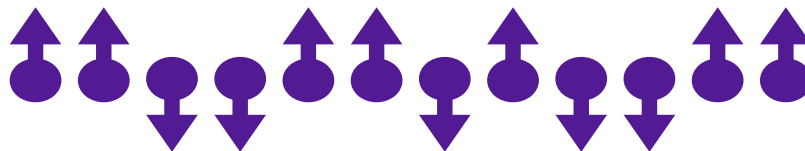
■ مجموعه ای از  $N$  اتم را در نظر بگیرید که هر کدام یک ممان مغناطیسی به اندازه  $\mu$  دارند. برای سادگی فرض می کنیم که ممان مغناطیسی فقط در راستای  $z$  قرار می گیرد و می تواند در این راستا جهت مثبت یا منفی اختیار کند. یک ماکرواحالت از این سیستم عبارت است از این که مغناطش کل این سیستم یعنی  $M$  را مشخص کنیم. یک میکرواحالت از این سیستم یعنی این که بگوییم که ممان مغناطیسی هر کدام از اتم ها در جهت مثبت قرار گرفته یا منفی. اگر برای نشان دادن جهت از یک متغیر  $s$  مطابق با قاعده زیر استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} s = 1 & \quad , \quad \text{positive direction} \\ s = -1 & \quad \text{negative direction,} \end{aligned} \quad (4)$$

آنگاه هر میکرواحالت از این سیستم با  $n$  تایی  $(s_1, s_2, \dots, s_N)$  مشخص می شود که در آن  $s_i$  جهت ممان مغناطیسی  $i$  ام را نشان می دهد. تعداد کل میکرواحالت ها در این سیستم برابر است با  $2^N$ . دو میکرواحالت مختلف از این سیستم در شکل (۲) نشان داده شده اند.



الف

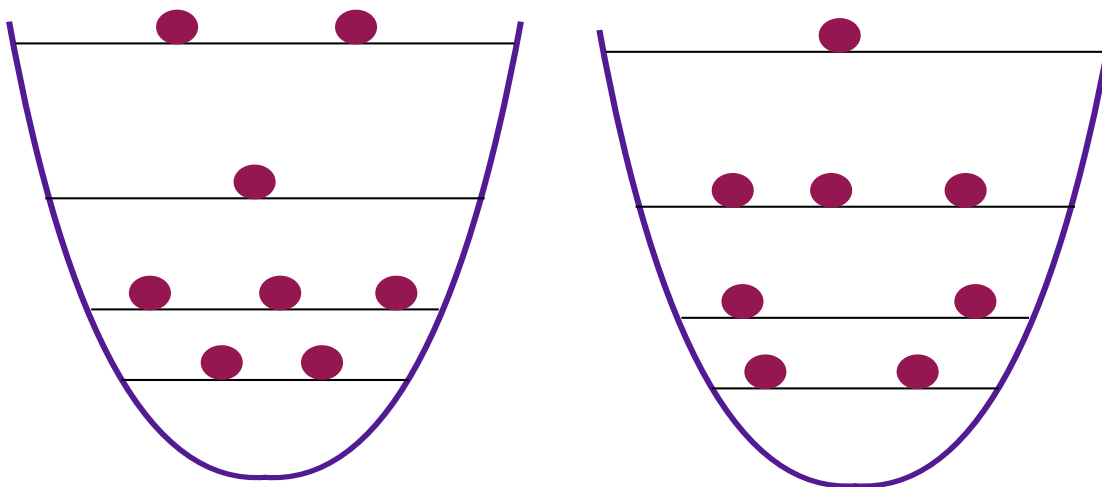


شکل ۴: دو میکروحالت مختلف از یک سیستم مغناطیسی که هر دو متناظر با یک مقدار از مغناطش کل هستند.

■ مجموعه ای از  $N$  ذره درون یک چاه پتانسیل یک بعدی در نظر بگیرید. سطوح انرژی این چاه را با  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_M$  نشان می دهیم. یک ماکروحالت از این سیستم با انرژی  $E$ ، تعداد ذرات  $N$  و حجم (در این جا طول  $L$ ) مشخص می شود. یک میکروحالت از این سیستم با این مشخص می شود که بگوییم در هر سطح انرژی چه تعداد ذره وجود دارد، یعنی اعداد  $(n_1, n_2, \dots, n_M)$  را مشخص کنیم. دو میکروحالت مختلف از این سیستم در شکل (۲) نشان داده شده اند.

### ۳ اصل اساسی مکانیک آماری

سوالی که پیش روی ماست این است که وقتی یک سیستم در یک ماکروحالت بخصوص است (مثلا با انرژی  $E$ ، تعداد ذرات  $N$  و حجم  $V$ ) این سیستم در کدام یک از بلیون ها بلیون میکروحالت متناظر با این ماکروحالت قرار دارد؟ پاسخ به این سوال را به هیچ وجه نمی توان از اصول اولیه مکانیک کلاسیک یا مکانیک کوانتومی به طور محکم و مستدل استخراج کرد. دو دلیل مقدماتی ای برای این ناتوانی می توان ارائه کرد.



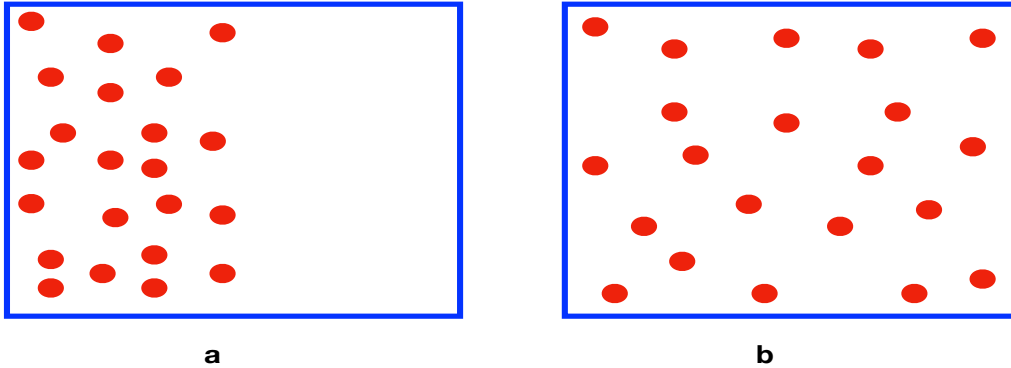
شکل ۵: دو میکرو حالت مختلف از یک مجموعه از ذرات که درون یک چاه پتانسیل قرار دارد.

نخست آنکه ما نمی توانیم معادلات حرکت مکانیک کوانتومی و کلاسیک را برای سیستم های شامل چند ذره نیز به طور دقیق حل کنیم تا چه رسد به سیستمی که متشکل از حدود  $10^{23}$  ذره است. حتی نمی توانیم شرایط اولیه مکان و تکانه ذرات یا تابع موج آنها را تعیین کنیم. هم چنین مثالهای متعدد در مکانیک نشان می دهند که معمولاً رفتار سیستم ها حتی با تعداد کمی درجه آزادی آشوبناک می شود به این معنا که پیش بینی رفتار آنها با گذشت زمان کاملاً غیر ممکن می شود. دلیل دوم آن است که ما معمولاً نمی توانیم نوع دقیق برهم کنش های بین ذرات را در یک سیستم ماکروسکوپی تعیین کنیم. در باره این دلیل دوم در آینده بیشتر سخن خواهیم گفت.

در غیاب این ترجیح متوسط به یک اصل بنیادی می شویم که تمامی مکانیک آماری بر آن مبتنی است. این اصل به نظر کاملاً موجه و معقول به نظر می رسد و به صورت زیر بیان می شود:

■ **اصل موضوع مکانیک آماری:** در حالت تعادل یک سیستم ماکروسکوپی تمام میکرو حالت های سازگار با قيود خارجی خود را با احتمال یکسان اشغال می کند.

هدف ما در این درس این است که از این اصل موضوع شروع کنیم و ساختمان مکانیک آماری را بر اساس آن بنا کنیم و مثال های متعددی را نیز



شکل ۶: دو میکروحالت مختلف از یک مجموعه از ذرات که درون یک جابه پتانسیل قرار دارد.

برای روشن شدن نتایج آن مطالعه کنیم.

ممکن است که فکر کنیم مساوی بودن احتمال برای دو میکروحالت نشان داده شده در شکل (؟؟) با شهود ما و تجربیات روزانه ما متناقض است زیرا سخت است که تصور کنیم میکروحالت یک گاز مثلاً گاز درون یک اتاق مثل میکروحالت نشان داده شده در شکل (؟؟) است. ولی نکته در این است که تعداد میکروحالت های خاص نظیر میکروحالت سمت چپ بسیار کمتر از میکروحالت های نظیر سمت راست در این شکل است. ما به این دلیل تمامی ذرات یک گاز را جمع شده در یک نیمه ی ظرف نمی بینیم که تعداد چنین میکروحالت هایی بسیار کم است.

■ تمرین: یک ظرف را به دو نیمه چپ و راست تقسیم کرده ایم که حجم آن دو باهم مساوی است. تعداد  $2N$  توپ یکسان را در نظر بگیرید.  $\Omega(N_1, N_2)$  را تعداد حالاتی بگیرید که می توانید  $N_1$  تا توپ را در نیمه چپ و  $N_2$  تا توپ را در نیمه راست این ظرف قرار دهید. مقادیر زیر را محاسبه کنید:

الف:

$$\Omega(11, 9), \quad \Omega(10, 10), \quad \Omega(20, 0)$$

ب: نسبت های

$$\frac{\Omega(19,1)}{\Omega(10,10)} \text{ و } \frac{\Omega(11,9)}{\Omega(10,10)} \text{ را حساب کنید.}$$

پ: نسبت های  $\frac{\Omega(N-1, N+1)}{\Omega(N, N)}$  و  $\frac{\Omega(N-2, N+2)}{\Omega(N, N)}$  را برای  $N = 100$  تخمین بزنید.

ت: با پذیرفتن اصل موضوع مکانیک آماری و تعریف  $P(N_1, N_2)$  به عنوان احتمال اینکه  $N_1$  توپ در نیمه چپ و  $N_2$  توپ در نیمه راست قرار بگیرند احتمالات زیر را حساب کنید:

$$P(10, 10), \quad P(11, 9), \quad P(12, 8)$$

---

## ۴ توضیح اصل اساسی مکانیک آماری، خاصیت ارگودیک و خاصیت آمیختگی

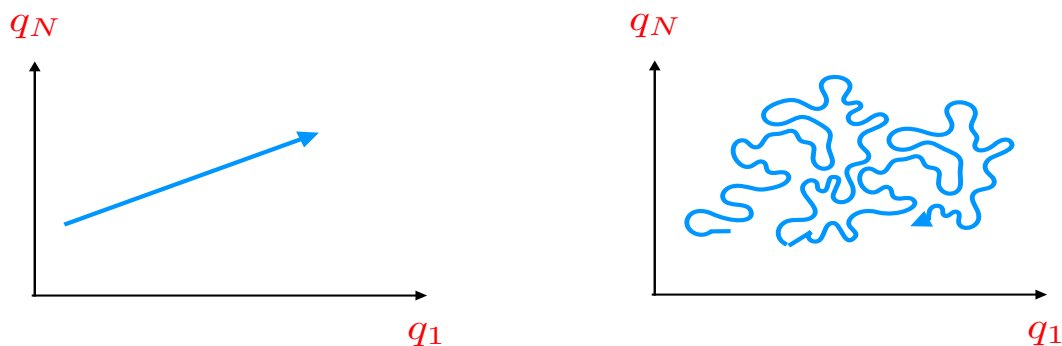
همانطور که از اسم آن پیداست مکانیک آماری مبتنی بر یک اصل است و این اصل را نمی توان از اصول اولیه مکانیک ثابت کرد. در این بخش سعی می کنیم که شرح دهیم چرا این اصل معقول و منطقی است و بیشتر در باره چرایی آن توضیح دهیم و بیان کنیم که مبنای آن چیست. نخست سعی می کنیم که مفهوم آنرا مبل را توضیح دهیم.

