

درس نهم: مدل آیزینگ، گذار خود به خود از بی نظمی به نظم

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۹ آذر ۱۳۹۷

۱ مقدمه

مدل آیزینگ یکی از مهم ترین مدل‌های مکانیک آماری است. اهمیت این مدل تنها به خاطر این نیست که مدل ساده ای برای مطالعه نظم خود بخود مغناطیسی در جامدات فرومغناطیسی یا پادفرومغناطیسی است بلکه در این است که تعداد بسیار زیادی از پدیده های دیگر را چه در فیزیک و چه در دیگر شاخه های علوم می توان به این مدل یا تغییراتی از این مدل نگاشت. هم چنین مدل آیزینگ خاستگاه بسیاری دیگر از مدل های دقیقاً حل پذیر در مکانیک آماری شده است. بسیاری از روش های حل دقیق مدل های بس ذره ای که امروزه می شناسیم نخستین بار در مطالعه مدل آیزینگ معرفی شده اند. در این درس مدل آیزینگ را نخست در یک بعد و سپس در دو بعد مطالعه می کنیم. اگر چه راه های متنوعی برای حل تقریبی مدل آیزینگ وجود دارد، در این درس تمرکز ما روی حل های دقیق این مدل است.

۲ تعریف مدل آیزینگ و تابع پارش آن

مدل آیزینگ ساده ترین مدل برای مطالعه گذار فاز است، در واقع نمی توان مدلی ساده تر از آن برای مطالعه گذار از بی نظمی و نظم تعریف کرد. فرض می کنیم در یک شبکه دلخواه مثلا شبکه یک بعدی یا دو بعدی یا چند بعدی، در هر نقطه مثل i یک متغیر دوتایی S_i که تنها دو مقدار $+1$ و -1 اختیار می کند قرار گرفته است. برای راحتی می توانیم این متغیر دوتایی را اسپین بنامیم. این نام را هم برای سادگی به کار می بریم و هم برای اینکه خاستگاه اولیه مدل آیزینگ مطالعه نظم مغناطیسی در یک ماده مغناطیسی بوده است. هامیلتونی این سیستم به صورت زیر تعریف می شود:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - B \sum_i S_i, \quad (1)$$

که در آن جمع روی اسپین های همسایه صورت می گیرد. در این هامیلتونی B را میدان مغناطیسی می نامیم. ضریب J نیز نشان دهنده برهم کنش بین اسپین هاست. ^۱ مقدار میدان مغناطیسی را مثبت می گیریم. در این صورت میدان سعی می کند که اسپین ها را با خود هم جهت کند چرا که این کار باعث کاهش انرژی می شود. هرگاه J مثبت باشد اسپین های نزدیک نیز سعی می کنند هم جهت شوند. چنین مدلی را مدل فرومغناطیس می نامیم. اما اگر J منفی باشد اسپین های نزدیک سعی می کنند برای پایین آوردن انرژی جهت مخالف هم را اختیار کنند. چنین مدلی را مدل پادفرومغناطیس می نامیم. تابع پارش مدل آیزینگ به صورت زیر تعریف می شود:

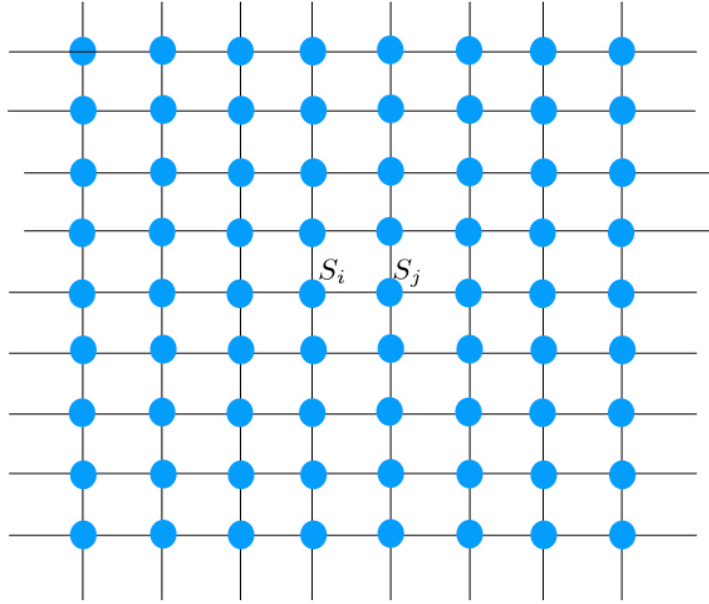
$$Z(N, J, B) = \sum_{\{S_i\}} e^{-\beta H} = \sum_{\{S_i\}} e^{\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + \beta B \sum_i S_i} \quad (2)$$

پارامتر نظم برای مدل فرومغناطیسی چیزی نیست جز متوسط مغناطش یعنی

$$M := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle S_i \rangle. \quad (3)$$

هدف اصلی ما این است که مقدار این پارامتر نظم را پیدا کنیم که طبیعتا معادله بدست آمده معادله حالت این سیستم خواهد بود. بخصوص علاقمندیم ببینیم مغناطش خود بخود یعنی وقتی که میدان مغناطیسی به عنوان عامل نظم دهنده خارجی وجود ندارد، پدیدار می شود یا نه؟ در این درس مدل آیزینگ یک بعدی و دو بعدی را تحت شرایط گوناگون و به روشهای متفاوت حل می کنیم. نخست فرض می کنیم که میدان مغناطیسی برابر با صفر است.

^۱ از آنجا که بسیاری از پدیده های دیگر حتی در مطالعات مربوط به فیزیک اجتماع به مدل آیزینگ نگاشته می شوند، B می تواند نشان دهنده هر نوع عامل خارجی باشد که سعی می کند مقادیر متغیرها را با خود هم جهت کند.



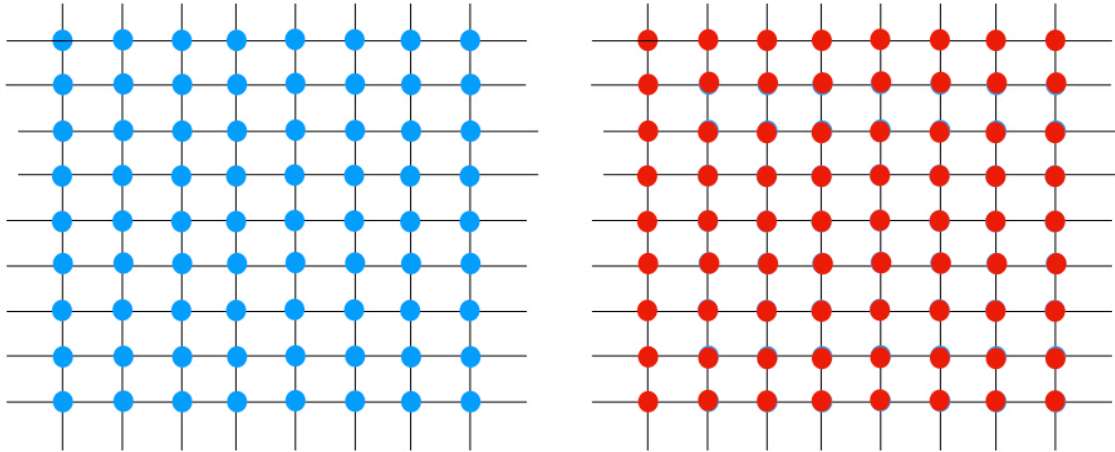
شکل ۱: مدل آیزینگ روی یک شبکه مربعی. هر ذره دارای دو حالت با مقدار های یک و منهای یک است. تنها اتم های همسایه با هم برهم کنش می کنند. شرایط مرزی می تواند باز یا بسته باشد. در حد ترمودینامیک خواص فیزیکی حالت تعادل بستگی به شرایط مرزی ندارد.

۳ مدل آیزینگ در یک بعد بدون میدان مغناطیسی

یک شبکه یک بعدی در نظر می گیریم، شکل (۴). هامیلتونی مدل آیزینگ برابر است با:

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1}, \quad (4)$$

و تابع پارش برابر است با



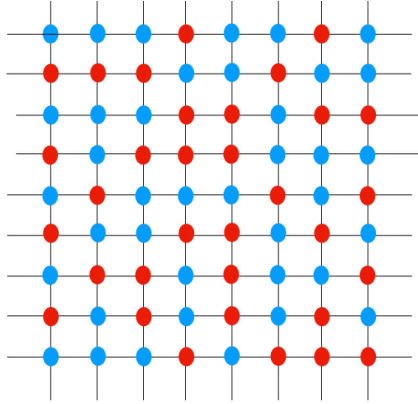
شکل ۲: در دمای صفر مدل فرومغناطیس آیزینگ به یکی از دو حالت منظم خود می رود. در این حالت ها همه اسپین ها یا مثبت هستند یا منفی. با افزایش دما اسپین ها به تدریج شروع به افت و خیز می کنند و جزیره هایی با اسپین های متفاوت شروع به پیدایش در زمینه منظم می کنند.

$$Z = \sum_{\{S_i\}} e^{\beta J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1}}. \quad (5)$$

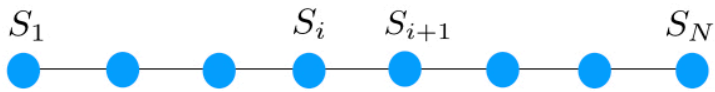
می توان این مدل را با شرایط مرزی گوناگون در نظر گرفت. مثلا می توانیم فرض کنیم که اسپین های دو انتها کاملا آزاد هستند یا اینکه در مقدارهای از پیش معینی قرار گرفته اند یا اینکه شرایط مرزی تناوبی است. خواهیم دید که در حد ترمودینامیک همه این مدل ها رفتار یکسان دارند.

۱.۳ شرایط مرزی باز

اسپین های دو انتها کاملا آزاد هستند. برای حل می توانیم تغییر متغیر زیر را اعمال کنیم:



شکل ۳: در دمای بالا اسپین ها کاملاً بی نظم می شوند و متوسط مغناطش برابر با صفر می شود. در هر ناحیه تقریباً به همان اندازه که اسپین های مثبت هست، اسپین های منفی هم هست.



شکل ۴: مدل آیزینگ یک بعدی: در شرایط مرزی پریودیک قرار می دهیم: $S_{N+1} = S_1$.

$$q_1 = S_1 S_2, \quad q_2 = S_2 S_3, \quad \dots, \quad q_{N-1} = S_{N-1} S_N, \quad (6)$$

این تغییر متغیر از (S_1, S_2, \dots, S_N) به $(q_1, q_2, \dots, q_{N-1})$ دو به یک است، زیرا اگر همه S_i ها را در یک علامت منفی ضرب کنیم هیچ تغییری در q_i ها حاصل نخواهد شد. بنابراین خواهیم داشت:

$$Z = 2 \sum_{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}} e^{\beta J(q_1 + q_2 + \dots + q_{N-1})} = 2 (2 \cosh \beta J)^{N-1}, \quad (7)$$

۲.۳ شرایط مرزی پریودیک

در این حالت شرط مرزی به این صورت است که $S_{N+1} = S_1$ و هامیلتونی برابر است با

$$H = -J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1}. \quad (8)$$

اما این بار جمله $S_N S_1$ در هامیلتونی وجود دارد و با اعمال همان تغییر متغیر تابع پارش برابر می شود با:

$$Z = 2 \sum_{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}} e^{\beta J(q_1 + q_2 + \dots + q_{N-1})} e^{\beta J(q_1 q_2 \dots q_{N-1})}, \quad (9)$$

حال می توانیم جمله آخر یعنی عبارت نمایی را بسط دهیم و بدست آوریم

$$Z = 2 \sum_{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}} e^{\beta J(q_1 + q_2 + \dots + q_{N-1})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^n}{n!} (q_1 q_2 \dots q_{N-1})^n, \quad (10)$$

به این ترتیب جمع $\sum_{q_1, q_2, \dots, q_{N-1}}$ تبدیل می شود به $N - 1$ تا جمع مجزا از هم و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Z &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^n}{n!} \left[\sum_{q=1, -1} q^n e^{\beta J q} \right]^{N-1} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^n}{n!} [e^{\beta J} + (-1)^n e^{-\beta J}]^{N-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

حال جمع روی n های زوج و فرد را جدا می کنیم و بدست می آوریم:

$$Z = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^{2n}}{(2n)!} (2 \cosh \beta J)^{N-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta J)^{2n+1}}{(2n+1)!} (2 \sinh \beta J)^{N-1} = (2 \cosh \beta J)^N + (2 \sinh \beta J)^N \quad (12)$$

مقایسه تابع پارش نهایی در شرایط مرزی باز و بسته بخوبی نشان می دهد که در حد ترمودینامیک یعنی $N \rightarrow \infty$ نتایج ترمودینامیکی یکسان خواهند بود.

