

درس هفتم : دستگاه های بوزونی ایده آل

وحید کریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

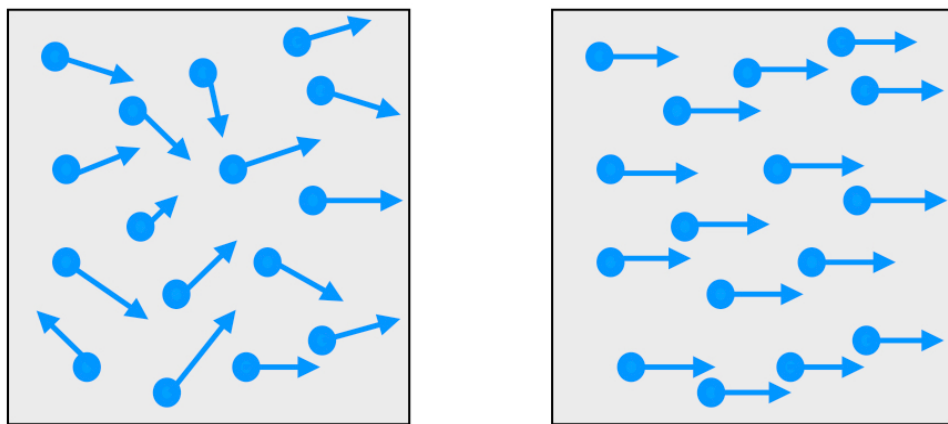
۲۹ دی ۱۳۹۷

۱ مقدمه

در درس مربوط به مکانیک آماری کوانتومی روابط اساسی مربوط به سیستم های فرمیونی و بوزونی بدون برهم کنش را استخراج کردیم. در درس گذشته با استفاده از آن روابط گاز فرمیونی ایده آل را بررسی کردیم. در این درس گاز بوزونی ایده آل را مطالعه می کنیم. برای بوزون ها نیز خواهیم دید که خاصیت کوانتومی آنها منجر به پدیده های عمیق و شگفت انگیز ماکروسکوپی خواهد شد. مهم ترین این پدیده ها چگالش بوز- اینشتین^۱ است که طی آن کسر قابل توجهی از کل ذرات یعنی تعداد ماکروسکوپی از ذرات در حالت پایه جمع یا به اصطلاح چگالیده می شوند. این پدیده در دماهای بسیار کم یا چگالی های بسیار زیاد آنها فقط برای بوزون ها رخ می دهد و منشاء پدیده هایی مثل ابرشارگی و ابررسانایی است. از نظر کیفی، به صورت خیلی ابتدایی می توان این پدیده را به این شکل توضیح داد که قبل از چگالش پخش شدن ذرات در تراز های مختلف که هرکدام تکانه و انرژی مخصوص به خود دارند باعث برخوردها و پراکندگی ذرات از یک دیگر و در نتیجه باعث بروز مزاحمت و ویسکوزیته در مایعات و یا مقاومت الکتریکی در رساناهای معمولی می شود. ولی بعد از چگالش، جمع شدن انبوهی از ذرات در یک حالت پایه با انرژی و تکانه معین باعث رفتار جمعی و یکسان ذرات و در نتیجه از بین رفتن ویسکوزیته در مایعات یا مقاومت الکتریکی در ابررساناها می شود. شکل (۱). باید دقت کرد که در یک ابررسانا، الکترون ها دو به دو تشکیل جفت هایی موسوم به جفت های کوپر^۲ می دهند و این جفت های کوپر هستند که نهایتاً چگالیده شده و باعث ابررسانایی می شوند. به طور کیفی می توان گفت که رفتار انبوهه ذرات قبل از چگالش مثل یک گاز و بعد

^۱Bose-Einstein Condensation
^۲Cooper Pairs

از چگالش مثل یک مایع است. این تفاوت در تمام کیفیات این دستگاه بس ذره ای نظیر تراکم پذیری، ظرفیت گرمایی ویژه و نظایر آن دیده می شود.



قبل از چگالش بوزونی

بعد از چگالش بوزونی

شکل ۱: چگالش بوزون ها در حالت پایه باعث می شود که همه ذرات یک سیستم اعداد کوانتومی و حالت یکسان داشته باشند. در چنین شرایطی هر نوع تزاخم بین حرکت ذرات از بین می رود. این خاصیت باعث بروز پدیده هایی مثل ابرشارگی و ابرسانایی می شود.