### ۱.۴ معنای آنرا مبل

فرض کنید که می خواهیم مقدار یک کمیت را که آن را با  $A$  برای یک دستگاه ماکروسکوپی اندازه گیری کنیم. برای روشنی فرض کنید که با سیستمی سروکار داریم که از  $N$  ذره تشکیل شده و میکرواحالت های آن با موقعیت و تکانه همه این ذرات مشخص می شود. بنابراین  $A$  تابعی از مختصات و تکانه های ذرات است، یعنی  $A = A(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$ . از آنجا که مکان و تکانه ذرات در طول زمان تغییر می کند، پس کمیت  $A$  نیز تابع زمان است و می بایست بنویسیم:

$$A(t) = A(q_1(t), \dots, q_N(t), p_1(t), \dots, p_N(t)).$$





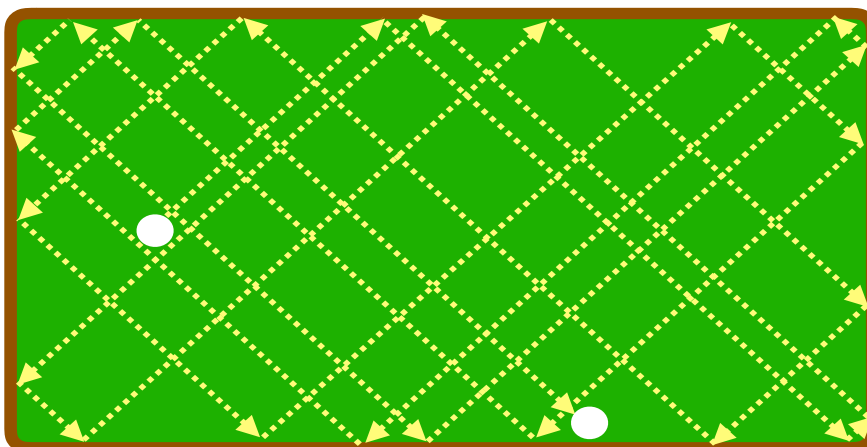
شکل ۷: شکل سمت چپ مسیر ذرات در اثر هامیلتونی ایده آل. شکل سمت راست مسیر ذرات در اثر هامیلتونی واقعی که شامل برهم کنش های باقی مانده نیز هست.

هر میکروحالت این سیستم در واقع با یک نقطه در یک فضای فاز  $6N$  بعدی توصیف می شود. حرکت ذرات گاز و برخورد آنها به دیواره ها و برخورد آنها با یکدیگر باعث حرکت زیگزاگی و فوق العاده ناهموار این نقطه در فضای فاز می شود. شکل (۴) این مسیر در مدتی که مشاهده ما از سیستم طول می کشد فرصت می کند که روی فضای فاز پخش شود. درست است که زمان مشاهده ما در مقیاس زندگی روزمره مان بسیار اندک است، اما این زمان در مقایسه با مقیاس های زمانی درون سیستم یعنی فاصله زمانی بین برخوردها بسیار طولانی است. بنابراین برای آنکه متوسط مقدار کمیت را حساب کنیم باید بنویسیم:

$$\langle A \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dq dp A(q(t), p(t)) dt \quad (5)$$

از آنجاییکه مسیر حرکت نقطه نماینده سیستم در زمان مشاهده تقریباً تمام فضای فاز را می پوشاند می توانیم انتگرال بالا را با یک انتگرال در فضای فاز به شکل زیر عوض کنیم:

$$\langle A \rangle = \int A(q, p) \rho(q, p) dq dp \quad (6)$$



شکل ۸: مسیر حرکت یک توپ بلیارد بعد از چند برخورد تقریباً همه سطح میز بلیارد را می پوشاند. این وضعیت برای هر شرایط اولیه ای (مکان و سرعت و زاویه حرکت توپ) رخ می دهد. تقریباً هیچ شرایط اولیه ای وجود ندارد که در آن مسیر توپ در یک قسمت خاص از میز بلیارد گیر کند.

که در آن تابع توزیع روی کل فضای فاز است. این که متوسط زمانی (۵) را می توان با متوسط روی فضای فاز یعنی (۶) جایگزین کرد فرض ارگودیک نام دارد. اثبات این فرض به صورت قرص و محکم برای یک دستگاه دلخواه بسیار دشوار است. برای این که خود را نسبت به درستی این فرض قانع کنید مسیر حرکت یک توپ بلیارد را در نظر بگیرید، شکل (۱۰۴).

فرض اساسی مکانیک آماری این است که برای یک سیستم کاملاً بسته این تابع توزیع یک تابع یکنواخت است و هیچ قسمتی از فضای فاز بر قسمت دیگرش ترجیح ندارد. بنابراین رابطه بالا به صورت زیر در می آید:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\Omega} \int A(q, p) dq dp \quad (7)$$

که در آن انتگرال روی ناحیه ای از فضای فاز تعریف شده است که با قيود خارجی سیستم یعنی انرژی ثابت و حجم ثابت سازگار است و  $\Omega$  نیز حجم این ناحیه است.

ممکن است از خود سوال کنیم چه چیزی باعث می شود که یک سیستم که تحت قيود خارجی معین است دائماً از یک میکروحالت به یک

میکرواحالت دیگر برود؟ مثلاً اگر یک گاز ایده آل را با انرژی معین در نظر بگیریم، علی القاعده می‌بایست هر اتم یا مولکول از گاز انرژی اش را حفظ کند زیرا این اتم به دلیل ایده آل بودن گاز تنها با دیواره های ظرف برخورد می‌کند و این برخوردها نیز الاستیک هستند. اگر از توصیف کوانتومی استفاده کنیم این سوال به این صورت بیان می‌شود که چه چیزی باعث می‌شود که اتم های یک گاز ایده آل سطوح انرژی خود را تغییر دهند؟ پاسخ این است که همواره برهم کنش های بسیار کوچک باقیمانده ای<sup>۳</sup> هستند که ما قادر به شناسایی دقیق و کنترل آنها نیستیم. این برهم کنش های باقیمانده کوچک که ما در توصیف برهم کنش های موجود در سیستم و هامیلتونی توصیف کننده ی آن وارد نکرده ایم همان چیزی است که باعث گشت و گذار سیستم بین حالت های مختلف می‌شود. بنابراین وقتی که می‌گوییم یک گاز ایده آل با هامیلتونی

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \dots + \frac{P_N^2}{2m} \quad (۸)$$

داریم، در واقع قسمتی از هامیلتونی را که مربوط به برخوردهای بسیار کوتاه و سریع بین ذرات گاز با یکدیگر و هم چنین بین ذرات گاز و دیواره هاست کنار گذاشته ایم. در واقع اگر مسیر حرکت ذره نماینده یک گاز را در فضای فاز با این هامیلتونی رسم کنیم چیزی نیست جز یک خط راست زیرا تکانه ذرات هیچ تغییری نمی‌کند و مکان ذرات نیز با سرعت ثابت تغییر می‌کند. اما در واقع هامیلتونی کامل این گاز به صورت زیر است:

$$H_{real} = H_{ideal} + H_{res} \quad (۹)$$

و یا

$$H_{real} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i^2 + H_{res}, \quad (۱۰)$$

که در آن  $H_{res}$  نشان دهنده همه برهم کنش های کوچکی است که گنجانندن آنها در هامیلتونی ایده آل نه ممکن است و نه مفید. بجای اینکه معادله حرکت را برای هامیلتونی کامل به صورت دقیق حل کنیم فکر می‌کنیم که این برخوردهای مکرر بین ذرات و بین ذرات و دیواره ها که با فاصله های زمانی فوق العاده کوتاه رخ می‌دهد مسیر حرکت ذره نماینده را از یک خط راست تبدیل به یک خط فوق العاده زیگزاکی و نامنظم می‌کند که در فاصله کوتاهی در فضای فاز پخش می‌شود. این وضعیت در شکل های ۱.۴ و ۱.۴ نشان داده شده است.

■ مثال: مقیاس زمانی ای که طول می‌کشد تا ما هر کمیت میکروسکوپی را اندازه بگیریم، در مقایسه با مقیاس های زمانی ای که یک سیستم در بین میکرواحالت های خود حرکت کند، خیلی خیلی بزرگ است. به عنوان مثال در یک گاز سرعت متوسط حرکت مولکول ها از مرتبه

<sup>۳</sup>Residual Interactions

$10^{2-3} m/s$  و فاصله متوسط مولکول ها از هم در شرایط متعارف ( دمای اتاق و فشار اتمسفر) در حدود ۳۰ آنگستروم است. بنابراین فاصله زمانی متوسط برخوردها از مرتبه  $10^{-11-12} sec \sim \frac{30 \times 10^{-10}}{10^{2-3}} \sim 10^{-11-12}$  است. هر اندازه گیری یک کمیت میکروسکوپی اگر خیلی سریع هم باشد از مرتبه  $10^{0-1}$  ثانیه طول می کشد. در این مدت ذرات گاز  $10^{12-13}$  برخورد انجام داده اند که به این معناست که گاز به تعدادی از این مرتبه میکروحوالت های خود را عوض کرده است.

چرا باید برای توصیف یک سیستم از مفهوم احتمال استفاده کنیم؟ مگر نه این است که احتمال وقتی معنا دارد که ما یک آزمایش معین انداختن سکه را بارها و بارها تکرار کنیم؟ یا این که آزمایش خود را با تعداد بسیار زیادی سکه های یکسان انجام دهیم؟ چگونه می توان وقتی که تنها با یک سیستم مثل یک ظرف گاز، یا یک ماده ی مغناطیسی، یک ماده دی الکتریک و نظایر آن سر و کار داریم از مفهوم احتمال استفاده کنیم؟ پاسخ این سوال در فرض ارگودیک<sup>۴</sup> نهفته است. فرض ارگودیک می گوید که اگر به اندازه کافی صبر کنید، یک سیستم به هر اندازه که بخواهید به هر میکروحوالت خود نزدیک خواهد شد. بیان دقیق این اصل مستلزم آن است که اندازه ی «کافی» برای زمان و «میزان نزدیکی به میکروحوالت» به صورت دقیق تعریف شوند، کاری که خارج از چارچوب درسی ماست. نکته مهم آن است که می توانیم فرض کنیم که سیستم عملاً همه ی این میکروحوالت ها را اشغال می کند. شکل (۱.۴).