۳.۳ روش تکرار

حال از یک روش دیگر موسوم به روش تکرار استفاده می کنیم. داریم $B = 0$. شرایط مرزی نیز باز است. تابع پارش را برای N تا اسپین در نظر می گیریم:

$$Z_N = \sum_{\{S_1, S_2, \dots, S_N\}} e^{\beta J (S_1 S_2 + S_2 S_3 + \dots + S_{N-1} S_N)}, \quad (13)$$

اگر روی آخرین اسپین جمع را انجام دهیم بدست می آوریم:

$$Z_N = \sum_{\{S_1, S_2, \dots, S_{N-1}\}} e^{\beta J (S_1 S_2 + S_2 S_3 + \dots + S_{N-2} S_{N-1})} \sum_{S_N} e^{\beta J S_{N-1} S_N}, \quad (14)$$

اما جمع روی آخرین اسپین ساده است:

$$\sum_{S_N} e^{\beta J S_{N-1} S_N} = 2 \cosh(\beta J S_{N-1}), \quad (15)$$

حال نکته مهم این است که این عبارت بستگی به مقدار S_{N-1} ندارد و همواره برابر است با $2 \cosh \beta J$. بنابراین خواهیم داشت:

$$Z_N = Z_{N-1} (2 \cosh \beta J) \quad (16)$$

با تکرار این رابطه تابع پارش را بدست می آوریم که مقدارش برابر خواهد بود با $2(2 \cosh \beta J)^{N-1}$.

۴ مدل آیزینگ یک بعدی در حضور میدان مغناطیسی

یکی از قدرتمندترین و عمومی ترین روش ها برای حل مدل آیزینگ و مدل های مشابه، روش ماتریس انتقال^۲ نام دارد. ایده این روش را برای مدل یک بعدی آیزینگ توضیح می دهیم ولی خواننده می تواند براحتی آن را برای مدل های دیگر و برای بعد ۲ نیز صورت بندی کند. فرض کنید که در هر نقطه از یک شبکه یک بعدی متغیری آماری داریم که آن را با S نشان می دهیم. لزوماً دو مقدار ± 1 ندارد و می تواند Q مقدار مختلف را اختیار کند. برای سادگی نیز از S ، به عنوان متغیر اسپین نام می بریم اگر چه ممکن است واقعا S یک متغیر اسپینی نباشد. انرژی هر هیئت دلخواه از اسپین ها را نیز به ترتیب زیر می نویسیم:

$$H(S_1, S_2, \dots, S_N) = \sum_{i=1}^N h(S_i, S_{i+1}), \quad (17)$$

که در آن $h(S, S')$ یک تابع متقارن از S و S' است. شرط مرزی را نیز پرودیک می گیریم یعنی $S_{N+1} = S_1$. تابع پارش برابر است با:

$$Z_N = \sum_{S_1, S_2, \dots, S_N} e^{-\beta h(S_1, S_2)} e^{-\beta h(S_2, S_3)} \dots e^{-\beta h(S_{N-1}, S_N)} \quad (18)$$

حال ماتریس T را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\langle S|T|S' \rangle := e^{-\beta h(S, S')} \quad (19)$$

ماتریس T یک ماتریس $Q \times Q$ است و به آن ماتریس انتقال گفته می شود. بنابراین تابع پارش به این صورت در می آید:

$$Z_N = \sum_{S_1, S_2, \dots, S_N} \langle S_1|T|S_2 \rangle \langle S_2|T|S_3 \rangle \dots \langle S_N|T|S_1 \rangle = \text{tr}(T^N) \quad (20)$$

در نتیجه محاسبه تابع پارش تبدیل می شود به محاسبه ویژه مقدار های یک ماتریس $Q \times Q$ که از مسئله اولی بسیار ساده تر است. برای مدل آیزینگ T دویعدی است. در این حالت داریم

$$\langle S|T|S' \rangle := e^{\beta J S S' + \frac{\beta h}{2}(S+S')} \quad (21)$$

و یا

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} e^{\beta J + \beta h} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J - \beta h} \end{pmatrix} \quad (22)$$

ویژه مقدارهای این ماتریس براحتی تعیین می شوند و برابرند با:

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta J} \left(\cosh \beta J \pm \sqrt{\sinh^2 \beta J + e^{-4\beta J}} \right) \quad (23)$$

در نتیجه تابع پارش برابر خواهد بود با:

$$Z_N = \lambda_1^N + \lambda_2^N \quad (24)$$

که در آن λ_1 ویژه مقدار بزرگ تر است. در حد ترمودینامیک یعنی وقتی که N به سمت بی نهایت میل می کند، خواهیم داشت:

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{-kT \ln Z_N}{N} = -kT \ln \lambda_1. \quad (25)$$

بنابراین بدست می آوریم:

$$f = -J - kT \ln \left[\cosh \beta B + \sqrt{\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J}} \right]. \quad (26)$$

تمام جملات درون f تحلیلی هستند. تنها وقتی یک نقطه غیرتحلیلی بوجود می آید که درون رادیکال برابر با صفر شود و این امر هیچ گاه

اتفاق نمی افتد مگر وقتی که $T \rightarrow 0$ که در این صورت عبارت داخل رادیکال برابر می شود با $\sinh^2 \frac{B}{kT}$ و ما خواهیم داشت:

$$f_{T \rightarrow 0} = -J - \lim_{T \rightarrow 0} kT \ln \left[\cosh \frac{B}{kT} + \left| \sinh \frac{B}{kT} \right| \right] \quad (27)$$

در نتیجه f برابر می شود با:

$$f_{T \rightarrow 0} = \begin{cases} -J - kT \ln e^{\frac{B}{kT}} = -J - B & , \quad B > 0 \\ -J - kT \ln e^{-\frac{B}{kT}} = -J + B & , \quad B < 0 \end{cases} \quad (28)$$

به این ترتیب دیده می شود که در $T = 0$ ، تابع f یک ناپیوستگی از خود نشان می دهد. به طور کلی با داشتن تابع انرژی آزاد می توانیم تمام

خصوصیات ترمودینامیکی این سیستم را بدست آوریم. می دانیم که

$$m := \frac{\partial \ln \lambda_1}{\partial \beta B}, \quad \chi = \frac{\partial m}{\partial B}, \quad \epsilon = -\frac{\partial \ln \lambda_1}{\partial \beta}, \quad C_B = \frac{\partial \epsilon}{\partial T}. \quad (29)$$

به این ترتیب با محاسبه سرراست بدست می آوریم

$$m = \frac{\sinh \beta B}{\sqrt{\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J}}}. \quad (30)$$

این رابطه نشان می دهد که:

الف: وقتی که $B = 0$ باشد، m نیز برابر با صفر خواهد بود و این یعنی اینکه در این سیستم یک بعدی مغناطش خود بخود و شکست تقارن بوجود نمی آید.

ب: وقتی که $T \rightarrow 0$ یا $\beta \rightarrow \infty$ ، این رابطه بیان می کند که $m = \frac{B}{|B|}$.

ج: $m(B) = -m(-B)$.

از رابطه ۳۰ می توانیم نفوذپذیری مغناطیسی را نیز حساب کنیم. یک محاسبه ساده نشان می دهد که:

$$\chi = \frac{\beta \cosh \beta B e^{-4\beta J}}{(\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J})^{\frac{3}{2}}}. \quad (31)$$

از جمله می توان نفوذپذیری مغناطیسی را در میدان مغناطیس $B = 0$ حساب کنیم:

$$\chi(B = 0) = \frac{e^{\frac{2J}{kT}}}{kT}. \quad (32)$$

۵ توابع همبستگی

در مطالعه هر مدل آماری یا بس ذره ای کار ما با محاسبه تابع پارش تمام نمی شود. این محاسبه اگر چه مهم ترین گام است اما هنوز تا درک رفتار سیستم بس ذره ای راه درازی در پیش داریم. بسیاری از خصوصیات فیزیکی یک مدل بس ذره ای از محاسبه توابع همبستگی^۳ بدست می آیند. این توابع همبستگی که به آنها توابع n نقطه ای^۴ نیز می گویند، همانطور که از اسم شان پیداست، نشان می دهند که گروه های ذرات در

^۳Correlation Functions
^۴n-point functions

این سیستم بس ذره ای چه نوع همبستگی ای با هم دارند. تابع دو نقطه همبستگی جفت های ذرات و تابع سه نقطه ای هم بستگی گروه های سه تایی از ذرات را نشان می دهد. تابع یک ذره ای نیز رفتار متوسط تک تک ذرات را نشان می دهد. طبیعتا در این میان نقش توابع یک نقطه ای و دو نقطه ای از اهمیت بیشتری برخوردار است. مهم ترین خواص ترمودینامیکی به همین دو نوع تابع همبستگی مربوط اند. در ادامه نخست در باره معنای تابع دو نقطه ای و سپس روش محاسبه آن بیشتر توضیح می دهیم.

۱.۵ معنای تابع همبستگی

یک تابع همبستگی مثل $\langle S_i S_j \rangle$ را می توان به روش های مختلف حساب کرد. اما قبل از محاسبه بهتر است معنای آن را دریابیم. معلوم است که هروقت S_i و S_j تمایل به هم جهت بودن داشته باشند، $\langle S_i S_j \rangle$ مقدار بیشتری دارد. این موضوع را به ترتیب زیر می توان دریافت: فرض کنید که دو متغیر تصادفی x و y تابع توزیع احتمال $P(x, y)$ را داشته باشند. این دو متغیر مقادیر $+1$ و -1 را اختیار می کنند. در این صورت داریم:

$$P(x = y) = P(1, 1) + P(-1, -1) = \langle \delta_{x,1} \delta_{y,1} \rangle + \langle \delta_{x,-1} \delta_{y,-1} \rangle \quad (۳۳)$$

اما می توانیم بنویسیم $\delta_{x,1} = \frac{1+x}{2}$ و $\delta_{x,-1} = \frac{1-x}{2}$. در نتیجه می توان نوشت:

$$P(x = y) = \frac{1}{4} \langle (1+x)(1+y) \rangle + \frac{1}{4} \langle (1-x)(1-y) \rangle = \frac{1}{2} (1 + \langle xy \rangle). \quad (۳۴)$$

بنابراین نشان دادیم که:

$$P(S_i = S_j) = \frac{1}{2} (1 + \langle S_i S_j \rangle), \quad P(S_i = -S_j) = \frac{1}{2} (1 - \langle S_i S_j \rangle). \quad (۳۵)$$

این رابطه نشان می دهد که تابع همبستگی $\langle S_i S_j \rangle$ مستقیما به احتمال هم جهت بودن S_i و S_j مربوط است.

تابع همبستگی معنای دیگری نیز دارد. این کمیت در واقع نشان می دهد که مقدار مغناطش در نقطه i یعنی $\langle S_i \rangle$ چقدر نسبت به تغییرات میدان مغناطیسی در نقطه j حساس است. برای درک این نکته سیستمی را در نظر بگیرید که میدان مغناطیسی ناهمگن دارد. هامیلتونی این سیستم به شکل زیر است:

$$H = H_0(S_1, S_2, \dots, S_N) - \sum_i B_i S_i. \quad (۳۶)$$

که در آن H_0 نشان دهنده برهم کنش های بین اسپین هاست که می تواند شکل خیلی کلی ای داشته باشد. همانطور که می بینید هامیلتونی این سیستم خیلی کلی است و مختص مدل آیزینگ نیست. در حقیقت نتیجه ای که بدست می آوریم کاملا کلی است و ربطی به مدل خاص آیزینگ ندارد و در همه ابعاد نیز برقرار است. می دانیم که تابع پارش این سیستم به صورت زیر است:

$$Z = \sum_{\{S\}} e^{\beta \sum_i B_i S_i - \beta H_0}. \quad (37)$$

برای سادگی نمادگذاری موقتا نماد \tilde{B}_i را به صورت زیر تعریف می کنیم: $\tilde{B}_i := \beta B_i$.
با توجه به این رابطه و این نماد بدست می آوریم:

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \tilde{B}_i}, \quad \langle S_i S_j \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \tilde{B}_i \partial \tilde{B}_j}. \quad (38)$$

حال عبارت $\frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial \tilde{B}_j}$ را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial \tilde{B}_j} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{B}_j} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \tilde{B}_i} \right) \\ &= \frac{-1}{Z^2} \frac{\partial Z}{\partial \tilde{B}_j} \frac{\partial Z}{\partial \tilde{B}_i} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \tilde{B}_j \partial \tilde{B}_i} \\ &= -\langle S_i \rangle \langle S_j \rangle + \langle S_i S_j \rangle. \end{aligned} \quad (39)$$

بنابراین به طور کلی رابطه زیر را بین تابع همبستگی و تابع پاسخ^۵ یک سیستم مغناطیسی بدست آوردیم:

$$G(i, j) \equiv \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle - \langle S_i S_j \rangle = kT \frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial \tilde{B}_j}. \quad (40)$$

این رابطه بیان می کند که تابع G_{ij} در واقع مقدار حساسیت مغناطش در نقطه i را نسبت به تغییرات میدان مغناطیسی در نقطه j می سنجد.