۲ مکانیک آماری گاز بوزونی ایده آل

بعد از این مقدمه می توانیم به بررسی دقیق مکانیک آماری گاز بوزونی ایده آل بپردازیم. از درس های قبلی روابط کلی را یادآوری می کنیم. داریم:

$$\ln Q = - \sum_i \ln(1 - ze^{-\beta \epsilon_i}) \quad (۱)$$

$$N = \sum_i \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} - 1} \quad (2)$$

$$U = \sum_i \frac{\epsilon_i}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} - 1} \quad (3)$$

برای گاز ایده آل، ϵ_i ها عبارتند از سطوح انرژی یک ذره درون یک چاه پتانسیل که ابعاد آن را L می گیریم. هرگاه حجمی را که ذره در آن قرار دارد یک مکعب d بعدی بگیریم و شرایط مرزی را نیز طوری بگیریم که تابع موج روی دیواره ها صفر باشد، خواهیم داشت:

$$\epsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} (n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_d^2). \quad (4)$$

در درس قبلی دیدیم که چگونه با داشتن این انرژی می توان جمع های بالا را به انتگرال تبدیل کرد. با اطمینان کردن همان مراحل به رابطه زیر می رسیم:

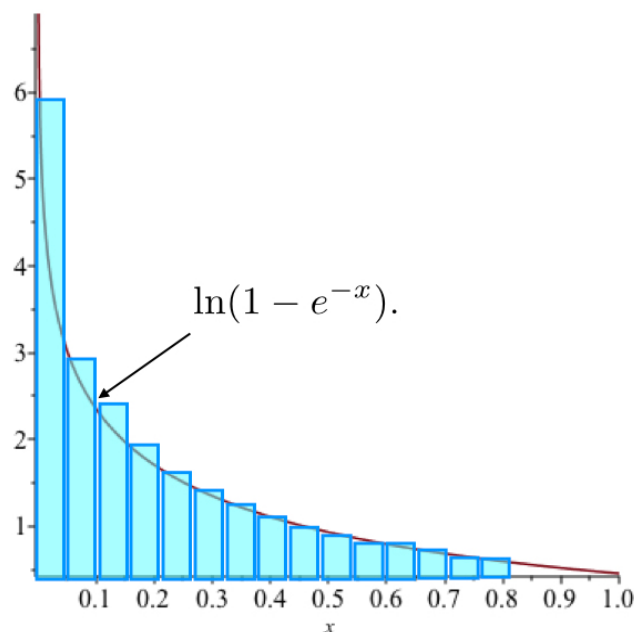
$$\ln Q = -\frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - ze^{-x}) dx. \quad (5)$$

اما این رابطه یک اشکال اساسی دارد که اینک آن را توضیح داده و رفع می کنیم. در عبارت (۲) سهم جمله حالت پایه به صورت

$$-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}) \quad (6)$$

است. انرژی حالت پایه را $\epsilon_0 = 0$ گرفته ایم. وقتی که z به سمت 1 میل می کند، این جمله به سمت بی نهایت میل می کند. ببینیم آیا این سهم در انتگرال (۵) در نظر گرفته شده است یا خیر؟ اگر به عبارت $x^{\frac{d}{2}-1}$ که در واقع نشان دهنده چگالی حالت ها در واحد انرژی است، نگاه کنیم متوجه می شویم که برای $d > 2$ این چگالی به سمت صفر و در نتیجه جمله $x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - e^{-x})$ نیز به سمت صفر میل می کند و در نتیجه روشن است که عبارت واقعی (۱) با انتگرال (۵) در این نقطه تفاوت فاحشی دارد. دلیل این امر هم روشن است. اگر به شکل های (۲) و (۳) نگاه کنیم متوجه نکته اصلی می شویم.

