

# درس هشتم : سیستم های با برهم کنش، گذار فاز و بعضی مطالب مقدماتی در باره

## پدیده های بحرانی

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲۷ آذر ۱۳۹۷

### ۱ مقدمه

تا کنون همه سیستم هایی که مطالعه کردیم (بجز سیستم های ذرات بوزونی و فرمیونی که اصل طرد پاولی در آنها برقرار است) سیستم های بدون برهم کنش بودند. این موضوع باعث می شد که اساسا محاسبه تابع پارش یک سیستم بس ذره ای به محاسبه تابع پارش یک ذره کاهش یابد. اما هر سیستم واقعی در طبیعت از تعداد فوق العاده زیادی ذره تشکیل شده که بین آنها برهم کنش وجود دارد. در بقیه درس مکانیک آماری به مطالعه سیستم هایی می پردازیم که برهم کنش دارند. در مطالعه هر سیستمی از این نوع خواهیم دید که وجود برهم کنش باعث ایجاد تصحیحاتی در تابع پارش و در نتیجه خواص ترمودینامیکی می شود. این تغییرات می توانند در معادله حالت و انرژی و به تبع آن در دیگر خواص ترمودینامیکی مثل ظرفیت گرمایی ویژه، ظرفیت تراکم پذیری، هدایت الکتریکی و گرمایی و بسیاری خواص دیگر ظاهر شوند. مثالهایی از این نوع را در درس های آینده بررسی می کنیم که طی آنها هم با روش های مهم محاسبه تابع پارش آشنا می شویم و هم به تصحیحاتی از معادله حالت گاز ایده آل به عنوان یکی از مهمترین سیستم های بس ذره ای آشنا می شویم.

اما مهمترین موضوعی که مطالعه سیستم های برهم کنش دار به ما می آموزد چگونگی وجود فازهای مختلف در ماده است. سوال اساسی که

با آن روبرو هستیم این است که آیا ماده در این فازهای گوناگون با برهم کنش ها یا هامیلتونی های متفاوت تعریف می شود یا همواره می توانیم با یک هامیلتونی هر سیستمی را در فازهای گوناگونش توصیف کنیم. یادآوری می کنیم که تا حدود سالهای ۱۹۵۰ پاسخ این سوال بدیهی نبوده و تنها امروزه است که به مدد پیشرفت های بسیار در مکانیک آماری می فهمیم که ماده در همه فازهایش تنها با یک هامیلتونی توصیف می شود و این تابع پارش سیستم است که با تغییر پارامترهای خارجی از خود رفتار غیر پیوسته نشان می دهد و منجر به ناپیوستگی در کمیت های ترمودینامیکی ناشی از آن می شود و ما آن را به صورت فازهای مختلف ماده می بینیم. این موضوع یعنی توصیف فازهای مختلف یک سیستم یکی از موفقیت های بزرگ مکانیک آماری بوده است.

چگونه می توانیم وجود فازهای مختلف در ماده را توصیف کنیم؟ چگونه مجموعه ای از اتم ها می توانند در شرایط معینی از دما و فشار به صورت بخار و سپس به صورت مایع و بعد به صورت جامد در آیند؟ چگونه می توان با یک هامیلتونی این فازهای گوناگون و به شدت متنوع را توضیح داد؟

نکته اساسی به صورت کیفی این است که اگرچه هر ذره تنها با تعداد کمی از ذرات همسایه اش برهم کنش می کند و نه با همه ذرات. این برهم کنش های کوتاه برد یک نوع همبستگی دوربرد بین ذرات را سبب می شود. این همبستگی های دور برد باعث می شود که گروه هایی از ذرات که در یک همسایگی بزرگ قرار دارند رفتاری همسان داشته باشند. با تغییر پارامترهای خارجی مثل دما یا فشار یا میدان مغناطیسی اندازه این ناحیه های همبسته می تواند زیاد شود و سرانجام به نقطه ای می رسیم که همه ذرات یک سیستم بس ذره ای رفتاری همانند داشته باشند. در این هنگام می گوئیم که سیستم بس ذره ای در یک فاز مشخص قرار گرفته است. با تغییر پارامترهای خارجی سیستم می تواند در فازهای مختلفی قرار بگیرد همان گونه که بخار آب می تواند از حالت گازی به حالت مایع و سپس به حالت جامد تغییر فاز دهد و حتی در دماهای پایین تر و فشارهای بالاتر یخ می تواند در فازهای گوناگونی قرار گیرد که هر کدام یک شکل کریستالی خاص خود را دارند. در این درس و چند درس آینده سعی می کنیم به صورت مقدماتی مطالبی در باره سیستم های برهم کنش دار و گذار فاز و هم چنین پدیده های بحرانی یاد بگیریم. برای آنکه این مفاهیم اساسی را بیاموزیم به ساده ترین پدیده یعنی گذار فاز مغناطیسی یک جامد می پردازیم که اتم های آن در جای خود ثابت اند و همبستگی بین دو قطبی های مغناطیسی این اتم ها می تواند باعث هم جهت شدن آنها در کل جامد و مغناطیسی شدن جامد شود. این پدیده یعنی پیدایش نظم در اثر عامل خارجی (میدان مغناطیسی) یا به صورت خود بخود (مغناطش خود بخود) موضوعی است که در فصل های آینده به آن خواهیم پرداخت. اما نخست لازم است که با بعضی از مفاهیم کلی در باره گذار فاز آشنا شویم. این مفاهیم اگرچه به زبان سیستم های مغناطیسی بیان می شوند ولی دامنه اعتبار آنها تقریباً همه انواع گذار فاز را شامل می شود.

## ۲ مقدماتی در باره گذار فاز

گذار فاز هایی نظیر آنچه که در ماده فرومغناطیسی و یا نقطه بحرانی آب و یا ابرشارگی هلیوم می بینیم چند نمونه از پدیده های بسیار زیادی هستند که در آنها گذار فاز از نظم به بی نظمی اتفاق می افتد. می توان به این فهرست تعداد زیاد دیگری از پدیده ها را نیز افزود نظیر ابررسانایی، آلیاژهای دوگانه، مایعات مخلوط، تراوش و ده ها پدیده های دیگر. این گذارها منحصر به پدیده های فیزیکی نیستند. امروزه می توان گذار فاز نظم به بی نظمی را در سیستم های پیچیده اجتماعی و اقتصادی نیز مشاهده کرد. به عنوان مثال گسترش و فراگیر شدن یک بیماری، یک عقیده یا خواست اجتماعی، و یا بحران اقتصادی همگی نشان دهنده نمونه هایی از این دست هستند. خصلت های ویژه هر کدام از این پدیده ها را می توان به طور تفصیلی مطالعه کرد. برای چنین مطالعه ای ابزارها و مفاهیم و روش های خاص آن پدیده را می بایست به کار برد. نتایجی که از این نوع مطالعه نیز بدست می آید تنها برای همان نوع پدیده خاص اعتبار دارد. نمی توان همه آنچه را که در گذار فاز آب - بخار می دانیم برای مطالعه نحوه فراگیر شدن یک بیماری در سطح جامعه به کار ببریم یا نمی توان همه آنچه را که از گذار فاز ابررسانایی یاد می گیریم برای نحوه جدا شدن دو فلز در یک آلیاژ دوگانه به کار ببریم. از طرف دیگر آنچه که در طول بیش از نیم قرن گذشته معلوم شده آن است که این پدیده های بسیار متنوع و ناهمگون خصلت های عمومی و یکسانی نیز دارند که در یک چارچوب واحد قابل مطالعه هستند. این ویژگی های عمومی بستگی بسیار کمی به نوع ماده، و نوع گذار فازی که رخ می دهد دارند. این عدم وابستگی که از آن به عمومیت<sup>۱</sup> نام برده می شود نشان دهنده این است که این ویژگی ها با بنیادی ترین و عمیق ترین خصلت گذار فاز از نظم به بی نظمی مرتبط هستند. به این ترتیب وقتی که چنین ویژگی هایی را مطالعه می کنیم و یک نظریه برای توصیف آنها می سازیم، در واقع نه یک پدیده خاص بلکه یک نظریه عمومی برای توصیف گذار از بی نظمی به نظم را در یک سیستم بس ذره ای دلخواه تدوین می کنیم. ممکن است که در ابتدا از یک پدیده خاص شروع کنیم ولی نهایتاً به نظریه ای کلی می رسیم که این گذار را در کلی ترین شکل خود مطالعه می کند. در طول نیم قرن گذشته این مطالعه که به طور کلی با نام پدیده های بحرانی شناخته می شود نه تنها منجر به درک بهتر ما از گذار فاز شده بلکه یک دستاورد مهم و اساسی در فیزیک بنیادی نیز داشته است. در پرتو این نظریه است که اکنون درک عمیقی از نحوه مطالعه پدیده های مختلف فیزیکی در مقیاس های متفاوت داریم و می فهمیم که چگونه قوانین فیزیکی در مقیاس های مختلف تغییر می کنند و می توانیم نظریه های میدان کوانتومی و بازبهنجارش آنها را بهتر درک کنیم.

بنابراین در طول این درس بیش از آنکه به یک پدیده خاص و جزئیات آن توجه کنیم به خصلت های عمومی و کلی آن پدیده توجه می کنیم اگرچه عمدتاً توجه خود را به یک نوع گذار فاز یعنی گذار فاز فرومغناطیسی معطوف می کنیم چرا که تمامی مفاهیمی که برای درک نظریه پدیده های بحرانی لازم هستند را می توانیم با مطالعه این نوع پدیده بفهمیم.