حال می پردازیم به محاسبه دقیق تابع همبستگی در مدل آیزینگ یک بعدی. مثل تابع پارش، محاسبه تابع همبستگی نیز بسته به بود یا نبود میدان مغناطیسی و یا نوع شرایط مرزی به روش های متفاوتی قابل انجام است. در زیر بعضی از این روش ها را توضیح می دهیم. این روش ها منحصر به یک بعد هستند اگر چه به طور کلی می توان هسته این روش ها را به دو بعد نیز تعمیم داد.

۲.۵ محاسبه تابع همبستگی در غیاب میدان مغناطیسی

یک راه برای وقتی که شرایط مرزی باز باشد به ترتیب زیر است. نخست هامیلتونی را به طور موقت تغییر می دهیم به شکلی که همه ضرایب جفت شدگی با هم متفاوت باشند. به این ترتیب، تابع پارش برابر است با:

$$Z(K_1, K_2, \dots, K_N) = \sum_{S_1, S_2, \dots, S_N} e^{\sum_{i=1}^N K_i S_i S_{i+1}}, \quad (41)$$

و $Z(K) = Z(K_1, K_2, \dots, K_N) |_{K_i=K}$ در این صورت داریم:

$$\langle S_i S_{i+1} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial K_i}, \quad \langle S_i S_{i+2} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial K_i \partial K_{i+1}}, \quad \langle S_i S_{i+r} \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^r Z}{\partial K_i \partial K_{i+1} \dots \partial K_{i+r-1}}. \quad (42)$$

پس از مشتق گیری ها می توان K_i ها را مساوی K قرار داد. در شرایط مرزی باز براحتی می توان تابع پارش را حساب کرد. این تابع پارش برابر است با:

$$Z = 2 \prod_{i=1}^{N-1} (2 \cosh K_i), \quad (43)$$

که از آن نتیجه می گیریم:

$$\langle S_i S_{i+r} \rangle = (\tanh K)^r. \quad (44)$$

می توانیم این رابطه را به شکل بهتری بنویسیم:

$$\langle S_i S_{i+r} \rangle = e^{-\frac{r}{\xi}} \quad (45)$$

که در مقایسه با رابطه قبلی مقدار زیر را برای ξ که به آن طول همبستگی می گوئیم بدست می دهد:

$$\xi = \frac{1}{\ln \coth K}. \quad (46)$$

راه دیگر برای وقتی که شرایط مرزی باز باشد، در تمرین ها آمده است.

۳.۵ محاسبه تابع همبستگی در حضور میدان مغناطیسی - روش ماتریس انتقال

نخست روش بدست آوردن متوسط اسپین را در مرور می کنیم. می دانیم که

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{S_1, \dots, S_N\}} S_i e^{-\beta H}$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{\{S_1, \dots, S_N\}} S_i \langle S_1 | T | S_2 \rangle \langle S_2 | T | S_3 \rangle \cdots \langle S_{i-1} | T | S_i \rangle \langle S_N | T | S_1 \rangle. \quad (47)$$

حال ماتریس σ را چنان تعریف می کنیم که

$$\sigma |S\rangle = S |S\rangle \quad (48)$$

یعنی

$$\sigma |1\rangle = |1\rangle, \quad \sigma |-1\rangle = -|-1\rangle, \rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

در این صورت رابطه () را به شکل زیر می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \langle S_i \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\{S_1, \dots, S_N\}} \langle S_1 | T | S_2 \rangle \langle S_2 | T | S_3 \rangle \cdots \langle S_{i-1} | T \sigma | S_i \rangle \langle S_N | T | S_1 \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \text{tr}(T^{i-1} \sigma T^{N-i+1}) = \frac{\text{tr}(\sigma T^N)}{\text{tr} T^N} \end{aligned} \quad (50)$$

در حد ترمودینامیک تنها بزرگترین ویژه مقدار مهم است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\langle S_i \rangle = \langle \lambda_{max} | \sigma | \lambda_{max} \rangle. \quad (51)$$

به این ترتیب متوسط اسپین در مسئله مکانیک آماری کلاسیک در یک بعد تبدیل شده است به یک متوسط شبه کوانتومی در صفر بعد. یعنی متوسط یک عملگر σ که متناظر با اسپین هست روی یک حالت در یک فضای هیلبرت که دیگر نه مختص یک زنجیره یک بعدی بلکه مختص تنها یک اسپین است. این تناظر به صورت کلی تر و با دامنه وسیع تری قابل اثبات است به این معنا که یک مدل مکانیک آماری که روی یک شبکه d بعدی معادل است با یک سیستم کوانتومی در یک شبکه $d-1$ بعدی. در ادامه این درس بازم به این تناظر بازخواهیم گشت. حال به محاسبه تابع همبستگی می پردازیم. بر خلاف روش های قبلی که تنها وقتی کاربرد داشتند که میدان مغناطیسی صفر بود، در این روش میدان مغناطیسی می تواند غیر صفر باشد. شرایط مرزی را پرودیک در نظر می گیریم و می نویسیم

$$\langle S_i S_j \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} S_i S_j \langle S_N | T | S_{N-1} \rangle \cdots \langle S_{i+1} | T | S_i \rangle \cdots \langle S_{j+1} | T | S_j \rangle \cdots \langle S_2 | T | S_1 \rangle. \quad (52)$$

با تعریف ماتریس σ_z به صورت $\sigma_z = \sum_{1,-1} S|S\rangle\langle S|$ یا $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle S_i S_j \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\{S\}} \langle S_N | \mathcal{T} | S_{N-1} \rangle \cdots \langle S_{j+1} | \mathcal{T} \sigma_z | S_j \rangle \cdots \langle S_{i+1} | \mathcal{T} \sigma_z | S_i \rangle \cdots \langle S_2 | \mathcal{T} | S_1 \rangle \\ &= \frac{1}{Z_N} \text{tr}(\mathcal{T}^{N-j} \sigma_z \mathcal{T}^{j-i} \sigma_z \mathcal{T}^i) \\ &= \frac{\text{tr}(\mathcal{T}^{N-j} \sigma_z \mathcal{T}^{j-i} \sigma_z \mathcal{T}^i)}{\text{tr}(\mathcal{T}^N)}. \end{aligned} \quad (53)$$

در حد ترمودینامیک، وقتی که $N \rightarrow \infty$ تنها بزرگترین ویژه مقدار و ویژه بردار مربوط به ماتریس انتقال باقی می ماند و صورت و مخرج کسر بالا نیز ساده می شوند:

$$\langle S_i S_j \rangle = \frac{\langle \lambda_+ | \sigma_z \mathcal{T}^{j-i} \sigma_z | \lambda_- \rangle}{\lambda_+^{j-i}}. \quad (54)$$

حال می خواهیم تابع همبستگی متصل یعنی $G_{i,j} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$

را در حد فاصله های بزرگ یعنی $|j-i| \gg 1$ بدست آوریم. دومین ویژه مقدار ماتریس انتقال را از نظر اندازه با λ_- نشان می دهیم. اگر یک عملگر واحد به صورت $I = \sum_{\lambda} |\lambda\rangle\langle\lambda|$ قبل از σ_z باز کنیم و از توان $|j-i|$ بقیه ویژه مقدار ها در مقابل ویژه مقدار اول و دوم صرف نظر کنیم بدست می آوریم:

$$\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle = \lambda_+^{i-j} \langle \lambda_+ | \sigma_z \mathcal{T}^{j-i} \sigma_z | \lambda_+ \rangle \quad (55)$$

برای $|j-i| \gg 1$ تابع همبستگی متصل به شکل زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle &= \lambda_+^{i-j} \langle \lambda_+ | \sigma_z \mathcal{T}^{j-i} \sigma_z | \lambda_+ \rangle - \langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_+ \rangle^2 \\ &= \lambda_+^{i-j} \left[\langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_+ \rangle \lambda_+^{j-i} \langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_+ \rangle + \langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_- \rangle \lambda_-^{j-i} \langle \lambda_- | \sigma_z | \lambda_+ \rangle \right] - [\langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_+ \rangle]^2 \\ &= \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{j-i} \langle \lambda_+ | \sigma_z | \lambda_- \rangle \langle \lambda_- | \sigma_z | \lambda_+ \rangle. \end{aligned} \quad (56)$$

به این ترتیب می فهمیم که برای $|j-i|$ های خیلی بزرگ تر از 1:

$$G_{ij} \sim e^{|j-i| \ln \frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \sim e^{-\frac{|j-i|}{\xi}}, \quad (57)$$

که در آن ξ یعنی طول همبستگی برابر است با:

$$\xi = \frac{1}{\ln\left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)}. \quad (58)$$

بنابراین طول همبستگی توسط نسبت بزرگترین ویژه مقدار T به ویژه مقدار بعدی داده می شود. این نتیجه وقتی که مدل های فراتر از مدل آیزینگ یک بعدی نیز مطالعه می شوند درست است. در واقع استدلال بالا هیچ ربطی به یک مدل خاص نداشت و به طور کلی معتبر بود. از مدل آیزینگ یک بعدی داریم:

$$\frac{\lambda_+}{\lambda_-} = \frac{\cosh \beta B + \sqrt{\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J}}}{\cosh \beta B - \sqrt{\sinh^2 \beta B + e^{-4\beta J}}} \quad (59)$$

در حالت های حدی این عبارت و در نتیجه طول همبستگی شکل ساده ای پیدا می کند. مثلاً در میدان مغناطیسی صفر، خواهیم داشت:

$$\xi(B=0) = \frac{1}{\ln(\coth \frac{2J}{kT})}. \quad (60)$$

هم چنین براحتی می توان دریافت که:

$$\xi(T \rightarrow \infty) = 0, \quad \xi(T \rightarrow 0) \rightarrow \sim \frac{1}{2} e^{\frac{2J}{kT}} \rightarrow \infty. \quad (61)$$

۶ چرا در مدل آیزینگ یک بعدی گذار فاز رخ نمی دهد.

دیدیم که در مدل آیزینگ یک بعدی و در دمای غیر صفر گذار فاز رخ نمی دهد. در این بخش می خواهیم دلیل این پدیده را از نظر فیزیکی بفهمیم. این مسئله را می توان از راه های گوناگون توضیح داد.