قرار است سطح زیر منحنی که همان انتگرال (۵) است جایگزین جمع (۱) شود که همان مجموع مساحت میله های عمودی آبی است. در شکل (۲) که مربوط به بعد $d = 2$ است، هر دو مساحت با تقریب خیلی خوبی یکسان هستند. اما در شکل (۳) که مربوط به بعد $d = 3$ است،

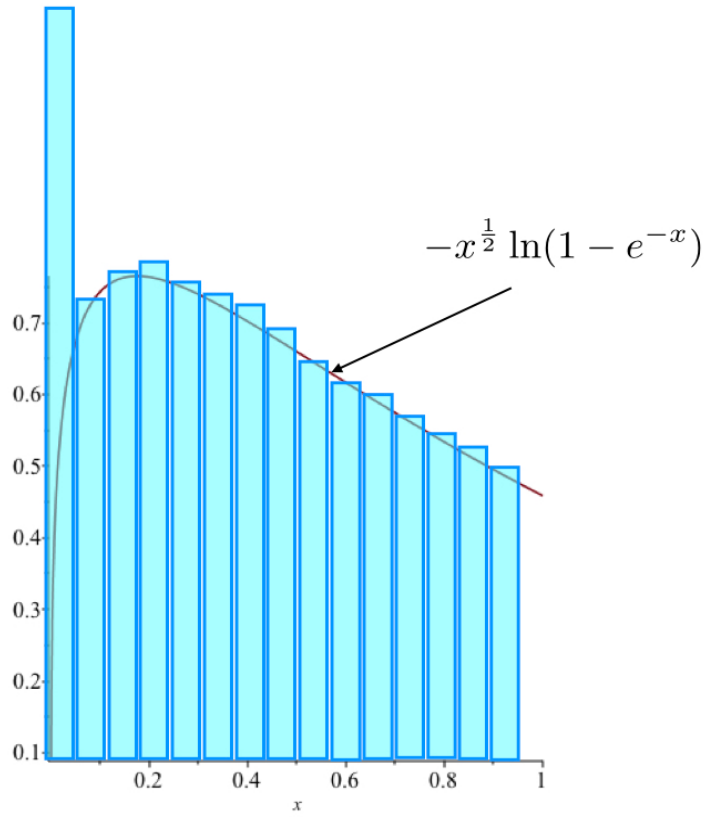


شکل ۲: در بعد دو وقتی که z به ۱ نزدیک می شود، تفاوتی بین جمع گسسته روی حالت های انرژی و انتگرال پیوسته این مقادیر وجود ندارد. .

می بینیم که منحنی در x های کوچک به سمت صفر میل می کند و حال آنکه ارتفاع میله روی آن سر به فلک می کشد. در واقع مساحت سطح زیر منحنی در اینجا یک مقدار محدود است. در واقع هر چه تفاوت هست توسط همان میله اول یعنی سهم حالت پایه ایجاد می شود. دلیل این تفاوت آن است که تبدیل یک جمع به یک انتگرال فقط وقتی صحیح است که جملات متوالی جمع نسبت به هم تفاوت شان اندک باش به طوری که بتوان آنها را با یک تابع هموار تقریب زد. در این جا سهم حالت پایه با بقیه حالت ها تفاوت بسیار زیادی دارد.

سوال مهمی که در این جا پیش می آید این است که آیا تنها سهم حالت پایه است که در انتگرال (۵) نادیده گرفته شده یا این که مثلاً سهم اولین و دومین و سومین حالت برانگیخته نیز از قلم افتاده است؟ برای پاسخ به این سوال بهتر است که سهم اولین حالت برانگیخته را با سهم حالت پایه مقایسه کنیم. انرژی حالت پایه را با ϵ_0 و انرژی حالت پایه اول را با ϵ_1 نشان می دهیم. از رابطه (۴) روشن است که

$$\epsilon_1 - \epsilon_0 \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}. \quad (7)$$



شکل ۳: در بعد سه وقتی که z به یک نزدیک می شود، جمع گسسته روی حالت ها بی نهایت می شود ولی انتگرال پیوسته مقدار محدودی دارد. تفاوت عمده هم فقط در سهم حالت پایه است که می بایست جدا نوشته شود.

حال سهم این دو جمله در Q برابر است با:

$$-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}) - \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_1}). \quad (۸)$$

از درس های قبلی دیده ایم که محدوده مجاز z برابر است با $[0, e^{\beta\epsilon_0}]$ یعنی $0 \leq z \leq e^{\beta\epsilon_0}$. بنا بر این بیشترین مقداری که سهم اولین حالت برانگیخته یعنی جمله دوم می تواند اختیار کند برابر است با :

$$-\ln(1 - e^{\beta(\epsilon_0 - \epsilon_1)}) \approx -\ln(\beta(\epsilon_1 - \epsilon_0)) \approx \ln\left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \beta\right). \quad (۹)$$