### ۳ گذار فاز فرومغناطیسی

گروه خاصی از فلزات مثل آهن، کبالت و نیکل دارای این خاصیت هستند که اتم ها و مولکول های آنها دارای دوقطبی مغناطیسی دایمی هستند. فرومغناطیس ها دارای این خاصیت هستند که در آنها دو قطبی ها ی مجاور تمایل دارند که هم جهت شوند به عبارت دیگر انرژی برهم کنش این دو قطبی ها وقتی به کمترین مقدار خود می رسد که دوقطبی ها هم جهت شوند. اگر دما صفر باشد این برهم کنش ها ی نزدیک باعث هم جهت شدن همه دوقطبی ها در یک جهت معین می شود و در نتیجه ماده به صورت ماکروسکوپی یک مغناطش در یک جهت معین پیدا می کند. اما در دمای اتاق افت و خیزهای گرمایی باعث می شود که این دو قطبی ها نتوانند هم جهت شوند و در نتیجه مغناطش متوسط در هر ناحیه ای برابر با صفر است. می توان اثر افت و خیز گرمایی را که یک عامل بی نظم کننده است با اعمال میدان مغناطیسی کم تر کرد. هر چه که میدان مغناطیسی بیشتر و یا دما کمتر باشد مغناطش متوسط بیشتر خواهد بود. در دماهای نسبتا بالا مغناطش، میدان مغناطیسی و دما از یک رابطه ساده پیروی می کنند به این معنا که

$$M \propto \frac{B}{T} \quad (1)$$

که بخوبی نشان دهنده مقابله دو عامل نظم دهنده یعنی میدان مغناطیسی و بی نظم کننده یعنی دما است. البته این رابطه یک رابطه تقریبی است و در همه دما ها برقرار نیست. در واقع این رابطه بیان می کند که هرگاه میدان مغناطیسی برابر با صفر باشد مغناطش هم برابر با صفر می شود و حال آنکه آزمایش نشان می دهد که بشرطی که دما به اندازه کافی پایین باشد، حتی در میدان مغناطیسی صفر نیز مغناطش می تواند وجود داشته باشد. مغناطش پدیدآمده به این ترتیب را مغناطش خود بخود<sup>۲</sup> می نامند. به طور دقیق تر رفتار مغناطش، میدان مغناطیسی و دما با رابطه ای مثل

$$f(M, T, B) = 0 \quad (2)$$

مشخص می شود. رفتار این سه متغیر در شکل (۲.۳) نشان داده شده است. در این منحنی به خصوص منحنی مربوط به میدان مغناطیسی  $B = 0$  مهم است که نشان می دهد وقتی که دما به زیر یک دمای معین موسوم به دمای بحرانی  $T_c$  می رسد مغناطش خود بخود بوجود می آید. این مغناطش در یک جهت دلخواه و از پیش تعیین نشده پدیدار می شود. به دلیل اینکه میدان مغناطیسی برابر با صفر است و هیچ جهت مرجعی در فضا وجود

ندارد، پیدایش این مغناطش در یک جهت تصادفی به این معناست که تقارن دورانی در فضا شکسته شده است. این پدیده شکست تقارن خود بخود<sup>۳</sup> نامیده می شود. در درس های آینده درک بهتری از این پدیده پیدا خواهیم کرد. دقت کنید که در دمای  $T = T_c$  مغناطش به ناگهان غیر صفر نمی شود بلکه به صورت پیوسته ولی مشتق ناپذیر از مقدار صفر تغییر می کند. این تغییر پیوسته ولی نامشتق پذیر علامت یک گذار فاز مرتبه دوم<sup>۴</sup> یا گذار فاز پیوسته<sup>۵</sup> است. این تغییر فاز همراه با آزاد شدن یا جذب گرمای نهان نیز نیست و در گذار فاز سیستم از یک ناحیه همزیستی بین دو فاز عبور نمی کند. هر دو این خصوصیات از علامات گذار فاز پیوسته هستند.

نمونه گذار فاز نوع اول وقتی است که دما زیر نقطه بحرانی است و ما با افزایش میدان مغناطیسی از مقادیر منفی به مقادیر مثبت (در یک امتداد معین) جهت مغناطش را از منفی به مثبت تغییر می دهیم. ا در نتیجه این نوع گذار فاز گذار فاز مرتبه اول نامیده می شود. برای چنین گذاری داریم

$$M(B = \epsilon, T < T_c) - M(B = -\epsilon, T < T_c) = \text{finite} \quad (۳)$$

شکل (۳) دو مسیر متفاوت را که هر کدام مربوط به یک نوع گذار فاز هستند را نشان می دهد.

در مسیر  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  در میدان مغناطیسی صفر و با کاهش دما یک گذار فاز مرتبه دوم یا گذار فاز پیوسته رخ می دهد. از طرف دیگر مسیر  $D \rightarrow E \rightarrow E' \rightarrow D'$  یک گذار فاز نوع اول را نشان می دهد که در آن مغناطش به طور ناپیوسته تغییر می کند. نمونه هایی از این نوع گذار فازها در بسیاری از پدیده های دیگر نیز دیده می شود ولی آنچه که در مقدمه در باره گذار فاز و اهمیت آن گفتیم مربوط به گذار فاز پیوسته یا نوع دوم است و تمامی این درس نیز به مطالعه این نوع گذار فاز خواهد گذشت.

### ۱.۳ پارامتر نظم

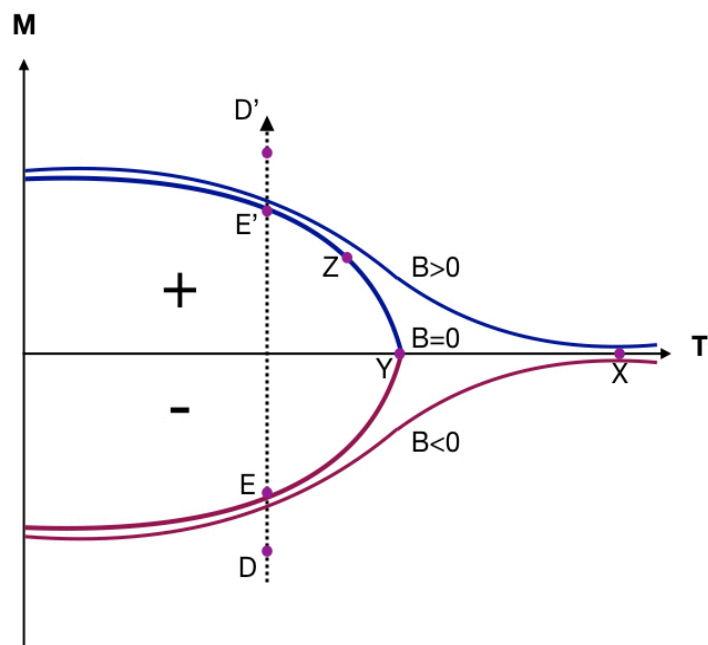
در پدیده حاضر مغناطش کل یا  $M$  کمیتی است که مقدار آن تعیین می کند که آیا ما در فاز بی نظم هستیم یا در فاز منظم. به همین دلیل این کمیت پارامتر نظم<sup>۶</sup> خوانده می شود. پارامتر نظم در واقع متوسط یک کمیت افت و خیز کننده است که در یک فاز مقدار متوسط آن صفر و در یک فاز دیگر مقدار آن غیر صفر است. این غیر صفر شدن به معنای این است که سیستم یک نوع نظم پیدا کرده است. چنانکه خواهیم دید در اغلب گذارهای فاز می توان پارامتر نظم را به راحتی شناسایی کرد.

<sup>۳</sup>Spontaneous Symmetry Breaking

<sup>۴</sup>Second Order Phase Transition

<sup>۵</sup>Continuous Phase Transition

<sup>۶</sup>Parameter Order

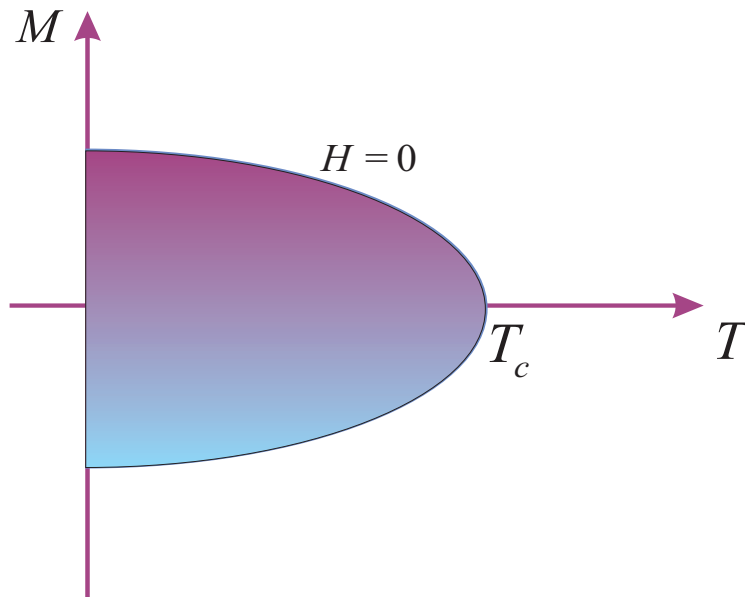


شکل ۱: مغناطش بر حسب دما در میدان های مغناطیسی متفاوت.

### ۲.۳ ناحیه بحرانی

در نزدیکی نقطه بحرانی ناحیه ای کوچک وجود دارد که آن را ناحیه بحرانی<sup>۷</sup> می نامیم. در این ناحیه است که همه رفتارهای جالب (از قبیل عمومیت و تقارن مقیاس) مشاهده می شوند. این که این ناحیه چقدر کوچک یا بزرگ است و چگونه می بایست آن را تعیین کرد، مسأله ای است که در درس های آینده به آن خواهیم پرداخت. فعلا یک متغیر کاهش یافته را که در واقع میزان نزدیکی به نقطه بحرانی است به صورت زیر تعریف

Critical Region<sup>۷</sup>



شکل ۲: مغناطش بر حسب دما در میدان مغناطیسی صفر: ناحیه رنگ شده ناحیه ای است که دو فاز باهم همزیستی دارند. نقطه بحرانی نقطه پایان این همزیستی است.

می کنیم:

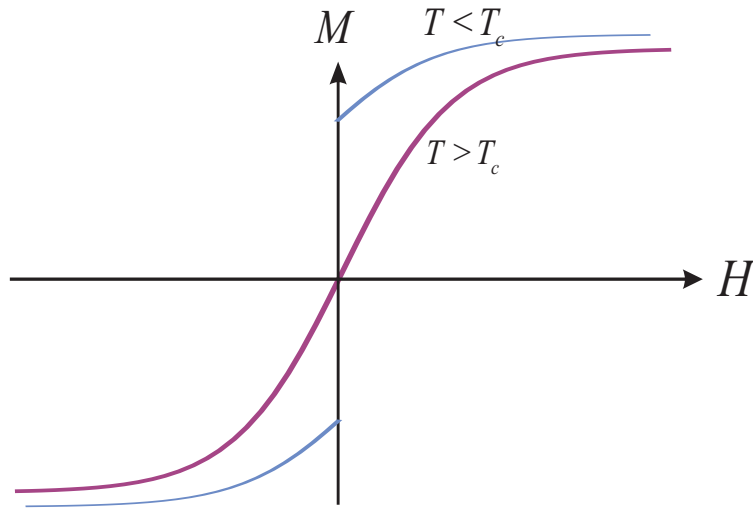
$$t := \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (4)$$

این کمیت را که یک کمیت بدون دیمانسیون است دمای کاهش یافته <sup>۸</sup> می نامیم.