۱.۶ استدلال مبتنی بر انرژی و شکست تقارن

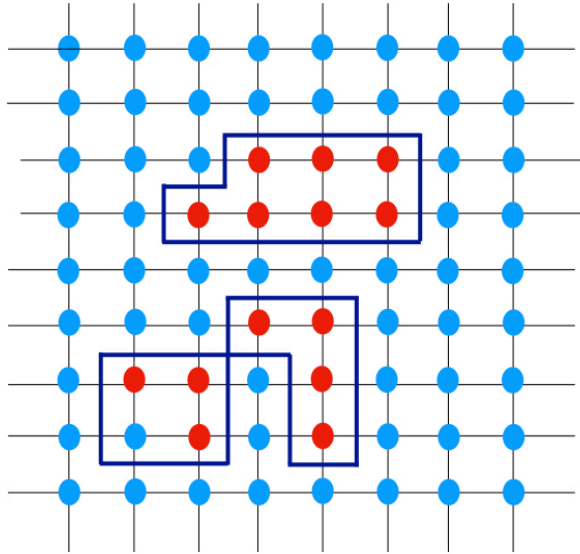
حالت هایی را که می توانند نشان دهنده فاز منظم باشند در نظر می گیریم. این حالت ها در شکل () نشان داده شده اند و انرژی آنها بنابر تقارن یکسان است. فرض کنید که تمام اسپین ها در یکی از کمینه های انرژی مثل $C = (+ + + + + \dots +)$ قرار گرفته باشند. حال

فرض کنید که یکی از اسپین ها از حالت + به حالت - تغییر می کند و حالت $(+++++ \dots +)$ C_1 بدست می آید. تفاوت انرژی این حالت و حالت قبلی برابر است با $E(C_1) - E(C) = 4J$. حال فرض کنید که یکی دیگر از اسپین ها نیز برگردد و حالت $(++++- \dots +)$ C_2 تشکیل شود براحتی معلوم می شود که $E(C_2) - E(C_1) = 0$ و هرچند تا از اسپین ها را که برگردانیم دیگر احتیاجی به انرژی اضافی نداریم. معنای این حرف این است که حالت های $(+++++ \dots +)$ C و $(----- \dots -)$ C' تنها با یک سد انرژی میکروسکوپی به اندازه $4J$ از هم جدا شده اند و ارتفاع این سد ربطی به اندازه سیستم ندارد. بنابراین افت و خیزهای گرمایی اجازه نمی دهند که این سیستم یک بعدی در یکی از کمینه های انرژی گیر کند. به عبارت دیگر افت و خیزهای گرمایی اجازه شکست تقارن و پیدایش فاز منظم را نمی دهند.

۲.۶ استدلال مبتنی بر انرژی آزاد

سیستمی که در دمای ثابت T قرار دارد، سعی می کند به طرف حالت هایی برود که انرژی آزاد آنها کمتر باشد و وقتی به تعادل می رسد که این انرژی آزاد به کمترین مقدار خود رسیده باشد. انرژی آزاد با تابع $F = E - TS$ داده می شود. حال باید از خود سوال کنیم که آیا حالتی مثل $(+++++ \dots +)$ C_0 می تواند حالتی باشد که در آن F کمترین مقدار خود را دارد؟ برای پاسخ به این سوال، انرژی آزاد حالت های نزدیک به C_0 را نگاه می کنیم. برای آنکه F در نقطه C_0 کمترین مقدار را داشته باشد می بایست انرژی آزاد حالت های نزدیک به C_0 از انرژی آزاد حالت C_0 بیشتر باشد. حالتی را در نظر بگیرید که در آن یکی از اسپین ها برگشته باشد. برای این حالت که آن را C' می نامیم، انرژی برابر است با $E_0 + 4J$ که در آن E_0 انرژی حالت C_0 است. ولی تعداد چنین حالت هایی N تا ست زیرا اسپین منفی می تواند در هرجایی از شبکه ی N تایی اتفاق افتاده باشد. بنابراین انرژی آزاد برای یک حالت میکروسکوپی که انرژی اش برابر با $E_0 + 4J$ است برابر است با $F_1 = E_0 + 4J - kT \ln(N)$. در نوشتن این رابطه از این استفاده کرده ایم که آنتروپی یک میکرواحالت که تمام میکرواحالت هایش با احتمال یکسان اشغال می شوند برابر است با $k \ln \Omega$ که در آن Ω تعداد میکرواحالت های مربوطه است. اما رابطه فوق نشان می دهد که با افزایش N همواره F منفی می شود مگر وقتی که T برابر با صفر باشد. بنابراین هر وقت دمای غیرصفر داشته باشیم، حالت C_0 یا متناظر آن که همه اسپین ها منفی هستند نقاط کمینه تابع F و در نتیجه نقاط تعادل ترمودینامیکی نیستند. دقت کنید که این مسئله کاملاً مختص یک بعد است و در واقع برای همه مدل های یک بعدی که برهم کنش هایی با برد محدود دارند صادق است. این نوع استدلال در دو بعد و بالاتر نشان می دهد که گذار فاز در دمای محدود امکان پذیر است. در واقع اگر حالت C_0 و حالت های نزدیک به آن یعنی حالت هایی را که بعضی از اسپین ها برگشته اند، در دو بعد در نظر بگیریم آنگاه وضعیتی مثل شکل () داریم:

یک حالت منظم مثل آنکه در شکل () نشان داده شده و یک حالت کمی بی نظم که در آن گروهی از اسپین ها برگشته و تشکیل یک جزیره



شکل ۵: در دمای صفر همه اسپین ها در یک جهت قرار گرفته اند. در این شکل همه اسپین های زمینه $+1$ هستند ولی در اثر افت و خیز گرمایی اینجا و آنجا جزیره هایی از اسپین های منفی شکل گرفته اند. انرژی این حالت ها از حالت زمینه به اندازه $\Delta E = 2J \times l(C)$ بیشتر است که در آن $l(C)$ محیط کل جزیره های تشکیل شده است. جزیره ها می توانند یک پارچه یا چندپارچه باشند.

داده اند در نظر بگیرید. تفاوت انرژی این حالت را از انرژی حالت منظم با ΔE نشان می دهیم. اگر محیط جزیره را با L نشان دهیم در این صورت خواهیم داشت:

$$\Delta E = 2JL. \quad (۶۲)$$

طبیعی است که تعداد زیادی میکرو حالت مشابه وجود دارد که همه آنها تفاوت انرژی شان با مقدار بالا نشان داده می شود. همگی این حالت ها جزیره های یک یا چند پارچه ای را نشان می دهد که مجموع محیط های آنها برابر با L است. تعداد این جزیره ها را می توان تخمین زد. در واقع اگر تعداد چنین جزیره هایی را با N_L نشان دهیم می توانیم بنویسیم

$$N_L \approx (z - 1)^L. \quad (۶۳)$$

که در آن z تعداد همسایه های یک نقطه از شبکه است. دلیل این رابطه این است که می توان تصور کرد که محیط یک جزیره رد مسیری

است که یک ولگرد از خود به جا می گذارد و این ولگرد در هر قدم از ولگشت خود $z - 1$ انتخاب دارد و چون تعداد قدم ها برابر با L است بنابراین تعداد کل مسیرهای ممکن که می تواند طی کند با تقریب قابل قبولی از مرتبه بالا است. به این ترتیب بدست می آوریم که میزان تغییر انرژی آزاد برای این ماکرو حالت برابر است با:

$$\Delta F \approx \Delta E - T\Delta S = \Delta E - kT\Delta N_L = 2JL - kTL \ln(z - 1) = L(2J - kT \ln(z - 1)) \quad (64)$$

این رابطه نشان می دهد که یک دما وجود دارد که بالاتر از آن به هم خوردن نظم آیزینگ باعث کاهش انرژی آزاد می شود. این دما همان دمای گذار است و توسط رابطه زیر داده می شود:

$$T_c = \frac{2J}{k \ln(z - 1)}, \quad (65)$$

در دماهای پایین تر از T_c نظم فرومغناطیسی پایدار است و در دماهای بالاتر، این نظم پایدار نیست. به چند نکته باید توجه کرد:

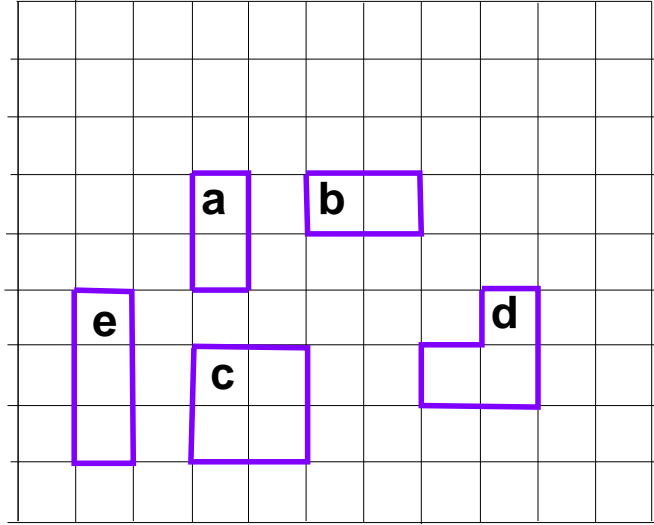
نکته اول: این تجزیه تحلیل و نتیجه آن برای هر مدل آماری با تقارن گسسته کاربرد دارد زیرا اساسا بر مفهوم دیواره حوزه ^۶ مبتنی است که برای هر مدل با تقارن گسسته مطرح است.

نکته دوم: بعد $d = 1$ برای مدل های با تقارن گسسته بعد پایین بحرانی ^۷ خوانده می شود زیرا گذار فاز در این مدل ها در این بعد و پایین تر از آن امکان پذیر نیست. برای مدل های پیوسته نظیر مدل هایزنبورگ نشان داده می شود که بعد پایین بحرانی برابر با 2 است.

۷ مدل دو بعدی آیزینگ

در این بخش به بررسی حل دقیق مدل آیزینگ دو بعدی می پردازیم. نخستین بار لارس آنساگر ^۸ در دهه ۱۹۴۰ توانست حل دقیق این مدل را البته در میدان مغناطیسی صفر بدست آورد و نشان دهد که این مدل واقعا در یک دمای محدود دچار گذار فاز شده و دارای مغناطش خود به خود

Domain Wall^۶
Lower Critical Dimension^۷
Lars Onsager^۸



شکل ۶: حلقه های بسته در شبکه آیزینگ دو بعدی .

می شود. حل آنساگر مبتنی بر روش ماتریس انتقال است. همانطور که می توانید حدس بزنید ماتریس انتقال برای مدل دوبعدی که دارای N سطر و N ستون است یک ماتریس 2^N بعدی است و بنابراین پیدا کردن بزرگترین ویژه مقدار آن به صورت تحلیلی و دقیق کار بسیار دشواری است. اهمیت کار آنساگر نیز این است که توانسته است این کار را انجام دهد و برای اولین بار به طور دقیق نشان دهد که گذار فاز ممکن است. از آن هنگام تا کنون نه تنها روش های مختلفی برای حل مدل آیزینگ کشف شده است بلکه مدل های متنوع دیگری نیز در دو بعد تعریف شده اند که به صورت دقیق قابل حل هستند. امروزه شاخه ای از فیزیک تحت نام «مدل های حل پذیر»^۹ یا «مدل های انتگرال پذیر»^{۱۰} به مطالعه این نوع مدل ها هم در مکانیک آماری و هم در نظریه میدان و ارتباط آنها با یکدیگر می پردازد. در این بخش ما نخست به معرفی دو نوع بسط برای حل اختلالی مدل آیزینگ می پردازیم و سپس یک مفهوم مهم فیزیکی به نام دوگانگی^{۱۱} را معرفی می کنیم که به کمک آن می توان نقطه گذار فاز را به فرض وجود به طور دقیق بدست آورد. دست آخر یک روش حل برای مدل آیزینگ دوبعدی را مطالعه می کنیم.

۱.۷ بسط دمای بالا

بسط دمای بالا یک روش اختلالی است که در دماهای بالا یعنی وقتی که $J \gg kT$ باشد و سیستم تقریباً بی نظم باشد، مفید است. در واقع پارامتر بسط بستگی مستقیم به مقدار $\frac{J}{kT}$ دارد و بنابراین هر چه که دما بالاتر باشد می توان با جملات کمتری در بسط اختلالی تابع پارش مدل آیزینگ را با دقت خوب بدست آورد.

^۹ Exactly Solvable Models

^{۱۰} Integrable Models

^{۱۱} Duality

می دانیم که هامیلتونی مدل آیزینگ به شکل زیر است:

$$H = -J \sum_{i,j} s_i s_j. \quad (66)$$

تابع پارش عبارت است از

$$Z = \sum_S e^{\beta J \sum_{i,j} s_i s_j} \equiv \sum_{s_1, s_2, \dots, s_N} \prod_{links} e^{\beta J s_i s_j}. \quad (67)$$

براحتی می توان نشان داد که رابطه زیر همیشه برقرار است. صحت این رابطه متکی به این است که $s_i s_j$ همواره یا یک است و یا منهای یک

$$e^{K s_i s_j} = \cosh K + s_i s_j \sinh K = \cosh K (1 + s_i s_j \tanh K) =: \cosh K (1 + s_i s_j \tau) \quad (68)$$

در نتیجه می توان تابع پارش را به شکل زیر بازنویسی کرد که در آن $\tau = \tanh \beta J$.

$$Z_N(\beta J) = \sum_S \prod_{links} \cosh \beta J (1 + s_i s_j \tau) = (\cosh \beta J)^L \sum_S \prod_{links} (1 + s_i s_j \tau) \quad (69)$$

که در آن L تعداد تمام اتصالات شبکه است. برای یک شبکه مربعی در دو بعد که N تا اسپین دارد تعداد این اتصالات برابر است با $L = 2N$. در این جا فرض کرده ایم که شرایط مرزی پریودیک برقرار است.