حتی اگر عدد داخل پرانتز به کوچکی 10^{-100} یا 10^{-200} باشد، باز لگاریتم آن عددی در حدود ۱۰۰ یا ۲۰۰ است و این در حالی است که جمله اول در حد $e^{\beta\epsilon_0} \rightarrow z$ به سمت بی نهایت میل می کند. بنابراین تصویری که در صفحه قبل نشان داده ایم درس است و تنها سهم حالت پایه است که می بایست جداگانه در نظر گرفته شود. با این استدلال اکنون روشن است که چگونه می بایست روابط (۱) تا (۳) را رای بوزون ها بنویسیم. (برای سادگی و با قرارداد خود، انرژی حالت پایه را برابر با صفر می گیریم). بنابراین روابط این روابط به شکل زیر در می آیند:

$$\ln Q = -\ln(1-z) - \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1-ze^{-x}) dx. \quad (10)$$

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}-1} dx}{z^{-1}e^x - 1}. \quad (11)$$

$$\frac{U}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}} dx}{z^{-1}e^x - 1}. \quad (12)$$

دقت کنید که $\frac{z}{1-z}$ تعداد متوسط ذرات در حالت پایه است که آن را با N_0 نشان می دهیم:

$$N_0 = \frac{z}{1-z}. \quad (13)$$

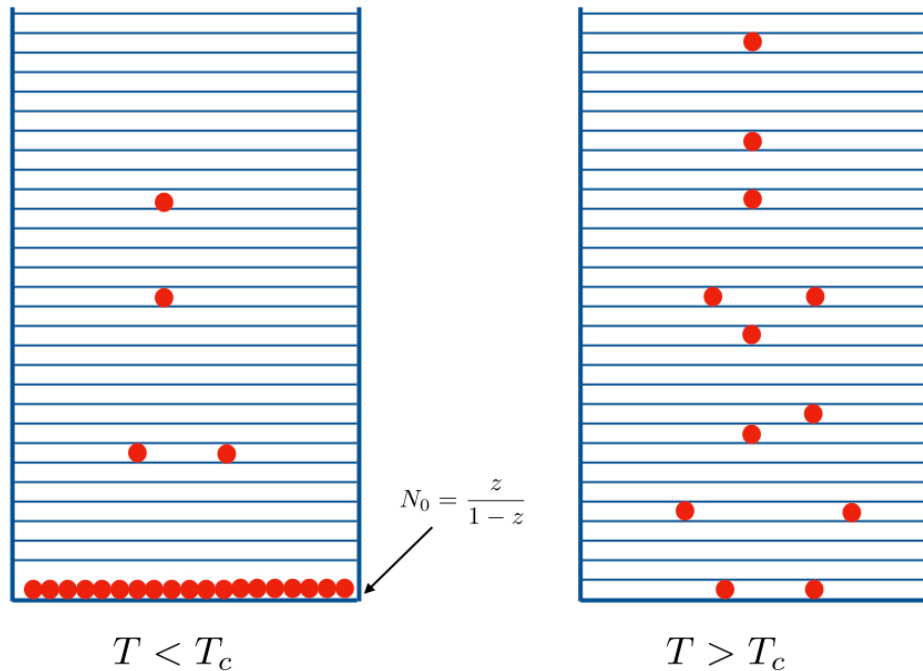
این عدد یعنی تعداد ذرات در حالت پایه، با نزدیک شدن z به 1 می تواند بدون هیچ حدی بزرگ شود، شکل (۴).

البته این جمله سهمی در انرژی یعنی در عبارت (۱۱) ندارد، زیرا انرژی حالت پایه را برابر با صفر گرفته ایم. برای ادامه به رابطه (۱۰) توجه می کنیم. می توانیم انتگرال را به صورت جزء به جزء محاسبه کنیم. در نتیجه بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1-ze^{-x}) dx &= \frac{1}{\frac{d}{2}} x^{\frac{d}{2}} \ln(1-ze^{-x}) \Big|_0^\infty \\ &- \frac{1}{\frac{d}{2}} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}} \frac{1}{z^{-1}e^x - 1} dx. \end{aligned} \quad (14)$$

با توجه به اینکه عبارت اول برابر با صفر است و با تعریف تابع زیر

$$g_n(z) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1}e^x - 1}. \quad (15)$$



شکل ۴: در سه بعد، وقتی که دما پایین می آید و از یک دمای بحرانی عبور می کند، مجموع ظرفیت لایه های بالا تر از حالت پایه، برای جای دادن ذرات محدود می شود. بعد از آن یک کسر قابل توجهی از ذرات به حالت پایه می روند. این پدیده همان چیزی است که به آن چگالش بوز-اینشتین گفته می شود.

بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{PV}{kT} &= -\ln(1-z) + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z) \\
 N &= \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z) \\
 \frac{U}{kT} &= \frac{d}{2} \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z).
 \end{aligned} \tag{۱۶}$$

■ تمرین: با توجه به این که متوسط تعداد ذرات در هر لایه انرژی می بایست عددی مثبت باشد، ثابت کنید که برای بوزون ها شرط زیر برقرار

است:

$$0 \leq z \leq e^{\beta \epsilon_0} \equiv 1, \quad (17)$$

در تساوی سمت راست فرض کرده ایم که همواره می توانیم سطح انرژی پایه را به دلخواه خود تعریف کنیم.

■ تمرین: نشان دهید که توابع $g_n(z)$ نیز مثل توابع فرمیونی دارای خاصیت زیر هستند:

$$zg'_n(z) = g_{n+1}(z). \quad (18)$$

هم چنین نشان دهید که تابع های $g_n(z)$ مثبت هستند و $g_n(0) = 0$.

■ تمرین: نشان دهید که

$$g_n(1) = \zeta(n), \quad (19)$$

که در آن ζ تابع زتای ریمان است یعنی

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \dots \quad (20)$$

می دانیم که $\zeta(1) = \infty$ و $\zeta(\frac{3}{2}) = 2.612$ اگر به رابطه (۱۶) نگاه کنیم متوجه می شویم که $\frac{z}{1-z}$ تعداد متوسط ذرات موجود در حالت پایه و

$$\frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z)$$

تعداد ذرات موجود در تمامی حالت های برانگیخته است. این دو را به ترتیب با N_0 و N_e نمایش می دهیم، یعنی

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z) \equiv N_0 + N_e. \quad (21)$$

با توجه به خواصی که در مورد تابع $g_n(z)$ گفتیم، معلوم می شود که ظرفیت حالات برانگیخته برای جا دادن ذرات محدود است. این ظرفیت برابر است با

$$(N_e)_{max} = \frac{V}{\lambda^d} \zeta(\frac{d}{2}). \quad (22)$$

دقت کنید که این ظرفیت به دما بستگی دارد. حال اگر تعداد کل ذرات موجود در گاز بیش از این مقدار باشد، بقیه ذرات می بایست حتما به حالت پایه بروند. در این حالت می گوییم که ذرات شروع به چگالش در حالت پایه یا به سادگی شروع به چگالش کرده اند. بنابراین شرط چگالش

آن است که

$$N \geq \frac{V}{\lambda^d} \zeta\left(\frac{d}{2}\right), \quad (23)$$

و یا

$$n\lambda^d \geq \zeta\left(\frac{d}{2}\right). \quad (24)$$

این شرط، شرطی ترکیبی از دما و چگالی است که با توجه به رابطه $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$n\left(\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}\right)^d \geq \zeta\left(\frac{d}{2}\right). \quad (25)$$

از این رابطه چند درس مهم می گیریم:

■ یک:

برای یک گاز دوبعدی بوزونی ($d = 2$) چگالش رخ نمی دهد، زیرا $\zeta(1) = \infty$ و شرط چگالش هرگز محقق نمی شود، مگر در دمای صفر مطلق.

■ دو:

ناحیه ای که در آن چگالش رخ می دهد در شکل زیر نشان داده شده است. بنابر این به ازای هر چگالی محدود هر وقت که دما را از یک حد بحرانی T_c کمتر کنیم، چگالش اتفاق می افتد و به ازای هر دمای محدود هر گاه چگالی را از یک مقدار بحرانی n_c زیاد تر کنیم چگال آغاز خواهد شد. این دما و این چگالی بحرانی را با استفاده از رابطه چگالش می توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} n_c &= \zeta\left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2\pi mkT}}{h}\right)^d, \\ T_c &= \frac{h^2}{2\pi mk} \left(\frac{n}{\zeta\left(\frac{d}{2}\right)}\right)^{\frac{2}{d}}. \end{aligned} \quad (26)$$

■ سه:

رابطه (۲۵) نشان می دهد که هر چقدر که جرم ذره کمتر باشد، چگالش زودتر اتفاق می افتد. هم چنین وجود h در این رابطه نشان از این دارد که این پدیده یک پدیده کوانتومی است.