### ۳.۳ نماهای بحرانی

فرض کنید که میدان مغناطیسی خارجی صفر و دما کمتر از دمای بحرانی است. در نتیجه سیستم دارای یک مغناطش خودبخودی است. همانطور که از شکل ۲.۳ پیداست با نزدیک شدن به دمای بحرانی مقدار مغناطش به تدریج کم شده و نهایتاً در نقطه بحرانی به صفر می رسد. از خود سوال می کنیم که این بستگی چگونه است. آزمایش های گوناگون نشان می دهند که این رفتار به صورت زیر است:

Reduced Temperature<sup>۸</sup>



شکل ۳: مغناطش برحسب میدان مغناطیسی در دماهای مختلف

$$M(t, H = 0) \sim t^\beta, \quad (5)$$

که در آن  $\beta$  یک نمای بحرانی خوانده می شود. علامت  $\sim$  به این معناست که ما به ضریب تناسبی که در این رابطه توانی وجود دارد علاقمند نیستیم. در واقع آنچه که مهم است نمای بحرانی  $\beta$  است چرا که این کمیت است که بین دسته وسیعی از سیستم ها مشترک است و حال آنکه ضریب تناسب چنین خاصیتی ندارد. به این ترتیب به تعریف اولین نمای بحرانی رسیده ایم که یک خاصیت عمومی را بیان می کند. این نما در واقع بیان می کند که با نزدیک شدن به دمای بحرانی (یا هر پارامتر دیگری که مثل دما عامل بی نظمی است و نقطه بحرانی را تعیین می کند) و در غیاب میدان نظم دهنده (در این جا میدان مغناطیسی) پارامتر نظم چگونه از بین می رود.

حال از یک زاویه دیگر به این موضوع نگاه می کنیم و آن اینکه دمای کاهش یافته را درست برابر با صفر قرار می دهیم و به کم شدن پارامتر نظم در اثر کاهش عامل نظم دهنده یعنی میدان مغناطیسی توجه می کنیم. آزمایشها نشان می دهند که این رابطه نیز یک رابطه توانی است:

$$M(t = 0, H) \sim H^{\frac{1}{\delta}} \quad (6)$$

که در آن  $\delta$  یک نمای بحرانی دیگر است.



می دانیم که بنا بر تعریف ضریب نفوذ پذیری به صورت زیر تعریف می شود:

$$\chi(T, H) := \frac{\partial M}{\partial H}(T, H) \quad (7)$$

حال از خود می پرسیم که ضریب نفوذ پذیری مغناطیسی چگونه رفتار می کند. برخلاف دو نمای پیشین این نما را می توان هم برای دمای بالاتر از دمای بحرانی و هم برای دمای پایین تر از آن تعریف کرد. ما علاقمند به نحوه رفتار این کمیت در غیاب میدان مغناطیسی هستیم. می خواهیم ببینیم که نظم بوجود آمده (در این جا مغناطش) چه مقدار نسبت به تغییرات عامل نظم دهنده (در این جا میدان مغناطیسی) حساس است و چقدر نسبت به آن واکنش نشان می دهد. مطابق با رابطه بالا هر چقدر که  $\chi$  بزرگ تر باشد به این معناست که نظم بوجود آمده حساسیت بیشتری نسبت به میدان مغناطیسی دارد و با تغییرات کوچک در میدان مغناطیسی می توان تغییرات بزرگی در مغناطش ایجاد کرد. این امر در واقع نشان دهنده این است که همه دوقطبی ها باهم هماهنگ شده و از میدان مغناطیسی خارجی به صورت هماهنگ پیروی می کنند. اگر به اختصار قرار دهیم

$$\chi := \chi(t, H = 0), \quad (8)$$

آزمایشهای بیشتر نشان می دهند که

$$\chi \sim t^{-\gamma}, \quad t > 0 \quad (9)$$

و

$$\chi \sim (-t)^{-\gamma'}, \quad t < 0 \quad (10)$$

که نشان می دهد برای نفوذپذیری مغناطیس دو نمای متفاوت یکی در دمای بالا و دیگری در دمای پایین تر از نقطه بحرانی وجود دارد. البته آزمایشهای متعدد نشان می دهند که این دو نما در حد خطای آزمایشی باهم مساوی هستند. یکی از کمیت های مهم ترمودینامیکی ظرفیت گرمایی ویژه است. این کمیت در واقع نشان می دهد که انرژی داخلی سیستم چگونه با تغییرات دما تغییر می کند. برای ظرفیت گرمایی ویژه نیز دو نمای بحرانی یکی در بالای نقطه بحرانی و دیگری در پایین دمای بحرانی تعریف می شود:

$$C \sim t^{-\alpha} \quad t > 0 \quad (11)$$

و

$$C \sim (-t)^{-\alpha'} \quad t < 0 \quad (12)$$

که در آن  $C := C(T, H = 0)$  ظرفیت گرمایی ویژه در میدان مغناطیسی صفر است. بازم نتایج آزمایشی نشان می دهند که این دو نما در حد خطای آزمایشی باهم مساوی هستند.

تا کنون چهار تا از نماهای بحرانی را برای سیستم های مغناطیسی تعریف کرده ایم. البته باید دقت کنیم که در یک گذار فاز معین همه این نوع نماها الزاما قابل تعریف یا اندازه گیری نیستند. دو نمای بحرانی مهم دیگر باقی مانده است که به نوعی اهمیت شان بیشتر از بقیه نماهاست. این دو نمای بحرانی به واگرایی طول همبستگی مربوط هستند و در واقع چنانکه در آینده خواهیم دید تمامی خصصت های مهم یک پدیده بحرانی ناشی از واگرایی طول همبستگی است. به همین دلیل می توان گفت که این دو نما از بقیه نماهای بحرانی مهم تر هستند. این دو نما به شکل زیر تعریف می شوند. مغناطش موضعی را در نقطه  $x$  با  $M(x)$  نشان می دهیم. این کمیت دارای افت و خیز گرمایی است و در یک نمونه همگن متوسط گرمایی این کمیت همان چیزی است که ما قبلا آن را با  $M$  نشان داده ایم یعنی

$$M := \langle M(x) \rangle. \quad (13)$$

طبیعی است که  $\langle M(x) - M \rangle = 0$ .

کمیتی که به آن علاقمند هستیم همبستگی مغناطش موضعی بین دو نقطه است. این کمیت تعیین می کند که میزان افت و خیزها در نقاط مختلف چقدر هم بستگی دارند. این کمیت به صورت زیر تعریف می شود:

$$G_c(x, y) := \langle (M(x) - M)(M(y) - M) \rangle = \langle M(x)M(y) \rangle - \langle M(x) \rangle \langle M(y) \rangle. \quad (14)$$

دقت کنید که در دماهای خیلی بالا وقتی که بی نظمی حاکم است مقدار این کمیت صفر است زیرا دوقطبی های مغناطیسی در هر نقطه ای رفتار کاملا نامنظمی دارند. این کمیت هم چنین در دماهای خیلی پایین تر از نقطه بحرانی نیز به سمت صفر میل می کند زیرا در این دماها تمام دوقطبی ها در یک راستا منظم می شوند. در چنین شرایطی اگرچه مقدار  $G(x, y) := \langle M(x)M(y) \rangle$  خیلی بزرگ می شود، تفاوت آن با  $\langle M(x) \rangle \langle M(y) \rangle$  به سمت صفر میل می کند.

$G(x, y)$  تابع همبستگی دو نقطه ای و  $G_c(x, y)$  تابع همبستگی دو نقطه ای متصل خوانده می شوند. رفتار کلی این تابع در فاصله های بزرگ به صورت زیر است:

$$G_c(x, y) \sim \frac{e^{-\frac{|x-y|}{\xi}}}{|x-y|^{d-2+\eta}}, \quad (15)$$

که این رابطه یک نمای جدید یعنی  $\eta$  را معرفی می کند. در این رابطه  $\xi$  طول همبستگی نامیده می شود. در نزدیکی نقطه بحرانی این طول بسیار بزرگ می شود و در خود نقطه بحرانی به سمت بی نهایت میل می کند. نحوه واگرا شدن این طول همبستگی نسبت به دما آخرین نمای بحرانی را به صورت زیر تعریف می کند:

$$\xi \sim t^{-\nu}. \quad (16)$$

به این ترتیب برای سیستم فرومغناطیسی تعداد شش نمای بحرانی تعریف می شوند که عبارت اند از:

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \nu. \quad (17)$$

بهرتاست که در این جا نمونه ای از مقادیر عددی و آزمایشی این نماها را ذکر کنیم. برای یک فرومغناطیس سه بعدی مثل آهن یا نیکل یا  $YFeO_3$  مقادیر آزمایشی این نماها عبارتند از:

$$\alpha \approx -0.12, \beta \approx 0.34, \gamma = \gamma' \approx 1.33, \delta \approx 4.2, \eta \approx 0.07, \nu \approx 0.69. \quad (18)$$

### ۴.۳ تقارن مقیاس

در درس های آینده به تفصیل در باره تقارن مقیاس و معنای فیزیکی آن سخن خواهیم گفت. در این بخش می خواهیم تنها به صورت تحلیلی این تقارن توجه کنیم و ببینیم چه نتیجه ای از آن می توان گرفت. می دانیم که با نزدیک شدن به نقطه بحرانی پارامتر نظم می تواند به صورت های گوناگون به سمت صفر میل کند. مثلاً این رابطه می تواند به شکل زیر باشد:

$$M = M_0 e^{-\frac{1}{t}} \quad (19)$$

یا

$$M' = M_0 t^\beta. \quad (20)$$

هر دو رابطه وقتی که  $t$  به سمت صفر میل می کند نشان می دهند که  $M$  به سمت صفر میل می کند و در هر دو نیز  $t$  یک پارامتر بدون بعد است. چه فرقی بین این دو رابطه وجود دارد؟ چرا رابطه دوم نشان دهنده تقارن مقیاس است ولی اولی نیست؟ برای درک این تفاوت بیایید بینیم وقتی که  $t$  را مثلا دو برابر می کنیم مقدار پارامتر نظم در هر کدام از موارد بالا چه گونه تغییر می کند. در حالت اول داریم:

$$\frac{M(2t)}{M(t)} = e^{-\frac{1}{2t} + \frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{2t}}, \quad \frac{M(4t)}{M(2t)} = e^{-\frac{1}{4t} + \frac{1}{2t}} = e^{\frac{1}{4t}} \quad (21)$$

ولی در مورد دوم داریم:

$$\frac{M'(2t)}{M(t)} = 2^\beta, \quad \frac{M'(4t)}{M(2t)} = 2^\beta. \quad (22)$$

در مورد اول می بینیم که این نسبت به  $t$  بستگی دارد که به این معناست که وقتی که  $t$  را دو برابر می کنیم  $M$  بسته به این که در کدام بازه اندازه گرفته شده باشد تغییراتش متفاوت است ولی در مورد دوم همواره وقتی که  $t$  را دو برابر می کنیم میزان تغییرات  $M'$  در همه بازه ها یکسان است. به این ترتیب در مورد دوم وقتی که مقیاس تغییرات دما را دو برابر می کنیم  $M$  هیچ تغییری نکرده است و حال آنکه در مورد اول چنین چیزی امکان پذیر نیست.