می توان این عبارت را بر حسب قوای متوالی τ بسط داد. جملات اول بسط به ترتیب زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} Z &= (\cosh K)^L \sum_S \prod_{links} (1 + s_i s_j \tau) \\ &= (\cosh K)^L \sum_S \left(1 + \tau \left(\sum_{links} s_i s_j \right) + \tau^2 \left(\sum_{doublelinks} s_i s_j s_k s_l \right) + \tau^3 \left(\sum_{triplelinks} s_i s_j s_k s_l s_m s_n \right) + \dots \right) \quad (70) \end{aligned}$$

که در آن ها $\sum_{doublelinks}$ به معنای جمع روی جفت های اتصالات مختلف و $\sum_{triplelinks}$ به معنای جمع روی تمام اتصالات سه تایی مختلف است والی آخر.

دقت کنید که متناظر با هر $s_i s_j$ یک اتصال در شبکه وجود دارد.

از آنجا که دردمای های بالا τ کوچک است و می توانیم این عبارت را برحسب قوای τ بسط دهیم این بسط به بسط دمای بالا مشهور است. حال توجه می کنیم که روابط زیر همیشه برقرارند که در آن ها \sum_S به معنای جمع روی وضعیت همه اسپین های شبکه است.

$$\sum_s 1 = 2 \quad \sum_s s = 0 \quad (71)$$

و

$$\sum_S 1 = 2^N \quad \sum_S s_i = 0 \quad (72)$$

در نتیجه در جمع های بالا عبارت هایی مثل عبارت زیر که در آن ها حتی یکی از s ها به صورت منفرد ظاهر شده باشد برابر با صفر خواهند بود:

$$\sum_S s_i s_j \cdots s_k = 0 \quad (73)$$

تنها عبارت هایی مخالف صفر خواهند بود که در آن هر کدام از s ها به صورت جفت ظاهر شده باشد. این حرف به این معناست که در رابطه (70) تنها جملاتی باقی خواهند ماند که اتصالات مربوط به آنها مانند شکل (6) یک منحنی بسته تشکیل دهند. یعنی

$$Z = (\cosh K)^{2N} 2^N \sum_{Loop} \tau^{l_{Loop}} \quad (74)$$

که در آن N_l تعداد منحنی های بسته به طول l است.

که در آن جمع روی تمام منحنی های بسته است و l_{loop} محیط یک حلقه است و $Q(\tau)$ تابع مولد تعداد این منحنی هاست. می توان این رابطه را به شکل زیر بازنویسی کرد

$$Z_N(K) = (\cosh K)^{2N} 2^N \sum_{l=0}^{\infty} N_l \tau^l = (\cosh K)^{2N} 2^N Q_N(\tau) \quad (75)$$

که در آن N_l تعداد منحنی های بسته به طول l است. دقت کنید که پارامتر τ وقتی که $\frac{J}{kT}$ کوچک باشد کوچک است به همین مناسبت این بسط را بسط دمای بالا می نامند.

۲.۷ بسط دمای پایین

در بخش گذشته بسط دمای بالا را مطالعه کردیم که بسطی است در فاز بی نظم. حال یک نوع دیگر بسط را مطالعه می کنیم که برای دماهای پایین مناسب است. برای فهم این بسط هامیلتونی را به شکل زیر می نویسیم:

$$H = J \sum_{i,j} (1 - s_i s_j) - 2N = H_0 - 2NJ \quad (۷۶)$$

دقت کنید که این هامیلتونی با هامیلتونی قبلی متفاوت نیست تنها به شکل متفاوتی نوشته شده است. می توانیم بنویسیم:

$$Z_N = e^{2\beta NJ} \sum_{\{s\}} e^{-\beta J \sum_{(i,j)} (1 - s_i s_j)} \quad (۷۷)$$

دقت کنید که با کم و زیاد کردن یک مقدار ثابت هامیلتونی را به شکلی نوشته ایم که به وضوح نشان می دهد حالت منظم یعنی حالتی که همه اسپین ها مثل هم هستند مقدار انرژی صفر دارد. و هر دو اسپین مجاوری که مثل هم نباشند مقدار انرژی را به اندازه $2J$ بالا می برند. بنابراین اگر یک حالت منظم مثل حالتی که همه اسپین ها در حالت $+1$ هستند را در نظر بگیریم این حالت انرژی صفر دارد. حال حالتی را در نظر بگیرید که در آن ها جزیره ای از اسپین ها برگشته اند و مقدار -1 را اختیار کرده اند. اگر محیط این جزیره برابر با l باشد، آنگاه انرژی این حالت برابر است با $2Jl$. دقت کنید که مهم نیست که این جزیره یک پارچه یا دو پارچه یا چندپارچه باشد. از آنجا که طول کل محیط آن برابر با l است انرژی آن برابر با $2Jl$ است. هر حالت دیگری را که در نظر بگیریم چیزی نیست جز جزیره هایی که در آنها اسپین ها برگشته اند و در نتیجه انرژی آن ها برابر است با $2J$ برابر طول کل محیط این جزیره ها. بنابراین تابع پارش را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$Z_N = e^{2\beta NJ} \sum_{l=0}^{\infty} N_l e^{-2\beta J l} \quad (۷۸)$$

دیده می شود که تابعی که در این بسط نیز وجود دارد همان تابع Q است اگر چه متغیر درون آن تغییر کرده است. بنابراین داریم

$$Z_N = e^{2\beta NJ} Q_N(e^{-2\beta J}). \quad (۷۹)$$

۸ دوگانی

در درس های مقدماتی ریاضی با توابع زوج و فرد آشنا شده ایم. زوج و فرد بودن یک تقارن خیلی ساده است که باعث می شود با داشتن مقدار تابع برای یک متغیر، مقدار آن را برای یک مقدار دیگر از متغیر نیز بدست آوریم. یک تابع تناوبی نمونه دیگری از یک تابع متقارن را نشان می دهد.

یک مثال دیگر تابع $f(x) = x + \frac{1}{x}$ است. هرگاه مقدار این تابع را برای $x = 10$ بدانیم مقدار آن نیز برای $x = 0.1$ نیز می دانیم. حال از خود سوال می کنیم که آیا ممکن است که تابع پارش مدل آیزینگ نیز به نوعی چنین خاصیتی داشته باشد؟ آیا ممکن است که تابع پارش مدل آیزینگ در دماهای بالا و پایین به هم مرتبط باشند؟ البته طبیعتاً انتظار داریم که این ارتباط در صورت وجود یک رابطه ساده مثل زوج بودن یا نظیر آن نباشد. نخستین بار کرامرز و وانیر^{۱۲} متوجه شدند که این دو بسط کاملاً شبیه به هم هستند و به هم قابل تبدیل شدن هستند. آنها از این خاصیت استفاده کردند و با فرض اینکه یک گذار فاز وجود داشته باشد توانستند دمای گذار را به طور دقیق بدست آورند. این رابطه یعنی رابطه تابع پارش مدل آیزینگ در دمای بالا و در دمای پایین به دوگانی کرامرز- وانیر معروف است^{۱۳}.

در این بخش سعی می کنیم دوگانی کرامرز- وانیر را بفهمیم. فرض کنید که یک مدل آیزینگ با ثابت برهم کنش J داریم. هرگاه بسط دمای بالا را برای تابع پارش این مدل را در دمای T بنویسیم خواهیم داشت:

$$Z_N(K) = 2^N (\cosh K)^{2N} Q_N(\tanh K) \quad (۸۰)$$

که در آن $K = \frac{J}{kT}$. حال فرض کنید که برای این مدل تابع پارش را در دمای T' بنویسیم و از بسط دمای پایین استفاده کنیم. آنگاه بنابر رابطه (۹۹) خواهیم داشت:

$$Z_N(K') = e^{2K'N} Q_N(e^{-2K'}), \quad (۸۱)$$

که در آن $K' = \frac{J}{kT'}$. آیا رابطه ای بین این دو تابع پارش یعنی تابع پارش یک مدل در دمای بالا و دمای پایین وجود دارد؟ دقت کنید که محاسبه تابع پارش برای مدل آیزینگ کار بسیار سختی است. اما علیرغم این سختی شاید بتوانیم چنین رابطه ای را پیدا کنیم. دلیل این کار هم این است که وقتی به رابطه های (۸۰، ۸۱) نگاه می کنیم می بینیم که هر دوی آنها بر حسب یک تابع نوشته شده اند اگرچه در این تابع متغیرهای متفاوتی برای دمای بالا و پایین به کار رفته است. خود این تابع را با سختی بسیار می توان حساب کرد ولی در این جا نیازی به محاسبه آن نداریم تنها این مهم است که در هر دو تابع پارش این تابع به کار رفته است. برای فهم رابطه دوگانی تنها کاری که باید بکنیم این است که تابع Q_N را بین دو عبارت تابع پارش (۸۰، ۸۱) حذف کنیم. البته لازمه این کار این است که متغیرهای دو تابع را با هم مساوی قرار دهیم. بنابراین قرار می دهیم

$$e^{-2K'} = \tanh K. \quad (۸۲)$$

تمرین: نشان دهید که رابطه بالا معادل است با رابطه زیر:

$$\sinh 2K \sinh 2K' = 1. \quad (۸۳)$$

^{۱۲}Krammers and Wannier
^{۱۳}Krammers-Wannier Duality

دقت کنید که این رابطه بیان می کند وقتی $K = \frac{J}{kT}$ کوچک است $K' = \frac{J}{kT'}$ بزرگ است و بالعکس. این امر به این معناست که وقتی T بزرگ باشد، T' کوچک است و بالعکس.

حال برای هر دو دمایی که در رابطه (۸۳) صدق کنند داریم:

$$\frac{Z_N(K)}{2^N (\cosh K)^{2N}} = \frac{Z_N(K')}{e^{2K'N}}. \quad (۸۴)$$

این همان رابطه ای است که می خواستیم یعنی تابع پارش مدل آیزینگ در دو دمای متفاوت که یکی بالاتر از J/k و دیگری پایین تر از J/k است به هم ربط داده شده اند. بازهم برمی گردیم به مثال ساده ای که در ابتدای این بخش به آن اشاره کردیم. فرض کنید به ما بگویند که یک تابع زوج تنها در یک نقطه غیرتحلیلی است یعنی یا خودش یا یکی از مشتق هایش ناپیوسته است. به نظر شما این نقطه چه نقطه ای است؟ آیا می توانید بدون دانستن شکل دقیق تابع تنها با اطلاعات داده شده یعنی اینکه تابع زوج است و تنها یک نقطه تکین دارد آن نقطه را پیدا کنید؟ براحتی می توانید خودتان را قانع کنید که پاسخ این سوال مثبت است و نقطه مورد نظر نقطه 0 است.

■ تمرین:

هرگاه به شما بگویند که یک تابع دارای تقارن

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (۸۵)$$

است و تنها یک نقطه غیرتحلیلی دارد، آن نقطه کدام است؟

هرگاه به ما بگویند که یک تابع دارای تقارن

$$g(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) + a \quad (۸۶)$$

است که در آن a یک مقدار ثابت است و تنها یک نقطه غیر تحلیلی دارد، بازهم با قطعیت می توانیم بگوییم که آن نقطه $x = 1$ است. چرا که اگر این تابع مثلاً در نقطه 2 غیر تحلیلی باشد، آنگاه رابطه بالا به این معناست که در نقطه $\frac{1}{2}$ نیز غیر تحلیلی است که ناممکن است.