۳ خواص ترمودینامیکی گاز بوزونی ایده آل

برای آنکه ترمودینامیک گاز بوزونی را مطالعه کنیم می بایست دو رژیم متفاوت را از هم تمیز دهیم. یکی وقتی که هنوز چگالش رخ نداده است و دیگری وقتی که چگالش رخ داده است.

۱.۳ قبل از چگالش

در این رژیم z هنوز برابر با ۱ نشده است، بنابراین عبارت های $\frac{z}{1-z}$ یا $\ln(1-z)$ را می توان در مقایسه با بقیه جملات دور ریخت و رابطه ۱۵ را به شکل زیر نوشت:

$$n\lambda^d = g_{\frac{d}{2}}(z), \quad \frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z), \quad U = \frac{d}{2} PV. \quad (27)$$

از آنجا که همواره $0 < z < 1$ است می توان $g_n(z)$ را بر حسب توان های z بسط داد.

■ تمرین: نشان دهید که تابع $g_n(z)$ را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$g_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^n}. \quad (28)$$

در این صورت می نویسیم

$$n\lambda^d = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{\frac{d}{2}}}. \quad (29)$$

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^{\frac{d}{2}}}. \quad (30)$$

سری (۲۹) را می توان وارونه کرد که باعث می شود z را بر حسب توان های متوالی $n\lambda^d$ بنویسیم:

$$z = \sum_{l=1}^{\infty} a_l (n\lambda^d)^l. \quad (۳۱)$$

جایگذاری این سری در رابطه (۳۰) بدست می دهد:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \sum_{l=1}^{\infty} b_l (n\lambda^d)^l \quad (۳۲)$$

و یا

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \sum_{l=1}^{\infty} b_l \left(\frac{N}{V} \lambda^d\right)^l = N \sum_{l=1}^{\infty} b_l \left(\frac{N}{V} \lambda^d\right)^{l-1} \quad (۳۳)$$

و در نتیجه

$$\frac{PV}{kT} = N \left(1 + b_2 \left(\frac{\lambda^d}{v}\right) + b_3 \left(\frac{\lambda^d}{v}\right)^2 + \dots \right), \quad (۳۴)$$

که رابطه آخر بسط ویریا برای معادله حالت را بدست می دهد. برای این کار می بایست رتبه به رتبه ضریب های a_l و سپس b_l را بدست آورد. دقت کنید که اگر $\frac{\lambda^d}{v}$ کوچک باشد به معنای این است که طول موج گرمایی نسبت به فاصله میانگین بین ذرات کوچک است و آثار کوانتومی اهمیت کمی دارند. به همین دلیل در بسط ویریا بالا طرف راست بر حسب قوای متوالی این پارامتر یعنی $\frac{\lambda^d}{v}$ نوشته شده است. در حدی که این پارامتر کاملاً قابل صرف نظر کردن باشد، معادله حالت به معادله حالت گاز معمولی یعنی گاز ماکسول – بولتزمن تبدیل می شود. از رابطه بالا مقدار انرژی را نیز می توانیم بدست آوریم:

$$U = \frac{3}{2} PV = \frac{3}{2} NkT \left(1 + b_2 \left(\frac{\lambda^d}{v}\right) + b_3 \left(\frac{\lambda^d}{v}\right)^2 + \dots \right). \quad (۳۵)$$

ظرفیت گرمایی ویژه را نیز می توان از رابطه $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V}$ بدست آورد.

■ مثال: سعی می کنیم ضریب b_2 را برای گاز سه بعدی یعنی برای $d = 3$ بدست بیاوریم. از رابطه (۲۹) داریم:

$$y = n\lambda^3 = z + \frac{z^2}{2\sqrt{2}} + \dots \quad (۳۶)$$

بنابراین قرار می دهیم

$$z = +ay^2 + \dots$$

این بسط را در دو طرف رابطه قبلی قرار می دهیم:

$$y = (y + ay^2 + \dots) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(y^2 + \dots) \quad (37)$$

که از آن نتیجه می گیریم: $a = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$. بنابراین

$$z = y - \frac{1}{2\sqrt{2}}y^2 + \dots \quad (38)$$

حال این مقدار را در رابطه (29)