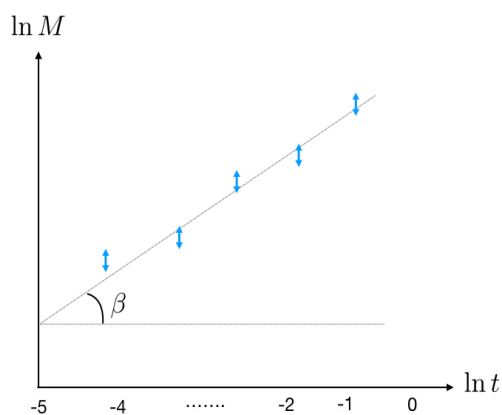
### ۵.۳ اندازه گیری نماهای بحرانی

اگر به مقادیر عددی نماهای بحرانی که از آزمایش ها بدست می آیند نگاه کنیم متوجه می شویم که این نماها را با دقت یک یا حد اکثر دو رقم اعشار می دانیم که به نظر می رسد در مقایسه با دیگر کمیت های فیزیکی که می شناسیم دقت خیلی کمتری دارد. خیلی از کمیت های بنیادی مثل بار و جرم الکترون یا بار و جرم پروتون یا کمیت های غیر بنیادی مثل مقاومت الکتریکی مواد مختلف یا فاصله شبکه جامدات مختلف را می توان با دقت خیلی بیشتری اندازه گیری کرد. دلیل این امر چیست؟ برای فهم این موضوع می بایست به یکی از رابطه های نمایی نگاه می کنیم مثلا به رابطه  $M \sim t^\beta$ . برای تعیین  $\beta$  در آزمایشگاه این رابطه را به صورت

$$\log M = c + \beta \log t \quad (23)$$

می نویسیم که در آن  $c$  یک ثابت است. این رابطه در یک گراف لگاریتم-لگاریتم به صورت یک خط راست نشان داده می شود و هدف ما پیدا کردن شیب این خط است، شکل (۵.۳). برای اینکه شیب خط را با دقت تعیین کنیم احتیاج به چند نقطه داریم. هرچه که تعداد این نقاط و فاصله آنها از هم زیادتر باشد می توان شیب خط را با دقت بیشتری تعیین کرد. اما نقاط بیشتر در مقیاس لگاریتمی به این معناست که

می بایست به دمای بحرانی بسیار نزدیک شد. از آنجا که  $t$  کوچکتر از یک است،  $\log t$  یک عدد منفی است و اگر این عدد مقادیر  $-1, -2, -3, -4, -5, -6$  را اختیار کند به این معناست که  $M$  را در دماهای زیر اندازه گیری کرده ایم:



شکل ۴: دیاگرام لگاریتمی برای پیدا کردن نمای بحرانی  $\beta$ .

$$T = T_c(1.1), \quad T = T_c(1.01), \quad T = T_c(1.001), \quad T = T_c(1.0001), \quad T = T_c(1.00001), \quad T = T_c(1.000001). \quad (۲۴)$$

در آینده خواهیم دید که هر چه به دمای بحرانی نزدیک تر می شویم زمان پاسخ سیستم، یعنی زمانی که طول می کشد تا سیستم به تغییرات خارجی پاسخ دهد و خود را با پارامترهای خارجی تطبیق دهد طولانی تر می شود و در حقیقت با نزدیک شدن به دمای بحرانی این زمان به سمت بی نهایت میل می کند. به همین دلیل است که بدست آوردن نقاط بیشتر و رسم دقیق تر خط و تعیین شیب آن سخت تر و سخت تر می شود. این پدیده را «آهستگی بحرانی»<sup>۹</sup> می نامند.

دشواری اندازه گیری نماهای بحرانی در بعضی از موارد باعث می شود که ما نتوانیم نحوه واگرا شدن یک کمیت مثل ظرفیت گرمایی ویژه را به خوبی تشخیص ندهیم. برای روشن تر شدن این موضوع به شکل ( ) نگاه می کنیم. وقتی که ظرفیت گرمایی واگرا می شود به دشواری می توان

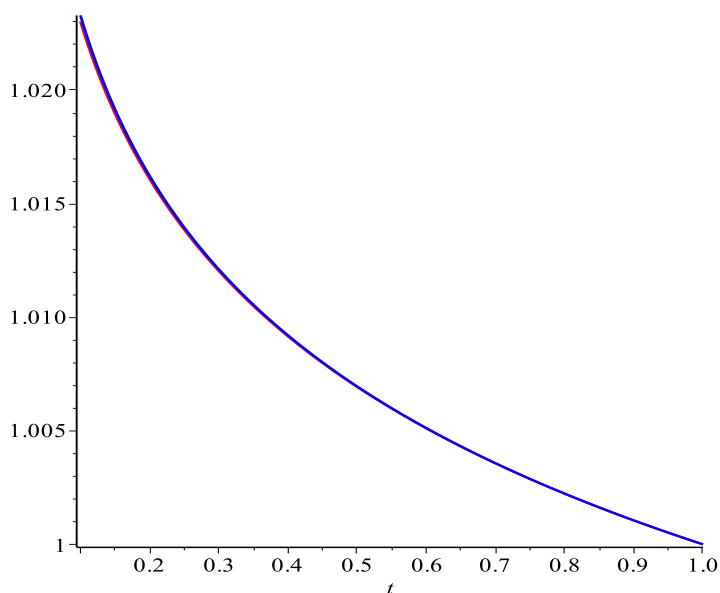
<sup>۹</sup>Critical Slowing Down

تشخیص داد که مطابق با کدام یک از منحنی های نشان داده شده رفتار می کند. برای چنین تشخیصی می بایست بسیار بسیار به نقطه بحرانی نزدیک شد و این به دلایلی که در بالا گفتیم سخت است. در این جا نشان می دهیم که هر سه نوع منحنی را می توان با بیان اینکه ظرفیت گرمایی ویژه با نمای صفر واگرا می شود باهم متحد کرد. برای فهم این موضوع به این اتحاد دقت می کنیم:

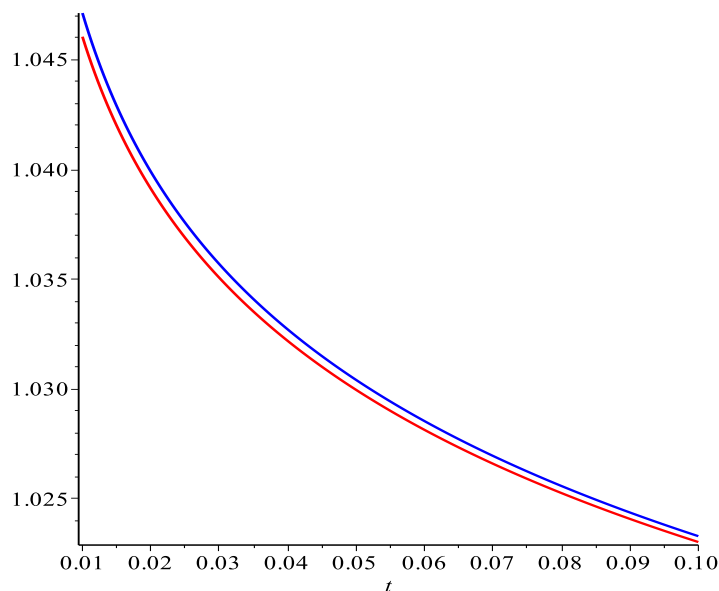
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} t^{-\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 1 - \alpha \ln t \quad (۲۵)$$

بنابراین وقتی که  $t$  خیلی کوچک می شود معلوم نیست که آیا رفتار  $C$  به صورت یک تابع نمایی  $t^{-\alpha}$  با  $\alpha$  نمای خیلی کوچک است یا مثل یک تابع لگاریتی با ضریب  $\alpha$  خیلی کوچک.

این موضوع در شکل های (۵.۳) تا (۵.۳) نشان داده شده است.



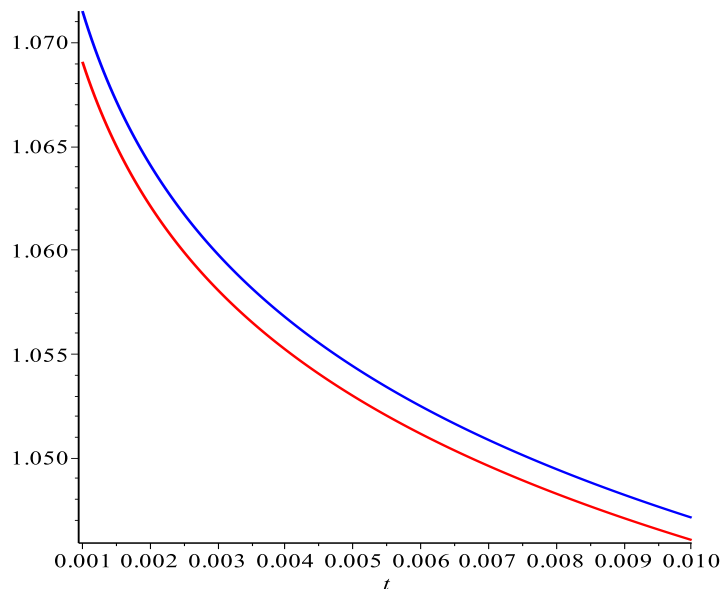
شکل ۵: منحنی آبی رنگ تابع  $t^{-0.01}$  را نشان می دهد و منحنی قرمز رنگ تابع  $1 - 0.01 \log(t)$  را نشان می دهد. دیده می شود که در فاصله قید شده این دو منحنی کاملاً برهم منطبق هستند.



شکل ۶: منحنی آبی رنگ تابع  $t^{-0.01}$  را نشان می دهد و منحنی قرمز رنگ تابع  $1 - 0.01 \log(t)$  را نشان می دهد. وقتی به نقطه بحرانی نزدیک می شویم این دو منحنی شروع به تمایز از یکدیگر می کنند.

### ۶.۳ شکست تقارن

بسیاری از گذارهای فاز همراه با شکست تقارن هستند. معنای این گزاره چیست؟ موجودی میکروسکوپی و خیالی را در نظر بگیرید که در آب زندگی می کند. وقتی که دمای آب بالاتر از دمای انجماد آب است دنیای این موجود میکروسکوپی تقارن کامل کروی و انتقالی دارد. همه جای محیط اطرافش مثل هم و هم جهت ها نیز مثل هم هستند. وقتی که دما به زیر نقطه انجماد می رسد و آب یخ می بندد به ناگهان دنیای این موجود کوچک تغییر می کند و جهت های گوناگون دیگری نیستند. هم چنین چون یخ یک ساختمان بلوری دارد تقارن انتقالی نیز دیگر وجود ندارد. بنابراین در اثر گذار فاز این تقارن ها شکسته شده اند. یک نمونه دیگر از شکست تقارن وقتی است که یک ماده فرومغناطیس دچار گذار فاز می شود. در دمای بالاتر از دمای بحرانی، دوقطبی های مغناطیسی در همه جهات پراکنده شده اند و هیچ جهت خاصی را بر جهت دیگر ترجیح نمی دهند. دنیای اطراف یک موجود میکروسکوپی کاملاً تقارن کروی دارد. اما وقتی که دما به زیر دمای بحرانی می رسد دوقطبی ها در یک جهت خاص شروع به منظم شدن می کنند و مغناطش در یک راستا پدیدار می شود و این راستا بر راستاهای دیگر امتیاز پیدا می کند. این جهت کاملاً به طور تصادفی اختیار می شود به نحوی که اگر یک بار دیگر آزمایش را تکرار کنیم مغناطش خودبخود در یک جهت دیگر بوجود می آید که هیچ



شکل ۷: منحنی آبی رنگ تابع  $t^{-0.01}$  را نشان می دهد و منحنی قرمز رنگ تابع  $1 - 0.01 \log(t)$  را نشان می دهد. این دو منحنی وقتی از هم قابل تشخیص می شوند که خیلی به نقطه بحرانی نزدیک شویم.