## ■ قضیه لیوویل

یک سیستم هامیلتونی با  $N$  درجه آزادی را در نظر می گیریم. نقطه نماینده این سیستم در یک فضای فاز حرکت می کند. هامیلتونی این سیستم به صورت زیر است

$$H = H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \quad (11)$$

و همه مختصه ها نیز در روابط کروسه پواسون زیر صدق می کنند.

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (12)$$

یک آنزامل از سیستم های مشابه را در نظر می گیریم که نقطه نماینده هرکدام از اعضای این آنزامل در فضای فاز قرار گرفته و مطابق با معادلات حرکت هامیلتونی حرکت می کند. می دانیم که اعضای این آنزامل بسیار زیاد هستند. بنابراین مجموعه این نقاط را می توان به صورت یک سیال در نظر گرفت که در فضای فاز حرکت می کند. از آنجا که در طول حرکت مقدار هامیلتونی یک ثابت حرکت است،

<sup>۴</sup>Ergodic Hypothesis

این سیال روی یک سطح ثابت با معادله  $H(q, p) = E$  در فضای فاز حرکت می کند. دقت کنید که در اینجا و در ادامه این بحث نقطه  $(q, p)$  به طور اختصار برای نشان دادن وضعیت تمام مختصه ها و تکانه ها به کار می رود. می خواهیم ثابت کنیم که این سیال یک سیال تراکم ناپذیر است، یعنی چگالی آن در طول حرکت ثابت می ماند و این سیال متراکم یا رقیق نمی شود. برای این کار به معادلات حرکت هامیلتونی توجه می کنیم که بر مبنای آن:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (13)$$

چگالی سیال را می توانیم به شکل زیر بنویسیم. این چگالی که آن را با

$$\rho(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \quad (14)$$

نمایش می دهیم در واقع نشان دهنده تعداد نقاط آزمابل است که در واحد حجم از فضای فاز قرار دارند. به عبارت بهتر:

$$\rho(q, p) dq dp = dn \quad (15)$$

که در آن  $dq dp \equiv dq_1 dq_2 \dots dq_N dp_1 dp_2 \dots dp_N$  نشان دهنده المان حجم در فضای فاز و  $dn$  نشان دهنده تعداد نقاطی از فضای فاز است که در این المان حجم قرار دارد. از آنجا که این نقاط حرکت می کنند چگالی  $\rho(q, p)$  هم نسبت به نقطه نقطه فضا و هم نسبت به زمان تغییر می کند. بنابراین باید بنویسیم:

$$\rho = \rho(q, p, t). \quad (16)$$

در اینجا می بایست بین دو نوع مشتق زمانی فرق قایل شد. عبارت  $\frac{\partial \rho(q, p, t)}{\partial t}$  نشان دهنده این است که در یک نقطه از فضای فاز بایستیم و تغییرات زمانی چگالی را ثبت کنیم. این تغییرات می تواند غیر صفر باشد. درک آن هم ساده است. می توانید تصور کنید که در نقطه ای از فضای فاز ایستاده اید و در یک لحظه سیال در آن نقطه وجود نداشته است و یک لحظه بعد سیال به آن نقطه می رسد و شما خیس می شوید. در این صورت تغییرات چگالی سیال نسبت به زمان مسلماً مقداری غیر صفر است. اما عبارت  $\frac{d\rho(q, p, t)}{dt}$  به معنای این است که شما همراه سیال حرکت می کنید و چگالی سیال را در مسیر حرکت اش اندازه می گیرید. در این عبارت  $q$  و  $p$  نیز تابع زمان هستند و مطابق معادلات هامیلتون تغییر می کنند و در واقع باید نوشت:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho(q(t), p(t), t)}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt}, \quad (17)$$

که البته مطابق معمول روی اندیس های تکراری در سمت راست جمع زده شده است. آنچه که می خواهیم نشان دهیم این است که این تغییرات صفر است. برای این کار به این نکته کلیدی و مهم توجه می کنیم که تعداد کل نقاط انزامل ثابت است. از این تعداد نه نقطه ای کم می شود و نه به آن اضافه می شود. بنابراین مثل هر کمیت پایسته دیگری یک رابطه پایستگی بر چگالی انزامل ها حاکم است. یعنی می توان یک رابطه به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (18)$$

که در آن  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$  نشان دهنده جریان سیال است. دقت کنید که شکل بردار سرعت به صورت زیر است:

$$\mathbf{v} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_N).$$

در عبارت بالا از معادلات هامیلتون قرار می دهیم و به رابطه زیر می رسم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \frac{\partial H}{\partial p_i})}{\partial q_i} - \frac{\partial(\rho \frac{\partial H}{\partial q_i})}{\partial p_i} = 0 \quad (19)$$

با اعمال مشتق ها خواهیم داشت:

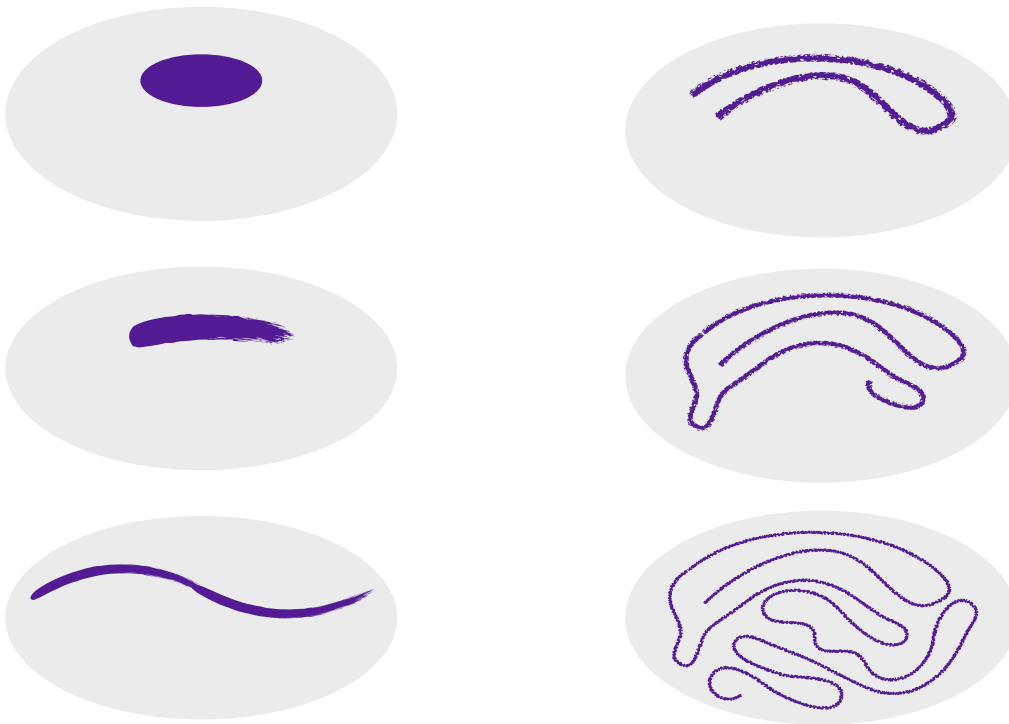
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \rho \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \rho \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} = 0 \quad (20)$$

و یا پس از ساده کردن:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \dot{p}_i = 0 \quad (21)$$

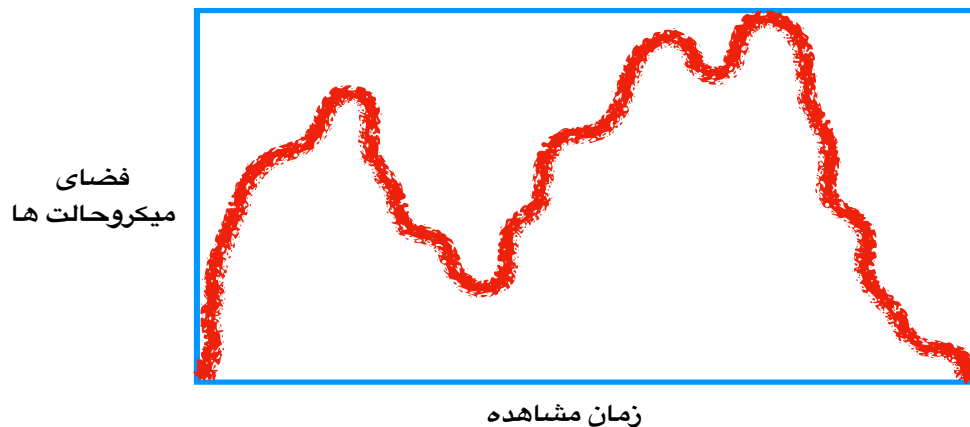
که در واقع چیزی نیست جز:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (22)$$



شکل ۹: آزمایشی که نشان دهنده حرکت سیستم های هامیلتونی در فضای فاز است یک سیال تراکم ناپذیر را تشکیل می دهد. این سیال مساحت اش حفظ می شود ولی شکل اش مرتب کشیده تر می شود تا جاییکه مثل یک رشته اسپاگتی تمام فضای فاز را پر می کند. شکل ها از بالای سمت چپ تا پایین سمت راست مراحل مختلف کشید تحول زمانی را نشان می دهند. . .

این قضیه که به قضیه لیوویل مشهور است، در واقع بیان می کند که وقتی به همراه سیال حرکت می کنیم چگالی آن را ثابت می بینیم. این قضیه نشان می دهد که سیال در فضای فاز مثل یک قطره جوهر در آب پخش نمی شود. چگونه ممکن است این سیال هم در فضای فاز پخش شود و هم چگالی آن ثابت باقی بماند؟ پاسخ اش را می توان در شکل (۱.۴) دید. مساحت سطحی که سیال اشغال می کند همیشه ثابت و در نتیجه چگالی آن نیز ثابت است اما این شکل این لکه یا شکل این سطح به مرور تغییر کرده، رشته رشته شده و نهایتاً تمام سطح را در بر می گیرد. این خاصیت آمیختگی نام دارد. به این ترتیب آمیختگی باعث می شود که خاصیت ارگودیک با تراکم ناپذیری سیال سازگار باشد.



شکل ۱۰: این منحنی نشان می دهد که چرا می توانیم متوسط روی مسیر حرکت را در طول زمان با متوسط روی فضای فاز عوض کنیم.