قرار می دهیم و بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{PV}{kT} &= \frac{V}{\lambda^3} \left(z + \frac{z^2}{2^{\frac{5}{2}}} \right) \\ &= \frac{V}{\lambda^3} \left(y - \frac{y^2}{2\sqrt{2}} + \frac{y^2}{2\sqrt{5}} + \dots \right) \\ &= \frac{V}{\lambda^3} \left(y - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) y^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (39)$$

و یا با توجه به اینکه $y = \frac{\lambda^3}{v}$

$$\frac{PV}{kT} = N \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \frac{\lambda^3}{v} + \dots \right) \quad (40)$$

■ تمرین: ظرفیت گرمایی ویژه گاز بوزونی را با استفاده از روابط بالا بدست آورید.

۲.۳ بعد از چگالش

چگالش وقتی رخ می دهد که حالت های برانگیخته به اندازه ظرفیت خود ذره بپذیرند. می دانیم که این ظرفیت ماکزیمم برابر است با

$$N_{max} = \frac{V}{\lambda^d} \zeta\left(\frac{d}{2}\right). \quad (41)$$

در نتیجه بقیه ذرات حتما به حالت پایه می روند. اگر تعداد کل ذرات را N بگیریم و تعداد ذرات ای که به حالت پایه می روند را N_0 بگیریم، آنگاه:

$$N_0 = N - N_{max} = N - \frac{V}{\lambda^d} \zeta\left(\frac{d}{2}\right).$$

از آنجا که $N_0 = \frac{z}{1-z}$ می توانیم مقدار z را از این جا حساب کنیم. بنابراین

$$z = \frac{N_0}{N_0 + 1}, \quad (42)$$

که در آن N_0 از رابطه قبلی داده می شود. باید دقت کرد که در جاهایی که حساس نیست و باعث اشتباه اساسی نمی شود، می توان z را مساوی ۱ گرفت. حال می توانیم مقدار z بدست آمده در رابطه بالا را در رابطه ۱۵ قرار دهیم تا معادلات حالت بعد از چگالش معین شوند. داریم:

$$\frac{PV}{kT} = -\ln(1-z) + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z). \quad (43)$$

بنابراین با قراردادن (۴۲) در این رابطه بدست می آوریم:

$$\frac{PV}{kT} = -\ln\left(\frac{1}{N_0+1}\right) + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}\left(\frac{N_0}{N_0+1}\right), \quad (44)$$

که در آن $N_0 = N - \frac{V}{\lambda^d} \zeta(\frac{d}{2})$. درست در ابتدای چگالش که N_0 مقداری از مرتبه ۱ دارد، نمی توان در عبارت بالا تقریبی به عمل آورد، اما تنها کمی بعد از چگالش، به محض اینکه N_0 از مرتبه 10^2 یا حتی 10^1 می شود، می توان با تقریب خیلی خوب $\frac{N_0}{N_0+1}$ را برابر با ۱ گرفت. در نتیجه رابطه ۴۱ به شکل زیر در می آید:

$$\frac{PV}{kT} = -\ln N_0 + \frac{V}{\lambda^d} \zeta\left(\frac{d}{2} + 1\right). \quad (45)$$

از آنجا که $\ln N_0$ نسبت به جمله دوم بسیار کوچک است می توان از آن صرف نظر کرد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$P = kT \frac{1}{\lambda^d} \zeta\left(\frac{d}{2} + 1\right) \quad (46)$$

و یا

$$P = cT^{1+\frac{d}{2}}, \quad (47)$$

که در آن c یک ثابت است.

این رابطه نشان می دهد که بعد از چگالش فشار مستقل از حجم شده است و در نتیجه تراکم پذیری گاز برابر با صفر شده است، درست مثل