بعد از این مثال های ساده به رابطه (۸۴) توجه می کنیم. برای وضوح بیشتر از طرفین رابطه (۸۴) لگاریتم می گیریم و طرفین را بر واحد

تعداد ذرات حساب می کنیم. با تعریف $f := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_N}{N}$ بدست می آوریم

$$f(K) = f(K') + \ln 2(\cosh^2 K) - 2K' \quad (87)$$

از استدلال و مشاهده فیزیکی می دانیم که در مدل آیزینگ، در صورت وجود، تنها یک نقطه گذار فاز وجود دارد یعنی این مدل تنها دو فاز یکی منظم و دیگری بی نظم دارد و اگر تابع پارش اش یا تابع انرژی آزاد، دارای تکینگی باشد این تکینگی فقط در یک نقطه است. یعنی نقطه ای که شرط $K = K'$ برقرار می شود. بنابراین نقطه گذار فاز با توجه به این تساوی و رابطه (83) از رابطه زیر بدست می آید:

$$\sinh 2K_c \sinh 2K_c = 1. \quad (88)$$

تمرین: از این رابطه استفاده کنید و نشان دهید که دمای بحرانی برابر است با:

$$kT_c = \frac{2J}{\ln(1 + \sqrt{2})}. \quad (89)$$

۹ حل دقیق مدل آیزینگ دوبعدی

مدل آیزینگ دوبعدی نخستین بار در سال ۱۹۴۴ توسط لارس آنساگر^{۱۴} به روش ماتریس انتقال حل شد. برای یک شبکه مربعی $N \times N$ ماتریس انتقال یک ماتریس $2^N \times 2^N$ بعدی است. محاسبه تابع پارش این مدل در حد ترمودینامیک نیازمند بدست آوردن بزرگترین ویژه مقدار ماتریس انتقال است. هرگاه یک شبکه ۱۰ در ۱۰ داشته باشیم، ماتریس انتقال آن یک ماتریس مربعی با بعد ۱۰۲۴ است. چنین ماتریسی را با کامپیوترهای امروزی می توان براحتی قطری کرد. اما یک شبکه ۱۰ در ۱۰ با حد ترمودینامیک خیلی فاصله دارد. برای نزدیک شدن به حد ترمودینامیک شبکه را ۱۰۰ در ۱۰۰ می گیریم که شامل تنها ۱۰ هزار اسپین است. ماتریس انتقال چنین شبکه ای یک ماتریس مربعی با بعد $10^{30} \sim 2^{100}$ است که هیچ کامپیتری توانایی ذخیره کردن درایه هایش را نیز ندارد. به این ترتیب است که یم توانیم اهمیت حل دقیق مدل آیزینگ را خواه با استفاده از روش ماتریس انتقال یعنی روش اولیه آنساگر یا روش های دیگری بفهمیم. در این درس به حل آنساگر نخواهیم پرداخت و به جای آن از روش شمارش حلقه ها می پردازیم. این روش هشت سال بعد از آنساگر در ۱۹۵۲ مشترکاً توسط کتر و وارد^{۱۵} ابداع شد و همان سالها نیز ریچارد

^{۱۴}Lars Onsager
^{۱۵}Ward and Kac

فاینمن سهم مهمی در اصلاح این روش ایفا کرد. به همین دلیل می توانیم این روش را روش شمارش حلقه ها یا روش کتر-وارد-فاینمن^{۱۶} بخوانیم.

بخش مقدماتی کار را قبلا انجام داده ایم به این معنا که مسئله را تبدیل کرده ایم به محاسبه تابع $Q_N(\tau)$ که نیازمند جمع روی تمام گراف های بسته در شبکه است.

$$Z_N(\beta J) = 2^N (\cosh \beta J)^{2N} Q_N(\tau) \quad \tau := \tanh(\beta J) \quad (90)$$

که در آن

$$Q_N(\tau) := \sum_{l=1} N_l \tau^l \quad (91)$$

که در آن N_l تعداد تمام منحنی های بسته به طول l در شبکه است. دشواری کار در این است که وقتی که با حلقه های با محیط زیاد سرو کار داریم انواع خیلی زیادی از این گراف ها وجود دارد که شمارش سیستماتیک آنها را دشوار می کند. با این وجود چنانچه در ادامه خواهیم دید این کار را می توان به طور دقیق انجام داد. برای ادامه باز می گردیم به رابطه (۷۵). هدف ما محاسبه تابع $Q_N(\tau)$ است. نخست چند مفهوم را به دقت تعریف می کنیم:

■ **تعریف:** تابع $n(l)$ عبارت است از تعداد مسیرهای به طول l که می توانیم از یک نقطه از شبکه شروع کنیم و به همان نقطه بازگردیم بدون اینکه از یک ضلع دوبار رد شویم. تمام مسیرهایی که در نظر می گیریم می بایست یک پارچه باشند و نمی بایست خود را قطع کنند.

فرض کنید که بتوانیم جمع روی حلقه ها را برای همه حلقه های یک پارچه انجام دهیم. این تابع را برای تمیز دادنش از تابع $Q(\tau)$ با $Q^{(1)}(\tau)$ نمایش می دهیم.

$$Q^{(1)}(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{N^{(1)}(l)}{l} \tau^l, \quad (92)$$

که در آن $N^{(1)}(l)$ تعداد تمام حلقه های یک پارچه به طول l است. حال سوال این است که بقیه مسیرهای چند پارچه را چه کنیم؟ پاسخ این

^{۱۶}Kac-Ward-Feynman Method

سوال ساده است و آن اینکه می توانیم بنویسیم:

$$Q(\tau) = e^{Q^{(1)}(\tau)}. \quad (93)$$

برای درک این رابطه طرف راست را بسط می دهیم:

$$Q(\tau) = 1 + Q^{(1)}(\tau) + \frac{1}{2!}Q^{(1)}(\tau)Q^{(1)}(\tau) + \frac{1}{3!}Q^{(1)}(\tau)Q^{(1)}(\tau)Q^{(1)}(\tau) + \dots \quad (94)$$

جمله اول سهم همه مسیرهای یک پارچه است. جمله بعدی سهم همه حلقه های دو پارچه است و حاصل نیز بر دو تقسیم شده است تا از دوباره شماری پرهیز شود و الی آخر.

■ نکته مهم:

به این ترتیب مسیری که خودشان را قطع می کنند به عنوان مسیرهای دو یا چند پارچه شمرده می شوند. هرگاه یک مسیر دارای یک نقطه تقاطع باشد در رتبه ۲ یعنی در $Q^{(1)}(\tau)Q^{(1)}(\tau)$ و هرگاه یک مسیر دارای دو نقطه تقاطع باشد در رتبه سه یعنی در $Q^{(1)}(\tau)Q^{(1)}(\tau)Q^{(1)}(\tau)$ شمرده می شود و الی آخر.

تابع $Q^{(1)}(\tau)$ نیازمند محاسبه $N^{(1)}(l)$ یعنی تعداد حلقه های بسته به طول l در تمام شبکه است. این محاسبه را می توان تقلیل داد به محاسبه تعداد حلقه های بسته به طول l که از یک نقطه مبدا مثلا نقطه $(0, 0)$ شروع می کنند و به آن باز می گردند. اگر این تعداد را با $n(l)$ نشان دهیم آنگاه براحتی معلوم می شود که

$$N^{(1)}(l) = \frac{Nn(l)}{l}.$$

دلیل اش هم این است که نقطه شروع می تواند به جای A هر نقطه دیگری باشد و تعداد این نقاط N تاست. اما l تا از این نقاط یعنی نقاطی که روی مسیر هستند همگی منجر به یک مسیر می شوند و در واقع l بار شمرده می شوند. بنابراین می بایست عدد نهایی را بر l تقسیم کرد.

با این حساب تابع $Q^{(1)}(\tau)$ به شکل زیر درمی آید:

$$Q^{(1)}(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{Nn(l, \tau)}{l} \quad (95)$$

■ **تعریف:** می توانیم از زاویه دیگری به این مسئله نگاه کنیم. متحرکی را در نظر بگیرید که در هر گام یک امتیاز یا وزن به اندازه τ کسب می کند. حال اگر این متحرک l قدم بردارد وزنی که اختیار می کند برابر است با τ^l . حال به این متحرک به اندازه طی کردن l گام فرصت می دهیم و کل وزنی را حساب می کنیم که در طی کردن همه مسیرهای بسته و بازگشت به نقطه اولیه کسب می کند. این وزن را با تابع $n(l, \tau)$ نشان می دهیم. تمام مسیرهایی که در نظر می گیریم می بایست یک پارچه باشند و نمی بایست خود را قطع کنند.

این تابع را برای مقادیر کم می توان براحتی محاسبه کرد. خواننده براحتی می تواند خود را قانع کند که در یک شبکه مربعی مقادیر زیر درست اند:

$$n(1, \tau) = n(2, \tau) = n(3, \tau) = 0 \quad n(4, \tau) = 4\tau^4 \quad n(6, \tau) = 8\tau^6, \quad n(8, \tau) = 16\tau^8. \quad (96)$$

محاسبه تابع $n(l, \tau)$ برای طول های زیاد بسیار سخت است. دلیل آن هم امتناعی است که در قطع نکردن مسیر و هم چنین دو باره طی نکردن یک ضلع وجود دارد.

به این ترتیب به نظر می رسد که همه چیز در محاسبه تابع پارش مدل آیزینگ موکول شده است به محاسبه تابع $n(l, \tau)$. این استدلال تقریباً درست است اما برای اینکه حل واقعا دقیق را بدست آوریم می بایست به یک نکته خیلی مهم توجه کنیم. نکته این است که وقتی عبارت $Q^{(1)^2}(\tau)$ را حساب می کنیم مسیرهایی مثل آنچه که در شکل (d) در (۷) نشان داده شده است، نیز پدیدار می شوند. چنین مسیرهایی غیرمجازند و اصلاً نمی بایست شمرده شوند. می بایست برای چنین جلوگیری از پیدایش مسیرهای غیرمجاز فکری بکنیم. دقت کنید که با محدود کردن خود به شمارش تنها مسیرهای غیرمقاطع کاری کرده ایم که مسیرهای دارای تقاطع در رتبه های بالاتر شمرده شوند. می بایست تابع رتبه یک را چنان بنویسیم که خاصیت های زیر را داشته باشد:

■ **الف-** همانطور که در تعریف اش گفتیم، هیچ مسیر متقاطعی شمرده در آن وجود نداشته باشد. بنابراین یک گراف مجاز مثل گراف a در شکل (۷) به عنوان یک مسیر دو پارچه و یک گراف مجاز مثل b در همان شکل به عنوان یک مسیر سه پارچه شمرده خواهند شد.

■ **ب-** هیچ مسیری که در آن یک ضلع دوبار طی شده است نیز وجود نداشته باشد. بنابراین مسیری مثل مسیر c در شکل (۷) حتی در رتبه یک نباید شمرده شود.

■ ب- در مرتبه های بالاتر مسیرهایی مثل گراف (d) در شکل (۷) پدیدار نشود.

این کارها را مجموعاً اصلاح تابع رتبه یک می خوانیم و در بخش بعدی این کار را انجام می دهیم:

۱.۹ اصلاح تابع رتبه یک

دقت کنید که اصلاح تابع رتبه یک می بایست دو کار را انجام دهد. این که هر دو کار را می توان با یک ترفند حل کرد بی اندازه زیبا و جالب است. برای اینکار به جای مسیره های ساده مسیره های جهت دار را در نظر می گیریم و در هر گام به نحوه حرکت متحرک در هر گام بسته به این که گام او رو به جلو یا عقب یا چرخش به راست یا چپ باشد وزن می دهیم. بجای تابع $n(l, \tau)$ تابعی که بدست می آوریم را $n_\omega(l, \tau)$ می نامیم. این تابع جمع روی تمام منحنی های یک پارچه و جهت دار به طول l است و منحنی ها می توانند خود را نیز قطع کنند.

چنانکه خواهیم دید هر مسیر یکپارچه بدون تقاطع وزن کلی -1 اختیار می کند و همه اشکالات سه گانه فوق برطرف می شوند. از آنجا که یک مسیر مجاز در دو جهت مختلف طی می شود و در هر دو جهت وزن -1 اختیار می کند، نهایتاً کافی است که تابع بدست آمده را بر 2 تقسیم کنیم. بنابراین داریم:

$$n(l, \tau) = \frac{-1}{2} n_\omega(l, \tau). \quad (97)$$

حال توضیح می دهیم که چگونه وزن ها باعث برطرف شدن اشکالات سه گانه فوق می شود.

نخست برای اینکه مسیره های متقاطع را حذف کنیم به هر مسیر یک وزن می دهیم. این وزن دهی می بایست چنان باشد که مسیره های بدون تقاطع وزن یک اختیار کنند و مسیره های با تقاطع وزن های یکدیگر را خنثی کنند. وزن را به ترتیب زیر انتخاب می کنیم.