## ۵ استخراج ترمودینامیک از آنزامل میکروکانونیک

تا کنون همه توجه ما معطوف به این بوده که اصل اساسی مکانیک آماری را بفهمیم. حالا نوبت آن است که ببینیم چگونه می توانیم از آنزامل میکروکانونیک برای استخراج خواص ترمودینامیکی یک دستگاه ماکروسکوپی استفاده کنیم. برای مثال یک گاز یا سیال را در یک سیستم بسته در نظر بگیرید که متغیرهای ماکروسکوپی اش انرژی، حجم و تعداد ذرات باشد. هرگاه که در این دستگاه مقدار کمی مثل  $O$  را اندازه می گیریم (با توجه به اینکه سیستم مورد نظر ما در میکروحالات های متعدد و بی شمار قرار می گیرد) مثل آن است که این کمیت را برای کپی های متعدد اندازه گیری کرده و متوسط آن را به عنوان نتیجه آزمایشگاهی و تجربی اختیار می کنیم. یعنی قرار می



دهیم،

$$O = \frac{1}{N} \sum_i O_i$$

که در آن  $O_i$  مقدار کمیت  $O$  برای وقتی است که سیستم در میکروحالت  $i$  ام است. این مجموعه ذهنی را یک آنزامل میکروکانونیک<sup>۵</sup> می خوانیم. پس از این مقدمات آماده ایم که به استفاده از اصل بنیادی مکانیک آماری بپردازیم.

نکته ای که در مورد تعداد میکروحالت ها مهم است این است که تعداد آنها با افزایش تعداد ذرات به شدت و به صورت نمایی رشد می کند. این موضوع را می توان در مثال های متعددی که در پی می آید به وضوح دید. بنابراین رابطه  $\Omega$  و تعداد ذرات از نوع  $\alpha \sim \Omega$  است. دقت کنید که در اینجا  $N$  از مرتبه عدد آوگادروست که نشان می دهد این تابع به چه شدتی صعودی است. در نتیجه آن خواهیم داشت  $\ln \Omega \sim N \ln \alpha$  در این رابطه  $\alpha$  کمیتی است که بر حسب قیود خارجی نظیر انرژی  $E$ ، حجم  $V$  و نظایر آن مشخص می شود.

کمیت  $\ln \Omega$  تابعی است از قیود خارجی و ماکروسکوپی ای که بر سیستم بسته حاکم است. برای یک سیستم بسته مقدار انرژی ثابت و مشخص است. بنابراین  $\ln \Omega$  حتماً تابع  $E$  و  $N$  است. برای یک گاز  $\ln \Omega$  تابع حجم نیز خواهد بود. برای آنکه نقش  $\ln \Omega$  را بفهمیم دو سیستم ۱ و ۲ را در نظر می گیریم که با یکدیگر مبادله انرژی می کنند. سیستم (۱+۲) یک سیستم بسته و در حال تعادل ترمودینامیکی است. طبیعاً بخش های ۱ و ۲ نیز در حال تعادل ترمودینامیکی با خود و با یکدیگر هستند. کمیت های ماکروسکوپی این دو سیستم ثابت و است و تغییر نمی کند. اگر چه انرژی کل این مجموعه مقدار ثابت  $E$  است ولی سیستم های یک و دو علی الاصول می توانند هر انرژی ای داشته باشند به شرطی که مجموع آنها مقدار ثابت  $E$  باشد. سوالی که با آن روبرو هستیم آن است که در حالت تعادل انرژی بین این دو سیستم چگونه توزیع می شود.

ماکروحالتی را در نظر بگیرید که در آن انرژی سیستم ۱ برابر با  $E_1$  و انرژی سیستم ۲ برابر با  $E_2$  است. تعداد میکروحالت های وابسته به این ماکروحالت برابر است با:

$$\Omega_1(E_1)\Omega_2(E_2) = \Omega_1(E_1)\Omega_2(E - E_1) \quad (23)$$

و تعداد کل میکروحالت ها برابر است با:

$$\Omega = \sum_{E_1} \Omega_1(E_1)\Omega_2(E - E_1). \quad (24)$$

بنابر اصل موضوع مکانیک آماری، حالت تعادل حالتی است که تعداد میکروحالت های وابسته به آن از بقیه حالت ها بیشتر باشد. بنابراین برای پیدا کردن حالت تعادل کافی است که ببینیم عبارت  $\Omega_1(E_1)\Omega_2(E - E_1)$  به ازای کدام  $E_1$  مقدار بیشینه به خود می گیرد. هم به دلیل این که

<sup>۵</sup>Microcanonical Ensemble

لگاریتم تابعی صعودی است و هم به دلیل اینکه تابع  $\ln \Omega$  نسبت به خود  $\Omega$  تابع خیلی هموارتر و آهسته تری از  $E$  است، مشتق لگاریتم عبارت فوق را مساوی با صفر قرار می دهیم تا شرط تعادل را پیدا کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial E_1} (\ln \Omega_1(E_1) + \ln \Omega_2(E - E_1)) = 0 \quad (25)$$

که از آن نتیجه می شود

$$\frac{\partial \ln \Omega_1(E_1)}{\partial E_1} + \frac{\partial \ln \Omega_2(E - E_1)}{\partial (E - E_1)} \frac{\partial (E - E_1)}{\partial E_1} = 0 \quad (26)$$

بنابر این شرط تعادل به صورت زیر در می آید:

$$\left( \frac{\partial \ln \Omega_1(E_1)}{\partial E_1} \right)_{N_1, V_1} = \left( \frac{\partial \ln \Omega_2(E_2)}{\partial E_2} \right)_{N_2, V_2} \quad (27)$$

بنابراین از اصل موضوع مکانیک آماری استفاده کردیم و نشان دادیم که در نقطه تعادل کمیت  $\ln(\Omega_1(E_1)\Omega_2(E - E_1))$  باید بیشینه شود و این تقاضا منجر به این شد که دو سیستم که می توانند با هم تبادل انرژی کنند وقتی به حال تعادل می رسند که کمیت  $\frac{\partial \ln \Omega}{\partial E}$  برای آنها مساوی باشد. برای این که اهمیت کمیت  $\ln \Omega(E, V)$  را بفهمیم، این بار دو سیستم را در کنار هم قرار می دهیم که با یک پیستون متحرک بدون اصطکاک از هم جدا شده اند. بازهم مجموعه دو سیستم یک سیستم بسته است. بنابراین دو سیستم ۱ و ۲ علاوه بر انرژی حجم نیز مبادله می کنند و بر روی یکدیگر کار انجام می دهند. حال سوال می کنیم که حالت تعادل کدام است. این بار بستگی  $\Omega$  را به  $E$  و  $V$  هر دو می نویسیم. مطابق با اصل موضوع اساسی، حالت تعادل، آن ماکروحالتی است که بیشترین تعداد میکروحالت های متناظر را داشته باشد. بنابراین  $\ln(\Omega_1(E_1, V_1)\Omega_2(E - E_1, V - V_1))$  را بیشینه می کنیم. با مشتق گیری نسبت به هر دو متغیر  $E_1$  و  $V_1$  و استفاده از رابطه ی ۱ این بار رابطه اضافه زیر را نیز بدست می آوریم:

$$\left( \frac{\partial \ln \Omega_1}{\partial V_1} \right)_{N_1, E_1} = \left( \frac{\partial \ln \Omega_2}{\partial V_2} \right)_{N_2, E_2} \quad (28)$$

هرگاه آزمایش سومی را انجام دهیم که در آن سیستم های ۱ و ۲ با دیواره ای از هم جدا شده باشند که علاوه بر مبادله انرژی و حجم، بتوانند ذره نیز با هم مبادله کنند با تکرار استدلال فوق به این نتیجه میرسیم که در حال تعادل شرط

$$\left( \frac{\partial \ln \Omega_1}{\partial N_1} \right)_{E_1, V_1} = \left( \frac{\partial \ln \Omega_2}{\partial N_2} \right)_{E_2, V_2} \quad (29)$$

نیز می بایست برقرار باشد.

اما می دانیم که وقتی دو سیستم در شرایط فوق در کنار هم قرار می گیرند نهایتاً در وضعیتی به حال تعادل می رسند که دما، فشار و پتانسیل شیمیایی آنها با هم مساوی باشد، یعنی

$$T_1 = T_2, \quad P_1 = P_2, \quad \mu_1 = \mu_2. \quad (30)$$

از روابط ترمودینامیکی می دانیم که

$$dE = TdS - PdV + \mu dN \quad (31)$$

و یا

$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{P}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN, \quad (32)$$

و در نتیجه مساوی بودن  $P, T$  و  $\mu$  برای سیستم های ۱ و ۲ در حالت تعادل به این معنی است که:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S_1}{\partial E_1}\right)_{N_1, V_1} &= \left(\frac{\partial S_2}{\partial E_2}\right)_{N_2, V_2}, \\ \left(\frac{\partial S_1}{\partial V_1}\right)_{N_1, E_1} &= \left(\frac{\partial S_2}{\partial V_2}\right)_{N_2, E_2}, \\ \left(\frac{\partial S_1}{\partial N_1}\right)_{E_1, V_1} &= \left(\frac{\partial S_2}{\partial N_2}\right)_{E_2, V_2}. \end{aligned} \quad (33)$$

از مقایسه روابط ۱، ۲، و ۳ و توجه به این که  $V, E, N$  متغیرهای مستقل هستند نتیجه می گیریم که  $S$  می بایست ضریب ثابتی از  $\ln \Omega$  باشد و این ضریب می بایست مستقل از  $V, E, N$  باشد. هم چنین از آنجایی که این شرایط تعادل را می توانستیم برای هر دو سیستم متفاوتی بنویسیم، نتیجه می گیریم که این ضریب می بایست به طور کلی مستقل از نوع سیستم ها و در نتیجه می بایست یک ثابت جهانی باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$S = k \ln \Omega. \quad (34)$$

این رابطه می توانست به صورت زیر نیز نوشته شود

$$S = k \ln \Omega + c \quad (35)$$

ولی ثابت  $c$  می بایست برابر با صفر انتخاب شود که با تصویری که ما از آنتروپی به عنوان میزان بی نظمی داریم همخوان باشد، زیرا انتظار داریم در شرایطی که تعداد میکرواحالت های در دسترس سیستم برابر با ۱ باشد، آنتروپی مساوی صفر شود. رابطه (۳۴) یک رابطه مهم و اساسی است و بیان می کند که هرگاه بتوانیم تعداد میکرواحالت ها را بدست آوریم می توانیم از آنجا آنتروپی و در نتیجه همه کمیت های ترمودینامیکی را محاسبه کنیم. اغلب اوقات لازم نیست مقدار دقیق  $\Omega$  را محاسبه کنیم و دانستن نحوه بستگی آن به متغیرهای ماکروسکوپی کفایت می کند. در بخش آینده با مثال های متعددی آشنا خواهیم شد.

## ۶ مثال هایی از محاسبه با آنزامل میکروکانیک

اینک به بررسی مثال های مختلف می پردازیم.