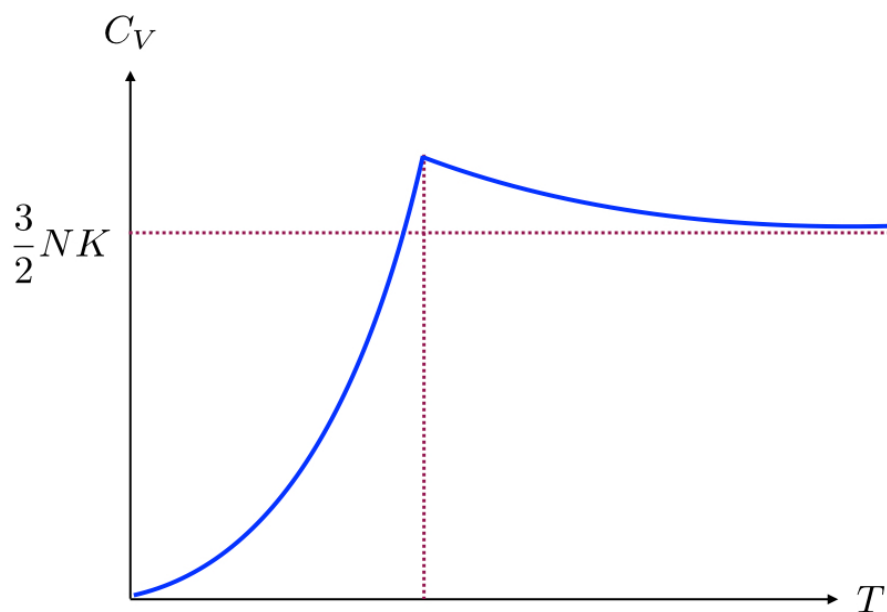
اینکه گاز تبدیل به مایع شده باشد. هم چنین از رابطه $U = \frac{3}{2}PV$ بدست می آوریم:

$$U = \frac{3}{2}cVT^{1+\frac{d}{2}}. \quad (48)$$

از این رابطه ظرفیت گرمایی ویژه به شکل زیر بدست می آید:

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T}_v = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{d}{2}\right) c_v T^{\frac{d}{2}}. \quad (49)$$

هرگاه این رابطه را با نتایجی که از حل تمرین مربوط به ظرفیت گرمایی ویژه قبل از چالش بدست آوردید، ترکیب کنیم و ظرفیت گرمایی ویژه را بر حسب دما رسم کنیم منحنی کامل ظرفیت گرمایی ویژه بدست می آید، شکل (۵). بقیه خواص ترمودینامیکی گاز بوزونی ایده آل را می توان به



شکل ۵: ظرفیت گرمایی گاز بوزونی سه بعدی بر حسب دما.

همین صورت بدست آورد.

۴ مسئله‌ها:

■ مسئله اول: برای یک گاز بوزونی ایده آل نشان دهید که:

$$\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \bigg|_P = - \frac{5}{2T} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}. \quad (50)$$

با استفاده از این رابطه نشان دهید که:

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V} = \frac{(\partial z / \partial T)_P}{(\partial z / \partial T)_V} = \frac{5}{3} \frac{g_{5/2}(z) g_{1/2}(z)}{(g_{3/2}(z))^2} \quad (51)$$

■ مسئله دوم: نشان دهید که ضریب تراکم پذیری همدم و ضریب تراکم پذیری بی در رو برای یک گاز ایده آل بوزونی توسط روابط زیر داده می شوند:

$$\kappa_T = \frac{1}{nkT} \frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \quad \kappa_S = \frac{3}{5nkT} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{5/2}(z)}, \quad (52)$$

که در آن $n = \frac{N}{V}$ چگالی گاز است. نشان دهید که وقتی $z \rightarrow 0$ و κ_T و κ_S به سمت مقادیر مربوط به گاز کلاسیک میل می کنند یعنی

$$\kappa_T \rightarrow \frac{1}{P} \quad \kappa_S \rightarrow \frac{1}{\gamma P}.$$

رفتار این کمیت ها را در حدی که گاز خیلی واکن است یعنی حد $z \rightarrow 1$ بدست آورید.

■ مسئله سوم: سیستمی متشکل از N نوسانگر هارمونیک یکسان با فرکانس ω_0 در نظر بگیرید. تابع پارش گراند کانونیک را برای دو حالت زیر حساب کنید:

الف: وقتی که نوسانگرها از امار بولتزمن تبعیت می کنند.

ب: وقتی که نوسانگرها از آمار بوز-اینشتین تبعیت می کنند.

■ مسئله چهار: متوسط تعداد ذرات را در هر لایه انرژی ϵ_k با $\langle n_k \rangle$ نشان می دهیم. میزان افت و خیز این کمیت را برای یک سیستم دلخواه

حساب کنید. منظور کمیت زیر است:

$$\langle n_k^2 \rangle - \langle n_k \rangle^2.$$

به طور مشخص میزان این افت و خیز را برای یک گاز بوزونی بدست آورید.