ربطی به جهت قبلی ندارد. این پدیده یعنی شکست خود بخود تقارن  $^{10}$  در بسیاری از گذار فازها وجود دارد و ما در درسهای آینده در باره آن به تفصیل صحبت خواهیم کرد. البته باید توجه داشت که بعضی از گذار فازها نیز چنین پدیده ای را از خود نشان نمی دهند مثل تبدیل بخار به آب که در هر دو مورد تقارن کروی وجود دارد. هم چنین اخیراً نیز دسته ای از گذار فازها موسوم به گذار فاز توپولوژیک کشف شده اند که همراه با شکست تقارن نیستند.

### ۷.۳ شکست تقارن و خاصیت ارگودیک

چرا شکست تقارن از لحاظ نظری عجیب است؟ چرا این موضوع احتیاج به توجیه و توصیف زیربنایی دارد؟ برای فهم این موضوع به یک مثال ساده یعنی پدیده فرومغناطیس توجه می کنیم. برهم کنش اتم های یک ماده جامد که باعث ایجاد پدیده فرومغناطیس می شود را می توان به خوبی

<sup>۱۰</sup> Spontaneous Symmetry Breaking



با هامیلتونی زیر توصیف کرد:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (26)$$

که در آن  $\mathbf{S}_i$  دوقطبی دائمی اتمی است که در نقطه  $i$  از شبکه قرار دارد و  $J$  ثابت برهم کنش است. دوقطبی دائمی اتم ها با اسپین آنها متناسب است. همانطور که دیده می شود این هامیلتونی تحت دوران همه اسپین ها تغییر نمی کند. یعنی اینکه

$$H(\{\mathbf{S}_i\}) = H(\{\mathbf{S}'_i\}), \quad (27)$$

که در آن  $\mathbf{S}'_i = R\mathbf{S}_i$  و  $R$  یک عملگر دوران است. می دانیم که بنا بر مکانیک آماری وقتی که سیستمی در دمای  $T$  قرار دارد همه هیث های ممکن با احتمال بولتزمن اشغال می شوند یعنی اینکه

$$P(\{\mathbf{S}_i\}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\{\mathbf{S}_i\})} \quad (28)$$

تقارن ۲۷ نتیجه اش این است که

$$P(\{\mathbf{S}_i\}) = P(\{\mathbf{S}'_i\}) \quad (29)$$

یعنی همه حالت هایی که با دوران اسپین ها از یک دیگر بدست می آیند هم احتمال هستند. از جمله یک نتیجه این تقارن این است که

$$P(\{\mathbf{S}_i\}) = P(\{-\mathbf{S}_i\}) \quad (30)$$

زیرا با یک دوران به اندازه  $180^\circ$  درجه حول یک محور می توان همه اسپین ها را به منهای خود آنها تبدیل کرد. چنین تقارنی معنایش این است که متوسط اسپین ها در حالت تعادل می بایست صفر باشد. از طرفی می بینیم که در دمای پایین تر از گذار فاز متوسط اسپین ها یا متوسط مغناطش غیر صفر می شود و به اصطلاح شکست تقارن رخ می دهد. سوالی که پیش روی ماست این است که چگونه می بایست این شکست تقارن را با توجه به اصول مسلم مکانیک آماری توضیح دهیم؟ برای توضیح این پدیده می بایست به اصل موضوع مکانیک آماری برگردیم و مبنای رابطه ۲۸ را خوب بفهمیم.

می دانیم که رابطه (۲۸) برای سیستم هایی است که در دمای ثابت قرار دارند. این رابطه از یک اصل کلی تر در مکانیک آماری استخراج می شود که بر مبنای آن یک سیستم بسته که در حال تعادل است همه میکرواحالت هایش را با احتمال یکسان اشغال می کند. بنابراین اگر بخواهیم

مبنای شکست تقارن را بفهمیم می بایست مبنای این اصل را بفهمیم. هامیلتونی یک سیستم چه در مکانیک کوانتومی و چه در مکانیک کلاسیک تابعی است که باعث تحول آن سیستم در فضای فاز می شود. فضای فاز با توجه به درجات آزادی یک سیستم تعیین می شود. به عنوان مثال برای یک گاز که شامل  $N$  اتم است هر نقطه از فضای فاز با  $6N$  متغیر مشخص می شود. در هر لحظه وضعیت کل سیستم (در اینجا کل اتم های گاز) با یک نقطه در این فضای بزرگ تعیین می شود. هامیلتونی سیستم باعث حرکت این نقطه در فضای فاز می شود. به دلیل شرایط مرزی (دیواره ها)، و هم چنین وجود نقص ها و ناخالصی ها و برهم کنش های کوچکی که الزاما در هامیلتونی ایده آل سیستم نوشته نشده اند نقطه نماینده این سیستم یک مسیر بسیار کاتوره ای را در فضای فاز طی می کند، شکل (۳۴). به عنوان مثال در مورد یک گاز ایده آل برخورد بین ذرات و بین ذرات و دیواره ها باعث می شود که مسیر نقطه نماینده سیستم از یک خط راست به یک مسیر زیگزاکی و کاتوره ای همراه با شکستگی های خیلی زیاد تبدیل شود. فاصله زمانی بین این زیگزاک ها چیزی در حدود زمان پویش آزاد میانگین اتم ها و فاصله مکانی بین آنها در حدود فاصله پویش آزاد اتم ها است. این مسیر به تدریج و با یک مقیاس زمانی که بستگی به سیستم مورد بحث دارد فضای فاز را پر می کند. در چنین حالتی می توان گفت که وقتی که سیستم به حالت تعادل می رسد این نقطه نماینده تمام فضای فاز را کم و بیش پر می کند و در فاصله زمانی ای که ما یک کمیت ماکروسکوپی از سیستم را مشاهده می کنیم نقطه نماینده سیستم تقریبا تمام فضای فاز را طی می کند. بیابید مختصات نقطه نماینده سیستم را به اختصار با  $x$  نشان دهیم با قبول این نکته که  $x$  نشان دهنده مجموعی از مختصات است. تحت این شرایط هرگاه بخواهیم متوسط یک کمیت مثل  $A(x)$  را حساب کنیم باید بنویسیم:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T} \int A(x(t)) dt \quad (31)$$

که در آن  $T$  زمانی است که طول کشیده است که کمیت  $A$  اندازه گیری شود. دقت کنید که ممکن است که این زمان در مقیاس ماکروسکوپی خیلی کوتاه باشد ولی در مقیاس میکروسکوپی بی اندازه بزرگ باشد. در چنین شرایطی می نویسیم:

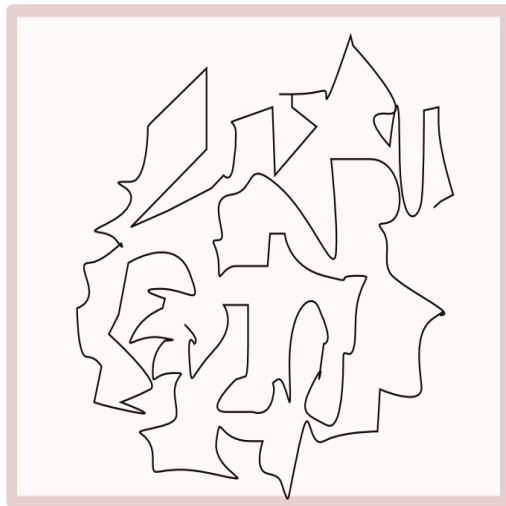
$$\langle A \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int A(x(t)) dt. \quad (32)$$

این محاسبه به این معناست که تحول کمیت  $A$  را همراه با حرکت نقطه نماینده سیستم در تمام طول مسیر دنبال کرده و سپس متوسط کمیت  $A$  را محاسبه می کنیم. حال اگر  $T$  واقعا نسبت به زمان مشخصه تحول سیستم بزرگ باشد می توانیم این متوسط را بجای اینکه روی مسیر حرکت دنبال کنیم با اتکا به این که مسیر حرکت تمام فضای فاز را پر کرده است به صورت زیر حساب کنیم:

$$\langle A \rangle = \int dx A(x) \rho(x), \quad (33)$$

که در آن  $\rho(x)$  چگالی احتمال این است که نقطه نماینده سیستم در نقطه  $x$  و در ناحیه ای به حجم  $dx$  باشد. این که این دو نوع متوسط باهم

مساوی هستند در واقع یک فرض است که به آن فرض ارگودیک<sup>۱۱</sup> می‌گوییم. این فرض را برای سیستم‌های خیلی ساده مثلا سیستمی که دارای یک ذره است می‌توان به طور دقیق ثابت کرد ولی برای سیستم‌های بزرگ‌تر اثباتی برای آن وجود ندارد.



شکل ۸: نمایشی از اصل ارگودیک. در زمان‌های به اندازه کافی طولانی مسیر یک سیستم بسته در فضای فاز تقریباً تمام فضای فاز را می‌پوشاند و با احتمال یکسان می‌توان نقطه نماینده سیستم را در هر جایی از فضای فاز پیدا کرد.

در مکانیک آماری یاد می‌گیریم که برای سیستمی که در دمای ثابت قرار دارد،  $\rho(x)$  برابر است با

$$\rho(x) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(x)}. \quad (۳۴)$$

حال می‌توانیم بفهمیم که چرا شکست تقارن رخ می‌دهد. فرض کنید که  $H(x) = H(-x)$  باشد. این یک تقارن هامیلتونی است. بنابراین از بحث بالا به دست می‌آوریم که  $\langle x \rangle = 0$  اما اگر در عمل ببینیم که  $\langle x \rangle \neq 0$  است به این معناست که خاصیت ارگودیک برقرار نیست یا به عبارت دیگر شکسته شده است<sup>۱۲</sup>. معنای این حرف این است که نقطه نماینده سیستم در طول مسیر حرکت خود به ناحیه‌ای رفته که در آنجا مثلا  $x$  مقدارهای مثبت دارد و در آنجا گیر افتاده است یعنی روند دینامیک در آن ناحیه آنقدر کند بوده است (در مقایسه با زمان مشاهده ما) که این

<sup>۱۱</sup>Hypothesis Ergodic  
<sup>۱۲</sup>Ergodicity Breaking

نقطه نتوانسته است به ناحیه های منفی نیز برسد. به این دلیل است که متوسط مقدار غیر صفر اختیار کرده است و تقارن شکسته شده است.