### ۱.۶ گاز ایده آل

■ مثال: گاز ایده آل

همیلتونی این گاز برابر است با:

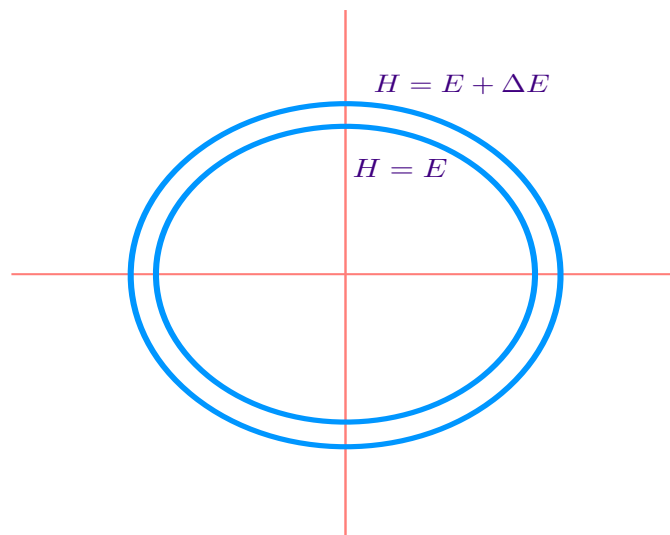
$$H_0 = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} \quad (36)$$

پراکنده کنند. فضای فاز چنین سیستمی یک فضای  $6N$  بعدی با مختصات  $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$  است. فرض می کنیم که انرژی گاز با دقت  $\Delta E$  تعیین شده است و مقدار آن بین  $E$  و  $E + \Delta E$  است. در این صورت حجمی از فضای فاز که در دسترس گاز است عبارت است از

$$\mathcal{V} = \int_{E \leq H_0 \leq E + \Delta E} d^N \vec{r} d^N \vec{p}. \quad (37)$$

اگر این ناحیه را به سلول های کوچک تقسیم کنیم، تعداد میکرواحالت ها متناسب با این حجم خواهد بود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\Omega(E, \Delta E, N, V) = C_N \int_{E \leq H_0 \leq E + \Delta E} d^N \vec{r} d^N \vec{p}, \quad (38)$$



شکل ۱۱: قسمتی از فضای فاز که در دسترس گاز ایده آل است منطقه بین دو کره است.

که در آن  $C_N$  یک ضریب تناسب است. خواهیم دید که این ضریب در استخراج مشخصات ترمودینامیکی مثل معادله حالت اهمیت ندارد. انتگرال گیری روی  $d^N \vec{r}$  ضریب  $V^N$  را تولید می کند که در آن  $V$  حجم ظرفی است که گاز در آن محصور شده است. انتگرال روی تکانه ها حجم ناحیه ای را مشخص می کند که محصور بین دو پوسته ی کروی در فضای  $3N$  بعدی است، شکل (۳۹). معادله  $H = E$  یا  $p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{3N}^2 = 2mE$  معادله سطح یک کره است که در فضای  $3N$  بعدی قرار گرفته و شعاع آن  $(2mE)^{\frac{1}{2}}$  است.

اگر حجم یک کره  $N$  بعدی به شعاع  $R$  را با  $V_N(R)$  نشان دهیم و سطح یک پوسته کروی  $N$  بعدی به همان شعاع را با  $S_N(R)$  نشان

دهیم، داریم:

$$V_N(R) = A_N R^N, \quad (39)$$

و

$$S_N(R) = \frac{dV_N(R)}{dR} = N A_N R^{N-1}, \quad (40)$$

که در آن  $A_N$  ضریب عددی مستقل از  $R$  است که می توان آن را با محاسبه انتگرال های مربوطه بدست آورد ولی بازهم در تعیین خواص

ترمودینامیکی اهمیتی ندارد. با این مقدمات خواهیم داشت:

$$\Omega(E, \Delta E, N, V) = A \Delta E V^N S_{3N}(\sqrt{2mE}) \quad (41)$$

که در نوشتن این رابطه تمامی ضرایب عددی ای را که ربطی به  $E$  و  $V$  ندارند در ضریب  $A$  جمع کرده ایم. بنابراین

$$\Omega(E, \Delta E, N, V) = A' \Delta E V^N (2mE)^{\frac{3N}{2}-1} \quad (42)$$

و در نتیجه

$$S = k \ln \Omega = k \left( N \ln V + \frac{3N}{2} \ln E + \dots \right) \quad (43)$$

که منظور از  $\dots$  جملاتی هستند که ربطی به  $E$  و  $V$  ندارند. بنابراین بدست می آوریم:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_{N,V} = \frac{1}{T} \quad (44)$$

و از آنجا

$$\frac{3N}{2} k \frac{1}{E} = \frac{1}{T}, \quad \rightarrow \quad E = \frac{3N}{2} kT. \quad (45)$$

هم چنین خواهیم داشت:

$$\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{N,E} = \frac{P}{T} \quad \rightarrow \quad kN \frac{1}{V} = \frac{P}{T}, \quad \rightarrow \quad PV = NkT. \quad (46)$$

مقایسه با معادله حالت برای گاز کامل یعنی رابطه  $PV = nRT$  ثابت جهانی  $k$  را تعیین می کند:

$$k = \frac{R}{N_0} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ Joules/Kelvin}. \quad (47)$$

این ثابت به افتخار لودویگ بولتزمان<sup>۶</sup> ثابت بولتزمن نامیده می شود.

به این ترتیب بدون محاسبه دقیق حجم کره توانستیم هم انرژی گاز و هم معادله حالت را تعیین کنیم. در مثال هایی که در پی می آید و همگی متکی بر استفاده از آنرا بل میکروکانونیک هستند، همیشه همین روش را دنبال می کنیم. یعنی حجم ناحیه در دسترس از فضای فاز را تعیین می

Ludwig Boltzman<sup>۶</sup>

کنیم. ضرایب عددی ای که ناشی از سلول بندی این ناحیه هستند و هم چنین ضرایب عددی ای را که ناشی از محاسبه دقیق حجم هستند، همه را در یک ضریب  $A$  جمع می کنیم. دانستن مقدار دقیق این ضریب برای استخراج معادله حالت و انرژی لازم نیستند. البته بدون دانستن این ضرایب عددی دانستن مقدار آنتروپی و بستگی آن به تعداد ذرات نیز ممکن نیست. روش محاسبه دقیق آنتروپی را به ضمیمه های این فصل موکول می کنیم.

## ۲.۶ گاز ایده آل فوق نسبیتی

■ گاز ایده آل نسبیتی :

برای گازی که بسیار داغ شده و سرعت ذرات آن قابل مقایسه با نور شده باشد، مثل گاز در یک پلاسما یا گازی که در لایه های یک ستاره قرار دارد، رابطه انرژی و تکانه برای هر ذره بجای  $E = \frac{p^2}{2m}$  به صورت  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$  نوشته می شود. هرگاه  $p \gg mc$  باشد، می توان نوشت:

$$E \approx pc \quad (48)$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$H \approx p_1 c + p_2 c + \dots + p_N c. \quad (49)$$

می دانیم که

$$\Omega(E, \Delta E, N, V) \approx \Delta E \frac{\partial}{\partial E} \tilde{\Omega}(E, V, N) \quad (50)$$

که در آن

$$\tilde{\Omega} = \frac{1}{h^{3N}} V^N \int_{0 \leq p_1 + p_2 + \dots + p_N \leq \frac{E}{c}} d^N \vec{p}. \quad (51)$$

انتگرال روی تکانه ها حجم محصور بین دو هرم  $3N$  بعدی را نشان می دهد.

داریم:

$$\tilde{\Omega}(E, N, V) = \frac{1}{h^{3N}} V^N \int_{0 \leq p_1 + p_2 + \dots + p_N \leq \frac{E}{c}} p_1^2 dp_1 p_2^2 dp_2 \dots p_N^2 dp_N d\Omega_1 d\Omega_2 \dots d\Omega_N. \quad (52)$$

انتگرال روی  $d\Omega_i$  ها  $(4\pi)^N$  می دهد و تغییر متغیر  $p_i = \frac{E}{c} x_i$  را تبدیل می کند به :

$$\tilde{\Omega}(E, V, N) = \frac{1}{h^{3N}} V^N (4\pi)^N \left(\frac{E}{c}\right)^{3N} \int_{0 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_N \leq 1} x_1^2 x_2^2 \dots x_N^2 dx_1 dx_2 \dots dx_N. \quad (53)$$

اگر انتگرال آخری را با  $A_N$  نشان دهیم خواهیم داشت:

$$\tilde{\Omega}(E, V, N) = A_N (4\pi V)^N \left(\frac{E}{hc}\right)^{3N}. \quad (54)$$

و از آنجا

$$S = k \ln \Omega = k(N \ln V + 3N \ln E + \dots) \quad (55)$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V, N} &= \frac{1}{T} \quad \rightarrow \quad E = 3NkT, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E, N} &= \frac{P}{T} \quad \rightarrow \quad PV = NkT. \end{aligned} \quad (56)$$

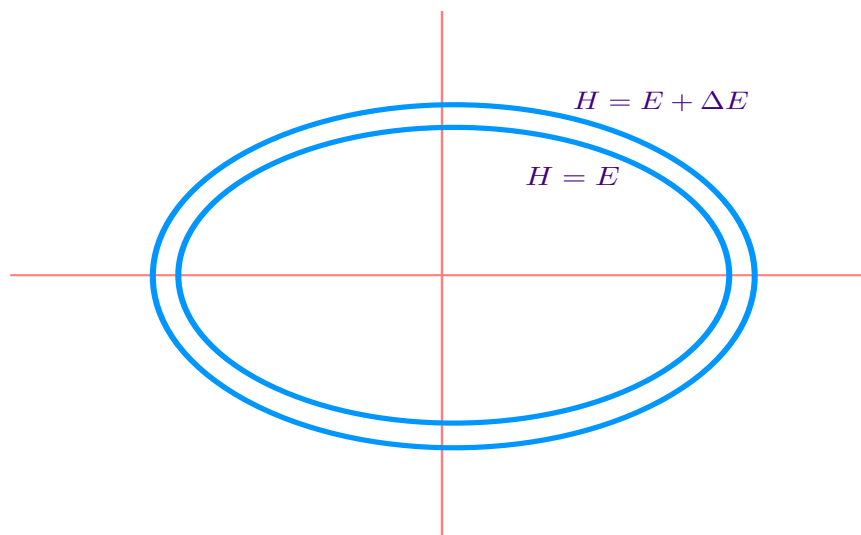
بنابراین گاز فوق نسبتی از همان معادله حالت گاز ایده آل تبعیت می کند ولی رابطه انرژی آن تغییر یافته است.

### ۳.۶ مدل ساده از یک جامد مغناطیسی

■ مدل ساده ای برای ماده مغناطیسی:

یک ماده پارامغناطیس متشکل از دوقطبی های مغناطیس دائمی است. اندازه این دوقطبی ها مقدار  $\mu$  است ولی جهت آن ها در غیاب میدان مغناطیسی کاملاً درهم و برهم است به طوری که مقدار مغناطش کل برابر با صفر است. میدان مغناطیسی باعث می شود که دوقطبی ها در امتداد میدان قرار گیرند ولی این هم امتداد شدن به دلیل افت و خیز حرارتی کامل نیست. بنابراین میزان مغناطش ناشی از موازنه دو عامل است، یکی میدان مغناطیسی که سعی می کند به دوقطبی ها نظم بدهند و دیگری دما که آنها را بی نظم می کند. پارامتری که این موازنه را تعیین می کند می بایست یک پارامتر بدون بعد باشد که از  $\mu B$  و  $T$  ساخته شده باشد و این پارامتر چیزی نیست جز  $\frac{\mu B}{kT}$ . برای آنکه این مسئله را به صورت تحلیلی و





شکل ۱۲: قسمتی از فضای فاز که در دسترس مجموعه نوسانگرهاست منطقه بین دو بیضی گون است.