■ **تعریف وزن مسیره ها:** یک متحرک در نظر می گیریم که از نقطه ای مثل A شروع کرده و پس از طی یک مسیر بسته به همان نقطه برمی

گردد. هرگاه بردار مماس بر مسیر این متحرک زاویه θ را در جهت پادساعت گرد طی کند، وزنی که به این مسیر نسبت می دهیم برابر است با:

$$\omega(c) := -(-1)^{\frac{\theta}{2\pi}}. \quad (98)$$

الف - چگونگی حذف مسیرهای متقاطع در رتبه یک: شکل (۸)

هرگاه یک مسیر بدون تقاطع را در نظر بگیریم این مسیر در دو جهت ساعت گرد یا پادساعت گرد می تواند طی شود. به این ترتیب کل وزنی که به آن داده می شود برابر با 2 است. می توانیم در پایان تعداد مسیرها را بر دو تقسیم کنیم تا عدد واقعی بدست آید. اما اگر یک مسیر با تقاطع را در نظر بگیریم مثل مسیری که در شکل (۸) نشان داده شده است.

وزن کل این مسیر برابر با صفر است. برای فهمیدن این نکته به همان شکل نگاه می کنیم. قسمت رنگی در هر دو گراف یک مسیر دلخواه است. اگر فقط قسمت رنگی وجود داشته باشد، وقتی که از نقطه A حرکت می کنیم، تا به همان نقطه برگردیم بردار مماس بر مسیر زاویه θ را طی می کند. با توجه به شکل در مسیر a زاویه طی شده برابر است با

$$\theta_a := \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \theta$$

و در مسیر b برابر است با:

$$\theta_b := \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \theta + \pi.$$

در نتیجه مجموع وزن دو شکل (a) و (b) برابر است با $(-1)^{i\theta+i\pi} + (-1)^{i\theta} = 0$.

به این ترتیب تنها مسیرهایی در رتبه یک باقی می ماند که هیچ نوع تقاطعی نداشته باشند.

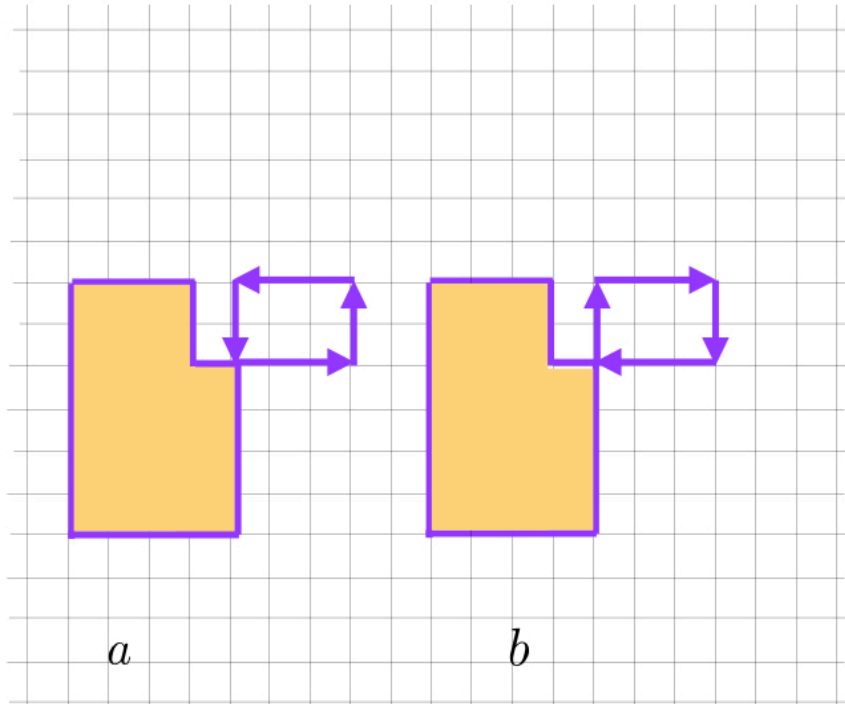
ب- چگونگی حذف مسیرهای رتبه یک که در آن ها یک ضلع دوبار طی شده است، شکل (۹).

برای از بین بردن این مسیر غیرمجاز یک مسیر مشابه در رتبه یک اضافه می کنیم که وزن آن وزن مسیر بالا را خنثی کند. ^{۱۷} مسیر (b) در

شکل (۹) چنین مسیری است. اگر به زاویه کل طی شده توجه کنیم متوجه می شویم که این وزن با شروع از نقطه A برابر است با:

$$\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \theta + \pi. \quad (100)$$

^{۱۷} این ایده از ایده مشابهی در بازهنجارش نظریه میدان گرفته شده. به این نوع جملات اصطلاحات *Counter – terms* گفته می شود.



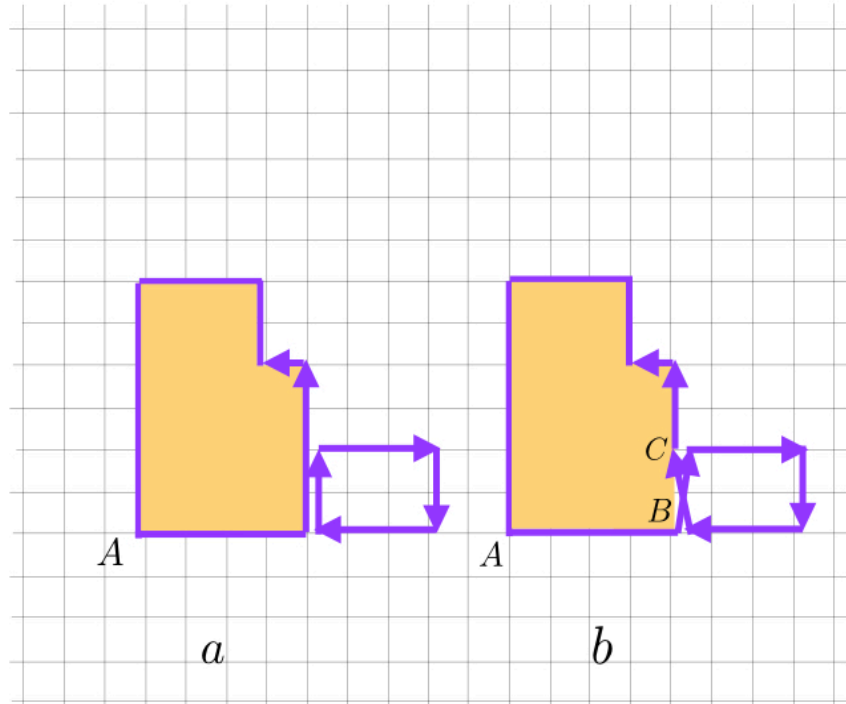
شکل ۸: هرگاه مسیرها را جهت دار انتخاب کنیم و به هر مسیر وزن مناسب بدهیم، همه مسیرهای متقاطع در تابع $Q^{(1)}(\tau)$ یکدیگر را حذف می کنند. به این ترتیب مسیرهای با یک تقاطع در رتبه دوم، مسیرهای با دو تقاطع در رتبه سوم و مسیرهای با سه تقاطع در رتبه چهارم و الی آخر پدیدار می شوند. در هر دو شکل a و b قسمت رنگی نشان دهنده یک گراف دلخواه و یکسان است. تفاوت این دو شکل در جهت طی شدن حلقه اضافه شده است. این حلقه اضافی باعث می شود که این دو شکل وزن های مخالف هم داشته و یک دیگر را حذف کنند.

در نتیجه وزن کل این مسیر برابر است با:

$$\omega_b = -(-1)^{i\theta} = -(-1)^{i\theta_0 + i\pi} = (-1)^{i\theta_0} \quad (101)$$

به این ترتیب این دو مسیر که یکی در رتبه یک و دیگری در رتبه دو ظاهر می شود یک دیگر را خنثی می کنند و چنین مسیرهای غیرمجازی پدیدار نمی شود.

■ پ - چگونگی حذف مسیرهای غیرمجاز در رتبه های بالا، شکل (۱۰) .



شکل ۱۰: مسیر سمت چپ یک گراف غیر مجاز را نشان می دهد که در رتبه دوم و با وزن یک وارد می شود. برای خنثی کردن این گراف یک گراف مشابه ولی با وزن -1 به رتبه یک اضافه می کنیم (گراف سمت راست). این گراف را اصطلاحاً *Counter Term* می نامند. دقت کنید که این گراف هیچ گراف دیگری را در رتبه یک خنثی نمی کند و تنها کارش خنثی کردن گراف سمت چپ در رتبه دو است. روی این مسیر متحرک پس از طی کردن ضلع BC منحنی سمت راست را در جهت ساعت گرد طی می کند و دوباره ضلع BC را پیموده و مسیر کامل را طی می کند.

۲.۹ شمارش دقیق مسیرهای نامقاطع

حال به نقطه ای رسیده ایم که می توانیم شمارش منحنی ها را بدون نگرانی از دوباره شماری آنها و یا شمارش منحنی های غیر مجاز شروع کنیم. هدف ما آن است که تعداد مسیرهای بسته به طول l را که یک ذره می تواند در شبکه طی کند بشماریم. فرض کنید که تعداد این مسیرها وقتی که این ذره از نقطه مبدأ شروع به حرکت کند برابر با n_l باشد. در این صورت تعداد کل مسیرهایی که می تواند در شبکه طی کند برابر است با

$N_l := \frac{Nn_l}{l}$. بنابراین کافی است که خود را محدود به مسیرهایی کنیم که از مبدأ شروع می شوند. مسئله ما حالا یک شکل کاملاً مشخص پیدا کرده است که در زیر برای وضوح آن را دو باره می نویسیم:

■ مسئله:

متحرکی از مبدأ شروع به حرکت می کند. در هر گام که به جلو برمی دارد وزن τ را ذخیره می کند، در هر گردش به راست وزن $\tau e^{i\frac{\pi}{4}}$ و در هر گردش به چپ وزن $\tau e^{-i\frac{\pi}{4}}$ را ذخیره می کند. در هر گام که به عقب برمی دارد نیز وزن صفر را ذخیره می کند. وقتی که این متحرک به نقطه مبدأ بازمی گردد وزنی را ذخیره کرده است. می خواهیم بدانیم که کل وزنی را که این ذره می تواند با طی کردن تمام مسیره‌های ممکن با طول l ذخیره کند چقدر است. هرگاه این وزن کل را محاسبه کنیم با تقسیم آن بر 2- تعداد کل مسیره‌های بسته به طول l ، یعنی n_l را بدست می آوریم. قبل از اینکه حل مسئله کلی را بنویسیم به این تمرین توجه کنید و آن را حل کنید.

■ تمرین:

فرض کنید که ذره از نقطه $(0, 0)$ شروع به حرکت می کند و پس از طی k قدم به نقطه (x, y) می رسد. در این صورت وزن کلی که جمع کرده است را با $M_k(x, y)$ نشان می دهیم. مسیره‌ها می توانند خود را قطع کنند یا نکنند. مقادیر زیر را مستقیماً حساب کنید:

$$M_2(2, 2), \quad M_3(2, 2), \quad M_4(2, 2), \quad M_5(2, 2), \quad M_6(2, 2). \quad (102)$$

هم چنین مقادیر زیر را حساب کنید:

$$M_6(3, 3), \quad M_8(3, 3), \quad M_{10}(3, 3), \quad M_{12}(3, 3), \quad M_9(3, 3). \quad (103)$$

با توجه به تعریف هایی که قبلاً داشته ایم داریم:

$$M_l(0, 0) \equiv n_\omega(l, \tau).$$

چگونه می توان چنین چیز پیچیده ای را حساب کرد؟ راه اش نوشتن یک رابطه تکرار است. مثلاً شاید بتوان $M_l(0, 0)$ را به $M_{l-1}(0, 0)$ ربط داد. به یک مرتبه نمی توانیم چنین رابطه تکراری را بنویسیم بلکه می بایست مرحله به مرحله پیش برویم. مثلاً می توان $M_l(x, y)$ را به $M_{l-1}(x', y')$ ربط داد که در آن (x', y') یکی از همسایه های (x, y) است. کمی که بیشتر فکر کنیم متوجه می شویم که $M_l(x, y)$ را می بایست به صورت زیر تجزیه کنیم و بشکنیم. قدم آخری که ذره برای رسیدن به نقطه (x, y) بردارد می تواند رو به بالا، رو به پایین، رو به

سمت راست و یا رو به سمت چپ باشد که وزن های مربوطه را به ترتیب با $M_l^u(x, y)$, $M_l^d(x, y)$, $M_l^r(x, y)$ و $M_l^l(x, y)$ نشان می دهیم. در نتیجه داریم:

$$M_l(x, y) = M_l^u(x, y) + M_l^d(x, y) + M_l^r(x, y) + M_l^l(x, y).$$

حال برای این توابع می توانیم یک رابطه تکرار بنویسیم:

■ حل مسئله:

متحرک از نقطه $(0, 0)$ شروع به حرکت می کند و وقتی که بعد از طی کردن k گام به نقطه (x, y) می رسد وزن $M_k(x, y)$ را ذخیره کرده است. هرگاه آخرین گام را برای رسیدن به نقطه (x, y) به طرف راست بردارد این وزن را با $M_k^r(x, y)$ نشان می دهیم. همینطور وزن های $M_k^l(x, y)$, $M_k^u(x, y)$ و $M_k^d(x, y)$ را مطابق با اینکه آخرین گام را به طرف چپ، بالا و یاپایین بردارد تعریف می کنیم.