## ۴ گذار فاز پادفرمغناطیسی

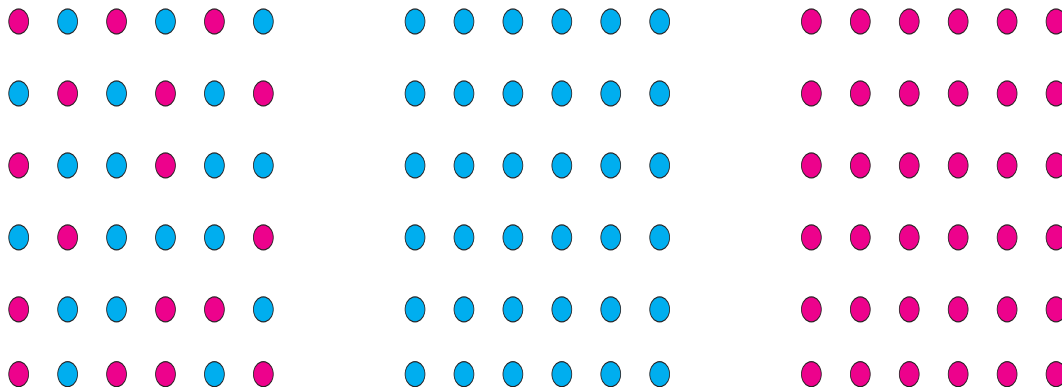
در بعضی از مواد تمایل دوقطبی های مجاور این است که در خلاف جهت هم قرار گیرند. هرگاه شبکه ای که این دوقطبی ها روی آن قرار گرفته اند یک شبکه دوقسمتی<sup>۱۳</sup> باشد، آنگاه حالت منظم این چنین ماده ای این است که روی یکی از زیرشبکه ها اسپین ها در یک جهت و روی زیرشبکه دیگر اسپین ها در جهت مخالف قرار گرفته باشند. یادآوری می کنیم که یک شبکه دوقسمتی شبکه ای است که از دو زیرشبکه  $A$  و  $B$  تشکیل شده به قسمتی که هر نقطه روی شبکه  $A$  فقط با نقاط شبکه  $B$  همسایه نزدیک است و بالعکس. حالت نامنظم برای این ماده این است که اسپین ها مستقل از این که متعلق به کدام زیر شبکه هستند در جهات مختلف قرار می گیرند. در دماهای بالا سیستم کاملاً بی نظم است ولی وقتی که دما را پایین می آوریم در پایین تر از یک دمای بحرانی، نظم خود بخود پدیدار می شود. برای سادگی باز هم فرض می کنیم که اسپین ها فقط در یک امتداد قرار می گیرند و مقدار آنها را در این امتداد با  $s$  یا  $-s$  نشان می دهیم. برای چنین سیستمی نمی توان پارامتر نظم را به همان صورت فرمغناطیس ها تعریف کرد. در واقع اگر تعریف کنیم که  $M = \langle \sum_i s_i \rangle$  براحتی معلوم می شود که متوسط  $M$  هم در حالت منظم و هم در حالت بی نظم برابر با 0 است. به این ترتیب این کمیت نمی تواند فاز منظم را از فاز بی نظم تشخیص دهد. اما می توانیم یک کمیت دیگر تشکیل دهیم که به آن مغناطش متناوب<sup>۱۴</sup> می گوئیم. این کمیت به صورت زیر تعریف می شود:

$$M_s := \left\langle \sum_{i \in A} s_i - \sum_{i \in B} s_i \right\rangle. \quad (35)$$

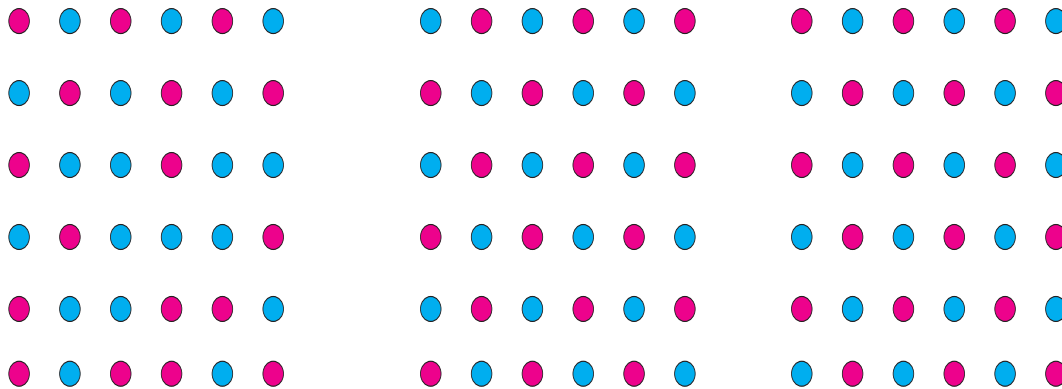
این کمیت در فاز بی نظم برابر با صفر است و در فاز کاملاً منظم بیشینه مقدار خود را پیدا می کند. اگر تعداد نقاط شبکه برابر با  $N$  و اندازه هر اسپین نیز برابر با 1 باشد مقدار بیشینه  $M$  برابر با  $N$  خواهد شد. برای این کمیت می توان هم چنان نماهای  $\alpha$  و  $\beta$  را تعریف کرد ولی نمی توان نماهایی مثل  $\delta$  یا  $\gamma$  را برای آن تعریف یا اندازه گیری کرد. دلیل این امر هم این است که نمی توان برای چنین سیستمی یک میدان نظم دهنده مثلاً میدان مغناطیسی متناوب تعریف کرد که بتواند اسپین ها را یک در میان به سمت بالا و پایین منظم کند. از آنجا که چنین میدانی وجود ندارد نمی توان به چگونگی تغییر مغناطش متناوب با آن فکر کرد.

<sup>۱۳</sup>Bi-Partite

<sup>۱۴</sup>Staggered Magnetization



شکل ۹: فازهای مختلف در یک ماده فرومغناطیس: سمت چپ: فاز بی نظم، وسط فازي که در آن مغناطش مقدار مثبت یک دارد، سمت راست فازي که مغناطش مقدار منفي یک دارد.



شکل ۱۰: فازهای مختلف در یک ماده پادفرومغناطیس. پارامتر نظم در اینجا مغناطش متناوب است. سمت چپ فاز بی نظم را نشان می دهد. وسط فازي که در آن مغناطش متناوب برابر با یک و سمت راست فازي را نشان می دهد که در آن مغناطش متناوب منفي یک است. .

## ۵ گذار فاز آلیاژ دوگانه

آلیاژ دوگانه <sup>۱۵</sup> آلیاژی است که از دو نوع فلز که آن ها را در اینجا  $A$  و  $B$  می نامیم تشکیل شده است. در این جا برای سادگی بحث فرض می کنیم که شبکه ای که این آلیاژ روی آن تشکیل شده است یک شبکه دوقسمتی <sup>۱۶</sup> است. ساختار چنین شبکه ای به این صورت است که می توان آن را به دو زیر شبکه مجزا که آنها را نوع 1 و نوع 2 می نامیم تقسیم کرد. هر نقطه از زیر شبکه 1 با نقاط زیر شبکه 2 همسایه است و بالعکس. به عنوان مثال شبکه مکعبی یک شبکه دوقسمتی است. در دماهای بالا اتم های  $A$  بین این دو زیر شبکه تقریباً به طور مساوی تقسیم می شوند. اتم های نوع  $B$  نیز به همین نحو تقسیم می شوند. یعنی اگر توجه خود را تنها به یکی از زیر شبکه ها معطوف کنیم به همان اندازه اتم های نوع  $A$  در آن می بینیم که اتم های نوع  $B$ . اما وقتی که دما را پایین می آوریم یک دمای بحرانی فرا می رسد که پایین تر از آن اتم های نوع  $A$  و  $B$  بتدریج شروع به جمع شدن در یکی از این زیر شبکه ها می کنند. این نحوه تجمع نیز کاملاً تصادفی است و مثل حالت فرومغناطیس به دو صورت ممکن قابل حصول است. با این توصیف ها براحتی می توان حدس زد که پارامتر نظم را چگونه باید تعریف کرد که مقدار آن نشان دهنده مقدار نظم یا بی نظمی موجود در این سیستم باشد. برای این کار تعداد اتم های نوع  $A$  و نوع  $B$  را در یکی از این زیر شبکه ها مثلاً زیر شبکه 1 را با  $N_A$  و  $N_B$  نشان می دهیم. در حالت بی نظم داریم

$$N_A - N_B = 0 \quad (۳۶)$$

در حالت منظم این تعداد برابر است با

$$N_A - N_B = \pm N \quad (۳۷)$$

که در آن  $N$  تعداد نقاط زیر شبکه 1 است. می توانیم پارامتر نظم را طوری تعریف کنیم که درست شبیه فرومغناطیس باشد بنابراین قرار می دهیم:

$$m := \frac{N_A - N_B}{N} \quad (۳۸)$$

که در نتیجه مقدار این پارامتر نظم در فاز بی نظم برابر با صفر و در فاز کاملاً منظم مقدار  $\pm 1$  خواهد بود. برای چنین سیستمی نماهای بحرانی درست مثل سیستم فرومغناطیسی تعریف می شوند با این تفاوت که نقش میدان مغناطیسی را در اینجا فشار ایفا می کند.

---

<sup>۱۵</sup> Binary Alloy  
<sup>۱۶</sup> Bi-partite

## ۶ گذار فاز بخار مایع

شکل های (۱۱) و (۱۲) دیاگرام فاز یک مایع معمولی مثل آب را نشان می دهند. در این شکل ناحیه های یخ، آب و بخار مشخص شده اند. این دیاگرام در واقع مقطع حجم ثابت از یک شکل سه بعدی است که به طور کامل نشان می دهد در هر مقداری از دما، حجم و فشار آب در چه فازی قرار دارد. منحنی های رسم شده در شکل (۱۱) در واقع ناحیه های همزیستی فازهای متفاوت هستند. به عنوان مثال در شکل (۱۲) منحنی  $AB$  ناحیه همزیستی بخار و آب را نشان می دهد. عبور از این خط ها همواره با آزاد شدن یا جذب گرمای نهان همراه است. به تدریج که در طول این خط بالا می رویم و به نقطه  $B$  می رسیم پهنای ناحیه همزیستی کم تر و کم تر شده و در نقطه  $B$  ( در دمای  $T_c = 647^\circ$  و فشار  $P_c = 218 \text{Atm}$  ) این پهنای دقیقاً صفر می شود. پارامتر نظم در این نوع گذار فاز تفاوت بین چگالی مایع و بخار است یعنی  $\rho_l - \rho_g$ . برای این نوع گذار فاز نقطه بحرانی با دمای  $T_c = 647^\circ$  و فشار  $P_c = 218 \text{Atm}$  مشخص می شود.