دقیق مطالعه کنیم و برای سادگی فرض می کنیم که ممان های مغناطیسی در امتداد  $z$  قرار گرفته اند و تنها جهت آنها تصادفی است. بعداً می توانیم مدل های واقعی تر را که در آنها امتداد ممان ها نیز تصادفی است، نیز مطالعه کنیم.

هامیلتونی سیستمی متشکل از  $N$  ممان مغناطیسی در میدان مغناطیسی به اندازه  $B$  برابر است با:

$$H = - \sum_{i=1}^N \mu_i B \quad (57)$$

که در آن  $\mu_i = \pm \mu$  در آنرا مبل میکروکانونیک می بایست  $\Omega$  را برای انرژی ثابت  $E$  و تعداد ذرات  $N$  پیدا کنیم. اگر  $N_+$  تعداد ممان های  $+$  و  $N_-$  تعداد ممان های  $-$  باشد، داریم:

$$E = -\mu B(N_+ - N_-) \quad , \quad N = N_+ + N_- \quad (58)$$

که از آن بدست می آوریم:

$$N_+ = \frac{1}{2(N - \frac{E}{\mu B})}, \quad , \quad N_- = \frac{1}{2(N + \frac{E}{\mu B})}. \quad (59)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Omega = \binom{N}{N_+}, \quad , \quad \rightarrow S = k \ln \Omega = k [\ln N! - \ln N_+! - \ln N_-!]. \quad (60)$$

و در نتیجه

$$S = k [N \ln N - N - N_+ \ln N_+ + N_+ - N_- \ln N_- + N_-]. \quad (61)$$

از آنجا که  $N = N_+ + N_-$  این عبارت به شکل زیر ساده می شود:

$$S = k [N \ln N - N_+ \ln N_+ - N_- \ln N_-], \quad (62)$$

که در آن  $N_+$  و  $N_-$  از رابطه ۳ تعیین می شوند. با استفاده از رابطه ی

$$dE = TdS + MdB \quad (63)$$

و این که  $(\frac{\partial S}{\partial E})_{N,B} = \frac{1}{T}$  بدست می آوریم:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial N_+} \left( \frac{\partial N_+}{\partial E} \right)_{N,B} + \frac{\partial S}{\partial N_-} \left( \frac{\partial N_-}{\partial E} \right)_{N,B}, \quad (64)$$

و از آنجا

$$\frac{1}{T} = -k \ln N_+ \left( \frac{-1}{2\mu B} \right) - k \ln N_- \left( \frac{1}{2\mu B} \right) = \frac{1}{2\mu B} \ln \frac{N_+}{N_-} \quad (65)$$

و یا

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{2\mu B} \ln \left( \frac{N\mu B - E}{N\mu B + E} \right), \quad (66)$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$E = N\mu B \tanh \frac{\mu B}{kT}. \quad (67)$$

این رابطه انرژی متوسط ممان ها را در میدان مغناطیسی بدست می دهد. از آنجا که  $E = MB$  می توانیم مغناطش متوسط را نیز بدست آوریم. یعنی

$$M = N\mu \tanh \frac{\mu B}{kT}.$$

اما برای آموختن بیشتر بهتر است که  $N$  را با استفاده از عبارتی که برای آنتروپی بدست آوردیم تعیین کنیم: از رابطه ۶ بدست می آوریم:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial N_+} \left( \frac{\partial N_+}{\partial E} \right)_{N,B} + \frac{\partial S}{\partial N_-} \left( \frac{\partial N_-}{\partial E} \right)_{N,B}, \quad (68)$$

و

$$\frac{M}{T} = k \ln N_+ \frac{E}{2\mu B^2} + k \ln N_- \frac{-E}{2\mu B^2} = \frac{kE}{2\mu B^2} \ln \frac{N_+}{N_-} \quad (69)$$

و یا

$$\frac{M}{T} = \frac{kE}{2\mu B^2} \ln \frac{N\mu B - E}{N\mu B + E} \quad (70)$$

که از آن نتیجه می گیریم

$$M = N\mu \tanh \frac{\mu B}{kT}. \quad (71)$$

شکل ( ) مغناطش را بر حسب پارامتر  $\frac{\mu B}{kT}$  بدست می دهد. علیرغم بیش از اندازه ای که مدل نظری ما داشت، این شکل ( ) تطابق کیفی خوبی با آنچه که در آزمایشگاه از رفتار مغناطیسی می شناسیم دارد.

■ تمرین: مسئله قبلی را با در نظر گرفتن این که ممان های مغناطیسی می توانند جهت های دلخواه انتخاب کنند حل کنید. از آنرا میل میکروکانیک استفاده کنید.

## ۴.۶ نوسانات یک جامد

■ نوسانگرهای هارمونیک کلاسیک:

مثالی که می خواهیم حل کنیم، ساده ترین مدل برای نوسانات اتم ها در یک جامد بلوری است. در یک جامد اتم ها در سرجای خود تقریباً ثابت اند و حول نقطه تعادل شان نوسان می کنند. نوسانات اتم ها به یکدیگر وابسته است. می توانیم هامیلتونی حاکم بر این نوسانات را به شکل

زیر بنویسیم.

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{P}_i^2}{2m} + \sum_{i \neq j=1}^N k_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \quad (72)$$

که در آن  $\vec{r}_i$  بردار جابجایی اتم  $i$  ام و  $\vec{P}_i$  تکانه آن است. در دمای کم دامنه نوسانات اتم ها کم و در دمای زیاد دامنه نوسانات اتم ها کم است. افزایش دما باعث افزایش دامنه نوسانات می شود. در آنرا مدل میکروکانیک مطابق مثال های گذشته می بایست کمیت زیر را حساب کنیم:

$$\Omega(E, \Delta E, N, V) = A \int_{E \leq H \leq E + \Delta E} d^N \vec{r} d^N \vec{p} \quad (73)$$

برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر استفاده می کنیم. این تغییر متغیر می بایست چنان باشد که بر حسب متغیرهای جدید هامیلتونی به صورت ساده ای در آید. همواره می توان یک هامیلتونی مثل  $\mathcal{H}$  را با یک تغییر متغیر کانونیک

$$(\vec{r}_i, \vec{P}_i) \longrightarrow (Q_\alpha, P_\alpha), \quad \alpha = 1, \dots, 3N \quad (74)$$

به صورت قطری زیر در آید:

$$H = \sum_{\alpha=1}^{3N} \frac{P_\alpha^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2 \quad (75)$$

که در آن  $\omega_\alpha$  ها ویژه مقدارهای ماتریس برهم کنش هستند. این ویژه مقدارها فرکانس های طبیعی این سیستم هستند. بنابراین سیستم اولیه به صورت مجموعه ای از نوسانگرهای هارمونیک بدون برهم کنش در می آید. این نوسانگرها در واقع نشان دهنده ی نوسانات وجوه طبیعی سیستم هستند. در حال حاضر پیدا کردن این  $\omega_\alpha$  ها برای ما اهمیت ندارد. ما علاقمند به محاسبه  $\Omega$  هستیم که به صورت زیر در می آید.

$$\Omega = A \int_{E \leq H \leq E + \Delta E} d^{3N} Q d^{3N} P \quad (76)$$

با توجه به شکل هامیلتونی حجم ناحیه مورد نظر حجم بین دو پوسته بیضی گون است که به صورت زیر حساب می شود:

$$\Omega = A \int_{E \leq H \leq E + \Delta E} d^{3N} Q d^{3N} P = \Delta E \frac{\partial}{\partial E} (A \int_{0 \leq H \leq E} d^{3N} Q d^{3N} P). \quad (77)$$

انتگرال طرف راست حجم داخل یک بیضی گون است. معادله بیضی گون عبارت است از:

$$\sum_{\alpha=1}^{3N} \frac{P_\alpha^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2 = E, \quad (78)$$

و یا

$$\sum_{\alpha=1}^{3N} \left( \frac{P_{\alpha}^2}{2mE} + \frac{Q_{\alpha}^2}{m\omega_{\alpha}^2} \right) = 1. \quad (79)$$

این معادله رویه بیضی گونی را نشان می دهد با  $3N$  نیم قطر به اندازه  $(2mE)^{\frac{1}{2}}$  و  $3N$  نیم قطر به اندازه های  $\alpha = 1, \dots, 3N$ .

بنابر این حجم داخل بیضی گون برابر است با:

$$vol = C_{3N} \sqrt{2mE}^{3N} \prod_{\alpha=1}^{3N} \sqrt{\frac{2E}{m\omega_{\alpha}^2}} \quad (80)$$

که در آن  $C_{3N}$  یک ضریب ثابت است و یا

$$vol = C_{3N} (2E)^{3N} \prod_{\alpha=1}^{3N} \omega_{\alpha}^{-1} \quad (81)$$

و در نتیجه

$$\Omega(E, N, \Delta E) = C_{3N} \Delta E \times 6N (2E)^{3N-1} \prod_{\alpha=1}^{3N} \omega_{\alpha}^{-1} \quad (82)$$

که از آن نتیجه می گیریم

$$S = k(3N - 1) \ln E + \dots \quad (83)$$

و از آنجا با توجه به رابطه  $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$  بدست می آوریم:

$$E = 3NkT. \quad (84)$$

این رابطه چیزی را بیان می کند که می توان آن را به محک آزمایش سپرد. اگر ظرفیت گرمایی یک جاد ناشی از نوسانات اتم ها باشد، این رابطه بیان می کند که ظرفیت گرمایی در تمام دماها ثابت و برابر با  $3NK \text{ Joules/Kelvin}$  است. ضمناً این مقدار به نوع جامد (طیف فرکانس ها) بستگی ندارد. در سالهای پایانی قرن نوزدهم این موضوع به یکی از معماهای بزرگ فیزیک کلاسیک تبدیل شد، زیرا آزمایش نشان می داد که ظرفیت گرمایی هر جامدی با کاهش دما به سمت صفر میل می کند. بازگشایی این معما یکی از مسیرهایی بود که نهایتاً به کشف مکانیک کوانتومی انجامید.

ما می‌توانیم به همین ترتیب با در نظر گرفتن آنزامل میکروکانونیک به مطالعه مثالهای متعدد دیگر پردازیم. چنانکه دیدیم در هر موردی می‌بایست بستگی  $\Omega$  یعنی تعداد میکروحالات را به انرژی و دیگر پارامترها تعیین کنیم. تعیین این وابستگی معمولاً برای سیستم‌های بدون برهم‌کنش آسان است اگر چه تعیین وابستگی  $\Omega$  به  $N$  یعنی تعداد ذرات مستلزم یک محاسبه نسبتاً دشوار هندسی است. این دشواری باعث می‌شود که ما نتوانیم بستگی آنترابی را به تعداد ذرات پیدا کنیم. هم‌چنین در مورد سیستم‌های با برهم‌کنش محاسبه  $\Omega$  و بستگی آن به انرژی و دیگر پارامترها ممکن است بسیار دشوار باشد.