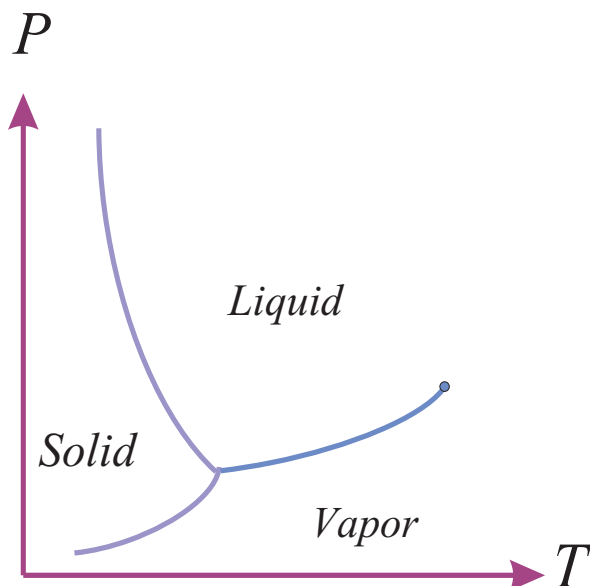
## ۷ گذار فاز هلیوم

به طور طبیعی اتم های هلیوم در دو ایزوتوپ جداگانه  $^3\text{He}$  و  $^4\text{He}$  یافت می شوند. هسته  $^4\text{He}$  دارای دو نوترون و دو پروتون و هسته  $^3\text{He}$  دارای دو پروتون و یک نوترون است. در حالت پایه اتم های هلیوم - چهار بوزون و اتم های هلیوم - سه فرمیون هستند. در دماهای پایین این دو نوع هلیوم از خود گذار فاز نشان می دهند ولی گذار فاز آنها با هم اندکی متفاوت است. نخست گذار فاز هلیوم - چهار را توضیح می دهیم. سپس گذار فاز ابررسانایی را توضیح می دهیم و دست آخر به توضیح گذار فاز هلیوم - سه می پردازیم که توضیح آن متکی است بر آنچه که در مورد ابررسانایی خواهیم آموخت.

### ۱.۷ گذار فاز $^4\text{He}$

در دماهای بالاتر از حدود ۲ درجه کلوین هلیوم چهار یک مایع معمولی است که مثل همه مایعات دیگر مقدار معینی ویسکوزیته یا گرانشی دارد. وقتی که دما به زیر این مقدار می رسد ( که البته مقدار دقیق اش به فشار بستگی دارد) یک فاز دیگر از مایع هلیوم شروع به پیدایش می کند درست همانگونه که با پایین تر رفتن از دمای بحرانی در آب بخار شروع به پیدایش می کند. این فاز دیگر مایعی است که گرانشی اش صفر است. با کاهش بازهم بیشتر دما حجم این مایع که به آن ابرشاره می گوئیم نسبت به مایع معمولی افزایش یافته و سرانجام کل مایع ابرشاره می شود. در واقع این پدیده همان چیزی است که در مکانیک آماری به آن چگالش بوز-اینشتین<sup>۱۷</sup> می گویند. وقتی که دما از یک دمای بحرانی پایین تر می آید

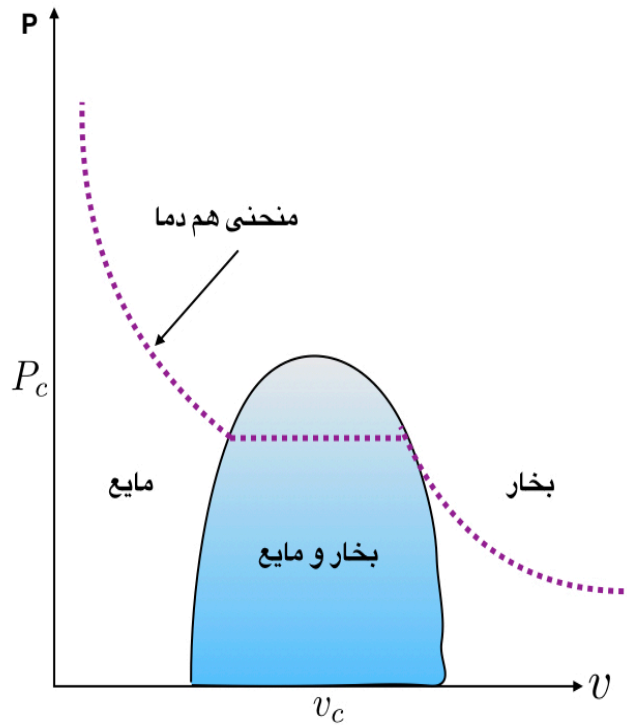
<sup>۱۷</sup>Bose Einstein Condensation



شکل ۱۱: دیاگرام فاز مایع - در حجم ثابت. محور افقی دما و محور عمودی فشار است. هر کدام از منحنی های آبی رنگ در واقع یک ناحیه همزیستی را بین دو فاز را نشان می دهد. در شکل سه بعدی هر کدام از این منحنی ها نشان دهنده یک ناحیه هستند. در امتداد هر کدام از منحنی ها گذار فاز مرتبه یک بین دو فاز انجام می شود. این نوع گذار فاز همراه با گرمای نهان است و پارامتر نظم (چگالی) به طور ناپیوسته از یک فاز به فاز دیگر تغییر می کند. هم چنان که در امتداد هر کدام از این منحنی ها بالا می رویم حجم این ناحیه کوچک تر می شود. ناحیه همزیستی بین بخار و مایع در نقطه انتهایی این منحنی تمام می شود. در بالاتر از این نقطه گذار فاز بین دو فاز مرتبه دو و پیوسته است.

کسر قابل توجهی از اتم ها همه به یک حالت پایه می روند. اتم های ابرشاره در این حالت تکانه خیلی کم و در نتیجه طول موج دو بروی خیلی زیادی دارند. این طول موج زیاد باعث حرکت هماهنگ همه اتم ها با هم و در نتیجه کاهش شدید گرانشی و اصطکاک می شود. این گذار فاز یک گذار فاز پیوسته است. پارامتر نظم آن یک کمیت مختلط مثل  $\psi(x)$  است که در واقع دامنه احتمال این است که ذره ای که در نقطه  $x$  قرار دارد در حالت پایه چگالیده شده باشد. مشابه با گذار فاز فرومغناطیسی که پارامتر نظم آن یعنی  $m(x)$  می تواند یکنواخت باشد که در این صورت آن را با  $m$  نشان می دهیم، در این جا هم پارامتر موضعی نظم می تواند به صورت یکنواخت درآید که در آن صورت فقط یک عدد مختلط به صورت  $\psi$  خواهد بود. این عدد مختلط هم فاز و هم اندازه اش پارامتر نظم را مشخص می کنند. اما هامیلتونی این سیستم آنچنان است که تنها





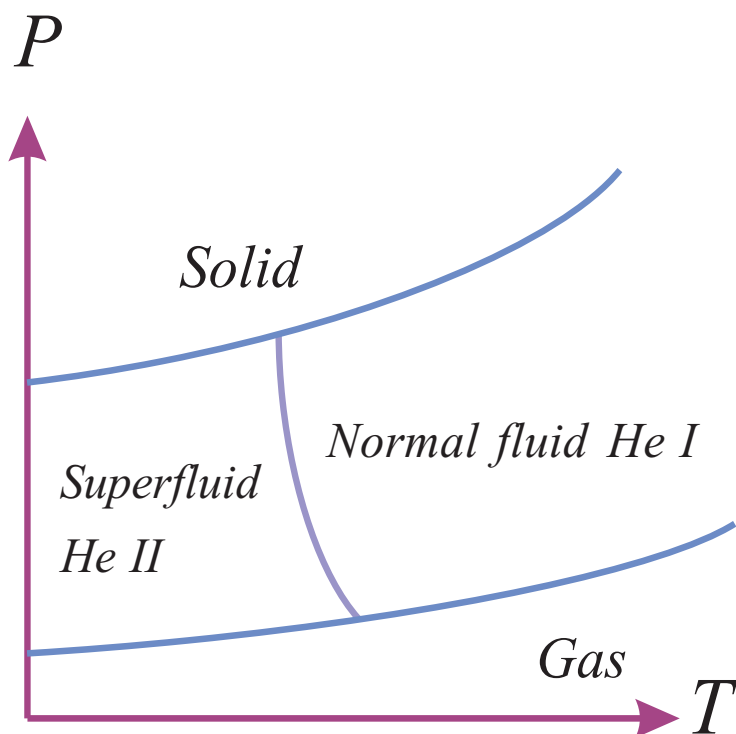
شکل ۱۲: نمای دیگری از دیاگرام فاز مایع. هرکدام از خطوط سیاه رنگ یک منحنی همدماست. محور افقی نشان دهنده حجم یک مول است. هم چنان که در امتداد هر کدام از این منحنی ها که حرکت می کنیم (با گرم کردن مایع) حجم مایع افزایش می یابد و فشار آن کاهش می یابد. وقتی وارد ناحیه همزیستی می شویم فشار ثابت می ماند و فاز مایع وارد همزیستی با فاز بخار می شود. ناحیه همزیستی بخار و آب در یک جایی تمامی می شود که همان نقطه بحرانی است. اما ناحیه های همزیستی دو فاز دیگر تا به امروز هیچ گونه نقطه بحرانی ای از خود نشان نداده اند.

به اندازه  $\psi(x)$  بستگی دارد به عبارت دیگر هامیلتونی این سیستم نسبت به تبدیل

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x) \quad (39)$$

تقارن دارد و مقدار متوسط پارامتر نظم در صورتی که تقارن شکسته نشود می بایست برابر با صفر باشد. به همین دلیل وقتی که ابرشارگی رخ می دهد اصطلاحاً می گوئیم که تقارن  $U(1)$  شکسته شده است.

یک نکته در مورد نامگذاری: معمولاً مایع معمولی هلیوم را  $Helium - I$  و مایع ابرشاره هلیوم را  $Helium - II$  نیز می‌گویند. بنابراین گذارفازی را که بررسی کردیم می‌توان گذار فاز  $Helium - I \rightarrow Helium - II$  نیز نامید.