آیا می‌توان به جای آنزامل میکروکانونیک از یک آنزامل دیگر استفاده کرد که روش ساده‌تری را پیش روی ما نهد؟ پاسخ این سوال خوشبختانه مثبت است. آنزامل جدید آنزامل میکروکانونیک نام دارد که در فصل بعدی به آن می‌پردازیم.

## ۷ ضمیمه یک: محاسبه حجم یک کره در بعد دلخواه

محاسبه حجم کره  $N$  بعدی به شعاع  $R$ ،  $V_N(R)$ .  
انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (85)$$

از ضرب کردن  $N$  تا انتگرال از این نوع بدست می‌آوریم:

$$I^N = \int e^{-x_1^2 + \dots + x_N^2} dx_1 \dots dx_N = \pi^{N/2}. \quad (86)$$

حال می‌توانیم انتگرال سمت چپ را در دستگاه مختصات قطبی بنویسیم که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} S_N(r) dr = \pi^{N/2}. \quad (87)$$

اما می‌دانیم  $S_N(r) = \alpha_N r^{N-1}$  و در نتیجه

$$\alpha_N \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{N-1} dr = \pi^{N/2}. \quad (88)$$

بنابراین کافی است که انتگرال سمت چپ را حساب کنیم تا  $\alpha_N$  پیدا شود. با تغییر متغیر  $x = r^2$  این انتگرال تبدیل می شود به :

$$J := \int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \quad (۸۹)$$

و یا

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{N}{2}-1} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \quad (۹۰)$$

که در آن از تابع گاما با تعریف  $\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$  استفاده کرده ایم. بنابراین بدست می آوریم:

$$\alpha_N \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) = \pi^{N/2}, \quad \rightarrow \quad \alpha_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \quad (۹۱)$$

و نهایتاً

$$S_N(r) = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} r^{N-1}. \quad (۹۲)$$

با توجه به رابطه  $\frac{dV_N(r)}{dr} = S_N(r)$  حجم کره  $N$  بعدی به شعاع  $r$  را نیز می توانیم حساب کنیم:

$$V_N(r) = \frac{2\pi^{N/2}}{N\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} r^N. \quad (۹۳)$$

با توجه به خاصیت تابع  $\Gamma$  مبنی بر اینکه  $t\Gamma(t) = \Gamma(t+1)$  داریم  $t\Gamma(t) = \Gamma(t+1)$  و در نتیجه

$$V_N(r) = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)} r^N \quad (۹۴)$$

■ تمرین: مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$S_2(R), \quad V_2(R), \quad S_3(R), \quad V_3(R), \quad V_4(R), \quad S_4(R).$$

## ۸ ضمیمه دو: محاسبه دقیق آنتروپی

برای آنکه آنتروپی را محاسبه کنیم می بایست دو کار انجام دهیم. ۱- حجم کره  $N$  بعدی را دقیقاً حساب کنیم. ۲- روش معینی برای محاسبه حجم سلولهای فضای فاز و در نتیجه تبدیل حجم به تعداد میکرواحالت ها داشته باشیم. در ضمیمه یک حجم کره را در ابعاد دلخواه بدست آورده ایم.

حال به مسئله دوم می پردازیم، یعنی حجم طبیعی برای سلول های فضای فاز: با توجه به اصل عدم قطعیت در مکانیک کوانتومی حجم یک سلول رادر فضای فاز برابر با  $h^{3N}$  می گیریم که در آن  $N$  تعداد ذرات است. مبنای این انتخاب این است که برای یک ذره در یک بعد داریم

$$\Delta x \Delta p \sim h \quad (95)$$

و بنابراین نمی توان در درون یک سلول به حجم  $h^3$  بیش از یک میکرواحالت داشت. با این تفصیل مقدار نهایی  $\tilde{\Omega}(N, E, V)$  یعنی تعداد میکرواحالت هایی که انرژی آنها کمتر از  $E$  است برابر خواهد بود با

$$\tilde{\Omega}(E, N, V) = \int_{0 \leq H \leq E} \left( \frac{d^3 r d^3 p}{h^3} \right)^N = \frac{V^N}{h^{3N}} \int_{0 \leq \bar{p}_1^2 + \dots + \bar{p}_N^2 \leq 2mE} d^{3N} p \quad (96)$$

و در نتیجه

$$\tilde{\Omega}(E, N, V) = \frac{V^N}{h^{3N}} V_{3N}(\sqrt{2mE}) \quad (97)$$

یا

$$\tilde{\Omega}(E, N, V) = V^N \frac{1}{\left(\frac{3N}{2}\right)!} \left(\frac{2\pi mE}{h^2}\right)^{3N/2}. \quad (98)$$

با استفاده از رابطه  $S = k \ln \Omega$  و این که  $\ln N! \approx N \ln N - N$  نتیجه می گیریم:

$$S = NK \left[ \ln V + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{2\pi mE}{h^2} \right) + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln \frac{3N}{2} \right] \quad (99)$$

و با صرف نظر کردن از  $\frac{3}{2}$  در مقابل  $\frac{3N}{2}$

$$S = Nk \ln \left[ V \left( \frac{4\pi mE}{3h^2 N} \right)^{3/2} \right]. \quad (100)$$



## ۹ ضمیمه سه: مکانیک کوانتومی و روش طبیعی برای شمارش میکرواحالت ها

به نظر می رسد که روش بالا برای شمارش تعداد میکرواحالت ها و نهایتاً محاسبه آنتروپی چندان طبیعی و خالی از اشکال نیست. برای محاسبه تعداد میکرواحالت ها ما حجم فضای فاز را بر  $h^3$  تقسیم کردیم و مبنای این عمل خود را نیز اصل عدم قطعیت قرار دادیم ولی چرا  $h^3$  و نه مثلاً  $\hbar^3$  یا یک فاکتور دیگر؟ طبیعی است که این روش نیمه کلاسیک کاستی هایی داشته باشد و در چارچوب آن نتوان به این سوال و سوالهای مشابه پاسخ گفت.

آیا روش دیگری برای شمارش تعداد میکرواحالت ها وجود دارد؟ پاسخ این سوال مثبت است و مبتنی است بر یک استفاده دقیق تر از مکانیک کوانتومی. برای این کار یک ذره را در یک اتاقک با حجم  $V$  در نظر می گیریم. اتاقک را به صورت یک مکعب با ابعاد  $L$  در نظر می گیریم به طوری که  $V = L^3$ . در مکانیک کوانتومی می دانیم که سطوح انرژی این ذره در این چاه عبارتند از:

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \quad (101)$$

که در آن  $n_1, n_2, n_3$  اعداد صحیح نامنفی هستند. حال اگر  $N$  ذره در درون این اتاقک داشته باشیم و باهم برهم کنش نداشته باشند، آنگاه انرژی کل این ذرات برابر با مجموع انرژی تک تک ذرات خواهد بود. در نتیجه انرژی کل به جای ۳ عدد کوانتومی با  $3N$  عدد کوانتومی مشخص می شود، یعنی:

$$E_{\mathbf{n}} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \sum_{i=1}^{3N} n_i^2. \quad (102)$$

حال هر نقطه  $\mathbf{n}$  با مولفه های  $(n_1, n_2, \dots, n_{3N})$  در فضای  $3N$  بعدی یک میکرواحالت را نشان می دهد. این  $3N$  عدد می گویند که  $N$  ذره ی گاز در کدام سطح انرژی توزیع شده اند. برای شمارش میکرواحالت هایی که انرژی آنها از  $E$  کمتر است، کافی است که تعداد نقاطی را بشماریم که در رابطه ی  $\frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \sum_{i=1}^{3N} n_i^2 \leq E$  صدق می کنند. از آنجا که هر نقطه در شبکه بالا یک سلول به حجم 1 را اشغال می کند و از آنجا که تنها می بایست  $n_i$  های مثبت را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\tilde{\Omega}(N, E, V) = \frac{1}{2^{3N}} V_{3N} \left( R = \left( \frac{2mEL^2}{\hbar^2 \pi^2} \right)^{1/2} \right) \quad (103)$$

ضریب  $\frac{1}{2^{3N}}$  برای در نظر گرفتن  $n_i$  های مثبت قرار داده شده است. با در نظر گرفتن رابطه ۳ و این که  $V = L^3$  بدست می آوریم:

$$\tilde{\Omega}(N, E, V) = \frac{1}{2^{3N}} \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} \left( \frac{2mE}{\hbar^2 \pi^2} \right)^{3N/2} V^N \quad (104)$$

و یا پس از ساده کردن

$$\tilde{\Omega}(N, E, V) = V^N \frac{1}{\left(\frac{3N}{2}\right)!} \left(\frac{2\pi m E}{h^2}\right)^{3N/2}, \quad (105)$$

که با رابطه ۴ یکی است.

## ۱.۹ ضمیمه چهار: پارادکس گیبس و نحوه رفع آن

عبارتی که برای آنتروپی گاز بدست آورده ایم یک اشکال اساسی دارد. عبارت ۶ نشان دهنده یک کمیت فزونور نیست. در واقع این عبارت نشان می دهد که

$$S(\lambda E, \lambda N, \lambda V) \neq \lambda S(E, N, V).$$

اگر خوب به عبارت ۶ نگاه کنیم، منشاء اشکال و یک راه نه چندان بنیادی را برای تصحیح آن پیدا می کنیم. در واقع اگر بجای  $V$  در داخل پرانتز عبارت  $\frac{V}{N}$  را داشتیم آنگاه  $S$  یک کمیت فزونور می شد. چنین فاکتوری را می توان با تقسیم تعداد میکرواحالت ها یعنی  $\tilde{\Omega}$  بر  $N!$  ایجاد کرد. در واقع اگر این کار را بکنیم و از تقریب استرلینگ یعنی  $\ln N! \approx N \ln N - N \approx \ln N$  استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$S \rightarrow kN \ln \left[ \frac{V}{N} \left( \frac{2\pi m E}{h^2} \right)^{3/2} \right] \quad (106)$$

که یک کمیت فزونور است.