شکل ۱۳: دیاگرام فاز در ابرشاره هلیوم

## ۸ گذار فاز ابررسانایی

این گذار فاز نخستین بار توسط فیزیکدان هلندی *CamerlinOnnes* و در سال ۱۹۱۱ میلادی کشف شد. وی مشاهده کرد که مقاومت ویژه فلز جیوه وقتی که دما به زیر ۲.۴ کلوین می‌رسد، به ناگهان صفر می‌شود. اصطلاحاً گفته می‌شود که یک گذار فاز از حالت فلز به حالت ابررسانا

رخ داده است. از آن موقع تا کنون این پدیده در بسیاری دیگر از فلزات نیز مشاهده شده است. امروزه فهرست بلندبالایی از این نوع گذار فازها وجود دارد که همگی تحت عنوان ابررسانایی دمای پایین مطالعه می شوند. مکانیزم این نوع ابررسانایی یک مکانیزم شناخته شده است که نخستین بار توسط باردین، کوپر و شریف<sup>۱۸</sup> در ۱۹۵۴ ارائه شده و به مکانیزم *BCS* مشهور است. این مکانیزم بسیار شبیه مکانیزم ابرشارگی در هلیوم - چهار است. در یک فلز معمولی حتی اگر ناخالصی و نقص های شبکه ای نداشته باشد، الکترون ها در اثر برخورد با فونون ها (یعنی کوانتوم های ارتعاشات شبکه) مرتبا پراکنده می شوند و این پراکندگی ها باعث می شود که فلزات رسانندگی محدودی برای الکتریسته داشته باشند. طول پویس آزاد میانگین برای الکترون ها در چنین شرایطی از محدوده چند یا چند ده آنگستروم فراتر نمی رود. توضیح *BCS* برای پدیده ابررسانایی این است که الکترون ها در دماهای پایین مطابق با سازوکاری به صورت جفت هایی درمی آیند که باهم وابسته هستند و تشکی یک شبه ذره بوزونی می دهند. این وابستگی البته به این معنا نیست که یک جفت الکترون در یک مکان قرار می گیرند بلکه به این معناست که فونون ها واسطه می شوند و به کمک آنها یک جفت الکترون با اسپین بالا و پایین ولی با تکانه های متفاوت باهم هماهنگ می شوند. با پایین آمدن دما از یک حد بحرانی این شبه ذرات که به جفت های کوپر معروفند دچار چگالش بوز-اینشتین می شوند و طول موج دوبروی آنها بسیار بزرگ می شود. این بزرگ شدن طول موج دوبروی باعث مصونیت آنها از پراکندگی های بیشمار از فونون های شبکه می شوند و می توانند به سلامت از یک نقطه فلز به نقطه دیگر حرکت کرده و الکتریسته را هدایت کنند. پارامتر نظم در ابررسانا را نیز می توان با یک تابع مختلط به صورت  $\phi(x)$  نشان داد. گذار فاز در پدیده ابررسانایی نیز مترادف با شکست تقارن  $U(1)$  است.

## ۱۰۸ گذار فاز ${}^3\text{He}$

اتم های  ${}^3\text{He}$  بر خلاف  ${}^4\text{He}$  بوزون نیستند بنابراین چگالش بوز-اینشتین برای تک - تک اتم ها رخ نمی دهد. اگر چنین است چگونه می توان ابرشارگی را در هلیوم - ۳ توضیح داد؟ پاسخ این است که در اینجا نیز درست مثل ابررسانایی اتم های  ${}^3\text{He}$  باهم جفت شده و شبه ذراتی بوزن تولید می کنند. چگالش این شبه ذرات بوزونی است که باعث پیدایش ابرشارگی می شود. حال سوال این است که در غیاب شبکه جامد یا فونون ها چه چیزی باعث جفت شدن اتم های هلیوم - ۳ می شود. پاسخ این است که نیروی واندروالس این کار را به عهده می گیرد. پتانسیل واندروالس سعی می کند که اتم ها را به هم نزدیک کند. چنانچه اتم ها دارای تکانه زاویه ای زیاد باشند اتم ها به هم نزدیک شده ولی هم نمی افتند بلکه به دور هم می چرخند. یک تفاوت با ابرشارگی این است که در این حالت اسپین اتم ها مجموع اش برابر با 1 است. هم چنین تکانه زاویه ای اوربیتالی هر دو اتم نیز برابر است با  $l = 1$ . در نتیجه تکانه زاویه ای کل که آن را با  $z$  نشان می دهیم می تواند مقادیر 0، 1 یا 2 را اختیار کند. وقتی که چگالش رخ می دهد حالت کل سیستم با همان اعداد کوانتومی حالت پایه که همه اتم ها در آن چگالیده شده اند توصیف می شود. این

<sup>۱۸</sup> Bardeen, Cooper, Schriffer

اعداد کوانتومی عبارتند از تکانه زاویه ای کل که مقدار  $j = 0, 1, 2$  را اختیار می کند و عدد کوانتومی  $m$  که بسته به مقدار  $j$ ،  $2j + 1$  مقدار را اختیار می کند. بنابراین یک حالت پایه با پارامترهای  $|j, m\rangle$  مشخص می شود. به این ترتیب پارامتر نظم عبارت است از  $\psi_{j,m}(x)$  که دامنه احتمال این است که ذرات حول و حوش نقطه  $x$  در حالت  $j, m$  چگالیده شده باشند. بازهم می توان نشان داد که هامیلتونی این سیستم تحت تبدیلات  $\psi_{j,m} \rightarrow e^{i\alpha} \psi_{j,m}(x)$  دارای تقارن است و بنابراین وقتی که متوسط این پارامتر نظم مقدار غیر صفر اختیار می کند به این معناست که تقارن  $U(1)$  شکسته شده است. پیچیدگی پارامتر نظم در این پدیده یک نتیجه دیگر هم در بر دارد و آن اینکه دیاگرام فاز هلیوم - سه می تواند خیلی پیچیده و شامل فازهای گوناگون باشد.

## ۹ عمومیت

آزمایشهای بسیار زیاد در طول چند دهه گذشته نشان داده است که نماهای بحرانی مربوط به گذار فاز فرومغناطیسی در مواد گوناگون باهم مساوی هستند. این مواد مختلف می توانند خواص مکانیکی، الکتریکی، حرارتی و اپتیکی بسیار متفاوتی از خود نشان دهند ولی رفتار بحرانی شان کاملاً مثل یک دیگر است. این مواد می توانند ساختارهای اتمی کاملاً متفاوتی باهم داشته باشند با این وجود نماهای بحرانی یکسان دارند. این یکسانی منحصر به مواد فرومغناطیس نیست. هرگاه به نماهای بحرانی مربوط به گذار فاز مایع - بخار از یک سو و نماهای بحرانی گذار فاز فرومغناطیسی از سوی دیگر نگاه کنیم متوجه تساوی آنها می شویم. این تساوی با توجه به این که این دو پدیده کاملاً متفاوت و متمایز از یک دیگر هستند خارق العاده است. در نظر اول هیچ گونه نسبت و شباهتی بین تبخیر یک مایع و پیدایش مغناطش در یک جامد وجود ندارد. در واقع نشان داده می شود که نماهای بحرانی به تعداد اندکی از پارامترهای مثل بعد فضایی سیستم یا بعد پارامتر نظم بستگی دارند و از خصوصیات میکروسکوپی ماده مستقل هستند. این خصلت کلی پدیده های بحرانی یعنی یکی بودن نماهای بحرانی برای بسیاری از پدیده ها عمومیت یا Universality نامیده می شود.

ما یاد گرفته ایم که همه خواص ماکروسکوپی ماده از این ساختارهای اتمی قابل استخراج هستند. یعنی اینکه دمای ذوب ماده، ضریب هدایت الکتریکی و گرمایی و ضریب شکست نور در آن و صدها خاصیت آن را می توان از ترکیب اتمی آن به دقت محاسبه کرد. این امر نشان می دهد که چقدر ساختمان میکروسکوپی یک ماده در تعیین خصوصیات ماکروسکوپی ماده تعیین کننده است. این که یک ماده شعاع اتمی اش چقدر باشد و چند الکترون در لایه آخری اش داشته باشد در طیف انرژی جامدی که از آن تشکیل می شود و از انجا در تمام خصوصیات ماکروسکوپی ماده

نقش اساسی خواهد داشت. کوچکترین تغییری در ساختمان اتمی باعث تغییر در خواص میکروسکوپی می شود. با این اوصاف این که خاصیتی میکروسکوپی وجود دارد که چندان ربطی به ساختمان میکروسکوپی ندارد می بایست خیلی شگفت انگیز باشد و نشانه این باشد که خواص بحرانی خواصی هستند بسیار کلی و عمومی. وظیفه دشواری که یک نظریه پدیده های بحرانی به عهده دارد این است که از فیزیک میکروسکوپی آغاز کند و نهایتاً نشان دهد که خواص بحرانی یک پدیده به خصوصیات میکروسکوپی یعنی نقطه ای که از آن آغاز کرده است بستگی ندارد.

## ۱۰ مسئله ها:

■ مسئله یک : معمولاً در هر پدیده ای خواه در حوزه فیزیک یا خارج از آن کمیت های مختلفی با بعدهای متفاوت وجود دارند. این کمیت ها را با

$$g_1, g_2, \dots, g_n \quad (40)$$

نشان می دهیم. از این کمیت ها می توان کمیت های بدون بعدی مثل

$$R_1, R_2, \dots, R_k \quad (41)$$

ساخت. در این صورت قضیه اساسی آنالیز ابعادی بیان می کند که هر قانونی که رابطه بین کمیت های اولیه دارای بعد را تعیین می کند می بایست به صورت زیر نوشته شود:

$$f(R_1, R_2, \dots, R_N) = 1 \quad (42)$$

که در آن  $f$  یک تابع است که شکل آن را نمی توان توسط آنالیز ابعادی بدست آورد. در صورتی که تنها یک کمیت بدون بعد در این پدیده وجود داشته باشد (که در بعضی موارد این چنین است) رابطه بالا تبدیل می شود به

$$f(R) = 1, \quad (43)$$

و یا

$$R = \text{constant}. \quad (۴۴)$$

مقدار این ثابت معمولاً از مرتبه یک است و خیلی غیر طبیعی است که اندازه آن مثلاً از مرتبه  $10^3$  یا  $10^{-3}$  باشد.

الف: با استفاده از آنالیز ابعادی پرپود نوسانات کوچک یک آونگ به طول  $l$  را در روی کره زمین بدست آورید. اگر دامنه نوسانات آونگ بلند باشد با استفاده از آنالیز ابعادی چه نتایجی می توانید بدست آورید.

ب: با استفاده از آنالیز ابعادی قضیه فیثاغورث را ثابت کنید.

پ: با استفاده از آنالیز ابعادی قانون سوم کپلر در منظومه شمسی را ثابت کنید.

د: از کمیت های بنیادی اتمی شامل  $h$ ،  $e$ ،  $c$  و  $m$  که در آن  $e$  و  $m$  به ترتیب بار الکتریکی و جرم الکترون هستند کمیت هایی بسازید که دارای بعد طول، بعد سرعت و بعد زمان باشند.