چه دلیلی برای تقسیم  $\tilde{\Omega}$  بر  $N!$  داریم؟ چرا این تقسیم باعث شمارش صحیح میکرواحالت ها می شود؟ آیا در هر شرایطی این تقسیم درست است؟ برای پاسخ به این سوال بهتر است به تصویر کوانتوم مکانیکی از میکرواحالات نگاه کنیم. برای سادگی فرض کنید که با ذراتی در یک اتاقک یک بعدی سر و کار داریم که هر تراز انرژی آن با یک عدد کوانتومی مشخص می شود، شکل (۱). رابطه ۸ برای  $N$  ذره که در چنین اتاقی به صورت آزاد حرکت کنند به صورت زیر در می آید:

$$E_{\mathbf{n}} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_N^2) \quad (107)$$

که در آن  $n_i$  می گوید که ذره  $i$  ام در کدام تراز انرژی قرار دارد. در نحوه شمارش قبلی هر  $N$  تایی  $(n_1, n_2, \dots, n_N)$  را یک میکرواحالت جداگانه در نظر گرفته بودیم. به عنوان مثال برای  $N = 4$  فرض کرده ایم که  $(1, 3, 2, 5)$  و  $(5, 2, 3, 1)$  دو میکرواحالت متفاوت هستند. شکل

(): و حال آنکه ذرات میکروسکوپی واقعا برچسبی روی خود ندارند که ما بتوانیم این دو میکرواحالت را از یکدیگر تمیز دهیم. بنابراین نحوه صحیح شمارش میکرواحالت ها آن نیست که بگوییم که هر ذره در کدام تراز است، بلکه این است که بگوییم در هر تراز انرژی چند ذره داریم. شکل (.) به عبارت دیگر یک میکرواحالت با اعداد

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4, \dots, m_\infty) \quad (108)$$

مشخص می شود که در آن  $m_n$  تعداد ذرات موجود در تراز انرژی  $\epsilon_n$  است. واضح است که

$$m_1 + m_2 + \dots + m_\infty = N \quad (109)$$

که در آن  $N$  تعداد کل ذرات درون سیستم است. بنابراین برای شمارش صحیح میکرواحالت ها می بایست میکرواحالت ها را بر حسب پارامترهای  $m_i$  که آنها را عدد اشغال<sup>۷</sup> می نامیم، شناسایی کنیم. این کار را که اساسا با روش کنونی مان متفاوت است در درس های آینده انجام خواهیم داد. اما موقعی که ذرات در ترازهای گوناگون پخش می شوند بطوریکه  $m_i$  یا 0 هستند یا 1، می توان میکرواحالت ها را به همان روش قبلی شمرد و سپس برای جلوگیری از تکرار، تعداد آنها را بر  $N!$  تقسیم کرد، زیرا هر میکرواحالت را  $N!$  بار شمرده ایم. این اتفاق که  $m_i$  یا یک باشند یا صفر، معمولا در دماهای بالا اتفاق می افتد. دماهای آنقدر پایین که متوسط  $m_i$  ها از یک بیشتر شود، دقیقا جایی است که آثار کوانتومی در رفتار گاز ظهور می کنند و دیگر نمی توان از روش های کلاسیک همراه با اصطلاحات و کلک هایی نظیر تقسیم بر  $N!$  رفتار گاز را توضیح داد.

## ۱۰ مسئله ها

مسئله یک: دو ولگرد در یک بعد هر دو از نقطه مبداء شروع به حرکت می کنند. طول گام های هر کدام یک واحد است و در ثانیه هر کدام از آنها با احتمال یک دوم یک گام رو به جلو و با احتمال یک دوم یک گام به عقب برمی دارد. بعد از  $N$  ثانیه احتمال اینکه فاصله آنها از یک دیگر برابر با  $x$  باشد چقدر است؟

مسئله دو: یک ولگرد در هر ثانیه با احتمال  $p$  دو گام رو به جلو و با احتمال  $1 - p$  یک گام رو به عقب برمی دارد. احتمال اینکه در لحظه  $t$  به نقطه  $x$  رسیده باشد چقدر است؟

---

مسئله سه: در یک بازی ورق چهار کارت به تصادف به شما داده می شود. احتمالات زیر را پیدا کنید:

۱- احتمال اینکه دو آس و دو صورت (از هر نوعی) داشته باشید.

۲- احتمال اینکه سه آس و یک صورت داشته باشید.

۳- احتمال اینکه حد اقل دو صورت داشته باشید.

۴- احتمال اینکه حداکثر سه صورت داشته باشید.

---

مسئله چهار: تابع توزیع یک متغیر تصادفی به نام  $x$  که مقادیرش را در فاصله  $[-1, 1]$  اختیار می کند یکنواخت است. در هر کدام از موارد زیر تابع توزیع  $y$  را بدست آورید:

$$a) y = x^2 \quad b) y = \sin(x) \quad c) y = \tan(x) \quad d) y = \arcsin(x). \quad (110)$$

---

مسئله پنج: در یک میهمانی تعداد  $N$  مهمان حضور دارند که همه کلاه های خود را به جارختی آویزان می کنند. پس از میهمانی از آنجا که برق رفته و تاریک است هر میهمانی یک کلاه را به طور تصادفی برمی دارد. احتمالات زیر را حساب کنید:

۱ - احتمال اینکه همه میهمانان کلاه خود را بردارند.

۲ - احتمال اینکه هیچ میهمانی کلاه خود را برندارد.

۳ - احتمال اینکه  $k$  تا از میهمانان کلاه خود را بردارند.

۴ - پاسخ شما برای سوال دوم وقتی که تعداد میهمانان به بی نهایت میل کند چیست؟

---

مسئله شش: یک ولگرد در یک شبکه یک بعدی از نقطه با مشخصات  $k$  شروع به حرکت می کند و در هر واحد زمان با احتمال یک دوم یک گام رو به جلو و با احتمال یک دوم یک گام رو به عقب بر می دارد. اما وقتی به مبدا می رسد به سمت چپ نمی رود و با احتمال یک باز می گردد. تابع توزیع احتمال  $P_N(x)$  یعنی احتمال اینکه بعد از گذشت زمان  $N$  در نقطه  $x$  باشد چقدر است؟

---

مسئله هفت: دو منشی ماشین نویس را در نظر بگیرید که آنها را  $A$  و  $B$  می نامیم.  $A$  در هر ۱۰ حرف مرتکب ۱ خطا و  $B$  در هر ۱۰ حرف مرتکب ۲ خطا می شود. احتمال این را پیدا کنید که در تایپ ۴ حرف  $B$  دقیقاً ۲ خطا بیشتر از  $A$  مرتکب شود.

---

مسئله هشت: شخصی از یک نردبان که  $N$  پله دارد بالا می رود. وی در هر گام یا دو پله و یا یک پله بالا می رود. کلاً این شخص به چند طریق می تواند به بالای نردبان برسد. (وی حرکت خود را از روی زمین شروع می کند.) راهنمایی: می بایست یک رابطه تکرار بنویسید. برای مقادیر  $N = 5, 6, 7$  تعداد راه ها را بنویسید.

---

مسئله نه: یک کمیته پنج نفره را از یک گروه ۱۵ نفره که داری ۸ مرد و ۷ زن است انتخاب می کنیم.

۱- احتمال اینکه این کمیته دارای ۲ زن و ۳ مرد باشد چقدر است؟

۲- احتمال اینکه این کمیته حداقل دارای یک زن باشد چقدر است؟

---

مسئله ده:  $N$  ذره اسپین یک را که در یک میدان مغناطیسی  $B$  در راستای  $z$  قرار گرفته اند در نظر بگیرید. تعداد ذرات نیز خیلی زیاد

است. اندازه مغناطش هر ذره را  $\mu$  بگیرید. انرژی یک ذره در میدان مغناطیسی با رابطه زیر داده می شود:

$$H = -\mu S_z B. \quad (111)$$

انرژی کل سیستم نیز برابر با  $E$  است. تعداد کل میکرواحالت ها یعنی  $\Omega(B, E, N)$  را حساب کنید. از تقریب استرلینگ برای محاسبه فاکتوریل اعداد بزرگ استفاده کنید.

۱- دمای این سیستم چقدر است؟

۲- مقدار مغناطش کل یعنی  $M$  را برحسب دما و میدان مغناطیسی پیدا کنید.

---

مسئله یازده: سیستمی متشکل از  $N$  نوسانگرها با فرکانس های  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  در نظر بگیرید. انرژی کل این سیستم برابر است با  $E$  و

$$E \gg \hbar\omega_i \quad \forall i.$$

۱-: تعداد کل میکرواحالت ها یعنی  $\Omega(N, E)$  را حساب کنید و از آنجا دمای این سیستم را بدست آورید.

۲- ظرفیت گرمایی ویژه این سیستم را حساب کنید.

۳- ظرفیت گرمایی را وقتی که همه فرکانس ها برابر با  $\omega$  هستند محاسبه کنید.

---

مسئله دوازده : انرژی یک گاز فوق نسبتی با رابطه زیر داده می شود:

$$E \approx c(|\vec{p}_1| + |\vec{p}_2| + |\vec{p}_3| + \dots + |\vec{p}_N|) \quad (112)$$

با استفاده از آنزامل میکروکانونیک معادله حالت و رابطه انرژی این گاز را بر حسب دما بدست آورید.

---

مسئله سیزده : یک مجموعه  $N$  تایی از نوسانگرهای کوانتومی سه بعدی با فرکانس  $\omega$  را در نظر بگیرید. این نوسانگرها با هم برهم کنش ندارند.

انرژی کل نوسانگرها از  $\hbar\omega$  بسیار بزرگ تر است به طوری که می توانید نوسانگرها را به صورت کلاسیک در نظر بگیرید.

۱- با استفاده از آنزامل میکروکانونیک، آنتروپی و سپس ظرفیت گرمایی ویژه این سیستم را حساب کنید.

۲- حال فرض کنید که نوسانگرها با یک هامیلتونی کلی وی درجه دوم زیر با هم برهم کنش می کنند:

$$H = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{p}_i + \sum_{i,j} \frac{1}{2} k_{ij} \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j \quad (113)$$

در این حالت آنتروپی و ظرفیت گرمایی ویژه را محاسبه کنید.

مسئله چهارده : در این مسئله لازم است مرتبه بزرگی کمیت های خواسته شده را تعیین کنید.

۱ - دمایی که اتم هیدروژن به اولین حالت برانگیخته اش تحریک می شود.

۲ - دمایی که اتم هیدروژن یونیزه می شود.

۳ - دمایی که یک ذره آلفا به ذرات تشکیل دهنده اش تجزیه می شود.

۴ - یک تکه ماده مغناطیسی در یک میدان مغناطیسی به بزرگی یک تسلا قرار گرفته است. در چه دمایی مقدار مغناطش به یک سوم مقدار بیشینه اش می رسد؟ دما را چقدر بالا ببریم که مقدار مغناطش اش به ۱۰ درصد مقدار بیشینه اش برسد.

۵ - سرعت متوسط مولکولهای اکسیژن در هوا چقدر است؟

---

مسئله پانزده : یک کره  $N$  بعدی با شعاع  $R$  در نظر بگیرید. نشان دهید که درصد حجمی از کره که در فاصله بین شعاع های  $R - \epsilon$  و  $R$  قرار دارد برابر است با:

$$f = 1 - \left(1 - \frac{\epsilon}{R}\right)^N. \quad (114)$$

این مقدار را برای  $N = 2$  و  $N = 10$  و  $N = 1000$  حساب کنید. این تمرین چه چیزی در باره روش محاسبه ما برای تعداد حالت های یک گاز ایده آل می گوید؟