■ تمرین:

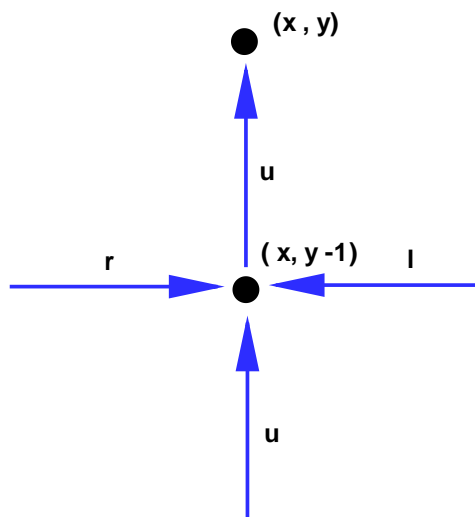
برای اینکه بیشتر با توابع بالا آشنا شوید، عبارت های زیر را حساب کنید:

$$M_2^u(x, y), \quad M_2^d(x, y), \quad M_2^r(x, y), \quad M_2^l(x, y). \quad (104)$$

$$M_3^u(x, y), \quad M_3^d(x, y), \quad M_3^r(x, y), \quad M_3^l(x, y). \quad (105)$$

برای محاسبه این توابع برای تعداد گام های دلخواه، یک معادله تکرار برای این وزن ها به شکل زیر می نویسیم که در آن $\alpha = e^{\frac{i\pi}{4}}$ و $\beta = e^{\frac{-i\pi}{4}}$. نگاه کنید به شکل (۱۱).

$$\begin{aligned} M_k^u(x, y) &= \tau M_{k-1}^u(x, y-1) + 0 M_{k-1}^d(x, y-1) + \beta\tau M_{k-1}^r(x, y-1) + \alpha\tau M_{k-1}^l(x, y-1) \\ M_k^d(x, y) &= 0 M_{k-1}^u(x, y+1) + \tau M_{k-1}^d(x, y+1) + \alpha\tau M_{k-1}^r(x, y+1) + \beta\tau M_{k-1}^l(x, y+1) \\ M_k^r(x, y) &= \alpha\tau M_{k-1}^u(x-1, y) + \beta\tau M_{k-1}^d(x-1, y) + \tau M_{k-1}^r(x-1, y) + 0 M_{k-1}^l(x, y-1) \\ M_k^l(x, y) &= \beta\tau M_{k-1}^u(x+1, y) + \alpha\tau M_{k-1}^d(x+1, y) + 0 M_{k-1}^r(x, y-1) + \tau M_{k-1}^l(x, y-1) \end{aligned} \quad (106)$$



شکل ۱۱: شکلی که منجر به نوشتن اولین سطر از معادلات تکرار شده است. برای سطر های دیگر نیز شکل های مشابه وجود دارد.

روابط تکرار فوق برحسب مود های فوریه ساده تر می شوند:

$$\hat{M}_k^a(p, q) = \sum_{x, y} e^{ipx+iqy} M_k^a(x, y) \quad a = u, d, r, l. \quad (107)$$

$$M^a(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq e^{-ipx-iqy} M^a(p, q). \quad (108)$$

در نتیجه روابط تکرار به صورت زیر درمی آیند:

$$\begin{aligned} \hat{M}_k^u(p, q) &= \tau e^{iq} \left(\hat{M}_{k-1}^u(p, q) + 0 \hat{M}_{k-1}^d(p, q) + \beta \hat{M}_{k-1}^r(p, q) + \alpha \hat{M}_k^l(p, q) \right) \\ \hat{M}_k^d(p, q) &= \tau e^{-iq} \left(0 \hat{M}_{k-1}^u(p, q) + \hat{M}_{k-1}^d(p, q) + \alpha \hat{M}_{k-1}^r(p, q) + \beta \hat{M}_k^l(p, q) \right) \\ \hat{M}_k^r(p, q) &= \tau e^{ip} \left(\alpha \hat{M}_{k-1}^u(p, q) + \beta \hat{M}_{k-1}^d(p, q) + \hat{M}_{k-1}^r(p, q) + 0 \hat{M}_k^l(p, q) \right) \\ \hat{M}_k^l(p, q) &= \tau e^{-ip} \left(\beta \hat{M}_{k-1}^u(p, q) + \alpha \hat{M}_{k-1}^d(p, q) + 0 \hat{M}_{k-1}^r(p, q) + \hat{M}_k^l(p, q) \right) \end{aligned} \quad (109)$$

این رابطه را می توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} \hat{M}_k^u(p, q) \\ \hat{M}_k^d(p, q) \\ \hat{M}_k^r(p, q) \\ \hat{M}_k^l(p, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau e^{iq} & 0 & \tau e^{iq}\beta & \tau e^{iq}\alpha \\ 0 & \tau e^{-iq} & \tau e^{-iq}\alpha & \tau e^{-iq}\beta \\ \tau e^{ip}\alpha & \tau e^{ip}\beta & \tau e^{ip} & 0 \\ \tau e^{-ip}\beta & \tau e^{-ip}\alpha & 0 & \tau e^{-ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{M}_{k-1}^u(p, q) \\ \hat{M}_{k-1}^d(p, q) \\ \hat{M}_{k-1}^r(p, q) \\ \hat{M}_{k-1}^l(p, q) \end{pmatrix} \quad (110)$$

که می توان آن را به شکل خلاصه زیر نوشت :

$$|\hat{M}_k(p, q)\rangle = S|\hat{M}_{k-1}(p, q)\rangle \quad (111)$$

و یا بازهم به صورت خلاصه تر

$$|\hat{M}_l(p, q)\rangle = S^{l-1}|\hat{M}_1(p, q)\rangle \quad (112)$$

حال احتیاج به شرایط اولیه داریم . متحرک می تواند قدم اول را به سمت بالا یا پایین یا چپ یا راست بردارد. همه مسیرهایی که قدم اول شان با هم متفاوت باشند مسیرهای کاملا متفاوتی هستند. بنابراین برای شمارش همه مسیرها می بایست مسیرهای مربوط به چهار شرط اولیه متفاوت را حساب کرده و سپس همه آنها را با هم جمع کنیم.

■ تمرین:

عبارت های زیر را حساب کنید:

$$M_1^u(x, y) \quad M_1^d(x, y) \quad M_1^r(x, y) \quad M_1^l(x, y). \quad (113)$$

■ تمرین: عبارت های زیر را حساب کنید:

$$M_1^u(p, q) \quad M_1^d(p, q) \quad M_1^r(p, q) \quad M_1^l(p, q). \quad (114)$$

بسته به این که متحرک قدم اول را در کدام جهت بردارد $|\hat{M}_1(p, q)\rangle$ یکی از بردارهای زیر خواهد بود.

$$|\hat{M}_1(p, q)\rangle = \begin{pmatrix} e^{iq} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\hat{M}_1(p, q)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-iq} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\hat{M}_1(p, q)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{ip} \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\hat{M}_1(p, q)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-ip} \end{pmatrix} \quad (115)$$

می بایست وزن کل بدست آمده را برای چهارنوع شرایط اولیه بالا با هم جمع کنیم. بنابراین با توجه به خطی بودن معادله (112) می توانیم ماتریس های بالا را با هم جمع کنیم و بنویسیم:

$$|\hat{M}_l(p, q)\rangle = S^{l-1}|M_1(p, q)\rangle \quad |\hat{M}_1(p, q)\rangle = \begin{pmatrix} e^{iq} \\ e^{-iq} \\ e^{ip} \\ e^{-ip} \end{pmatrix} \quad (116)$$

هدف ما پیدا کردن کمیت زیراست:

$$n_l = \frac{-1}{2}(M_l^u(0, 0) + M_l^d(0, 0) + M_l^r(0, 0) + M_l^l(0, 0)). \quad (117)$$

با تعریف یک برداری سطری به صورت

$$\langle u| = (1, 1, 1, 1) \quad (118)$$

می توان نوشت:

$$n_l = \frac{-1}{2}\langle u|M_l(0, 0)\rangle \quad (119)$$

که با توجه به رابطه (107) برابر است با:

$$n_l = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dpdq \langle u|\hat{M}_l(p, q)\rangle$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dpdq \langle u | S^{l-1} | \hat{M}_1(p, q) \rangle \quad (120)$$

ماتریس S را قطری کنیم و ویژه مقادیرهای آن را با λ_1 تا λ_4 نشان می دهیم که به ترتیب متناظر با ویژه بردارهای $|e_1\rangle$ تا $|e_4\rangle$ هستند. در این صورت خواهیم داشت :

$$n_l = \frac{-1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq \sum_{i=1}^4 \lambda_i^l \langle u | e_i \rangle \langle e_i | \hat{M}_1 \rangle \quad (121)$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} Q^{(1)}(\tau) &\equiv \sum_1^l \frac{N n_l}{l} = \frac{-N}{4\pi^2} \sum_1^l \frac{1}{l} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq \sum_{i=1}^4 \lambda_i^l \langle u | e_i \rangle \langle e_i | \hat{M}_1 \rangle \\ &= \frac{N}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} dp \int_0^{2\pi} dq \sum_{i=1}^4 \ln(1 - \lambda_i) \langle u | e_i \rangle \langle e_i | \hat{M}_1 \rangle \end{aligned} \quad (122)$$

بنابراین مسئله منتهی می شود به پیدا کردن ویژه مقادیرها و ویژه بردارهای ماتریس S . ب

■ تمرین: ویژه مقادیرها و ویژه بردارهای ماتریس S را پیدا کنید.

بعد از آنکه $Q^{(1)}(\tau)$ را از رابطه بالا پیدا کردیم یافتن تابع پارش و انرژی آزاد सरراست است. خواهیم داشت:

$$Z = (2 \cosh^2 K)^N e^{NQ^{(1)}(\tau)} \quad (123)$$

که در آن $\tilde{Q}^{(1)}(\tau) := \frac{1}{N} Q^{(1)}(\tau)$ و از آنجا

$$f(K) := \frac{-kT}{N} \ln Z = -kT \left(\ln(2 \cosh^2 K) + \tilde{Q}^{(1)}(\tau) \right) \quad (124)$$

■ تمرین: نشان دهید که تابع انرژی آزاد مدل آیزینگ به صورت زیر نوشته می شود.

نت

$$f(\beta) = -\frac{1}{\beta J} \ln(2 \cosh \beta J) - \frac{1}{2\beta J(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} dp_x \int_{-\pi}^{\pi} dp_y \ln[(1 + \tau^2)^2 - 2\tau(1 - \tau^2)](\cos p_x + \cos p_y). \quad (125)$$

۱۰ مسئله ها

■ مسئله یک: مدل آیزینگ را با میدان مغناطیسی ولی با شرایط مرزی ثابت زیر در نظر بگیرید:

$$S_1 = 1, \quad S_N = 1. \quad (126)$$

با استفاده از روش ماتریس انتقال تابع پارش را حساب کنید و نشان دهید که در حد ترمودینامیک انرژی آزاد با آنچه که تحت شرایط مرزی پریودیک بدست می آورید یکی است.

■ مسئله دو: مدل آیزینگ را با شرایط مرزی آزاد در نظر بگیرید به این معنا که اسپین های سر و ته زنجیره می توانند هر مقداری را اختیار کنند ولی الزاما با هم برابر نیستند. با استفاده از روش ماتریس انتقال تابع پارش را حساب کنید و نشان دهید که در حد ترمودینامیک انرژی آزاد با آنچه که تحت شرایط مرزی پریودیک بدست می آورید یکی است.

■ مسئله سه: مدل آیزینگ را در میدان مغناطیسی صفر در نظر بگیرید ولی فرض کنید که ثابت جفتیدگی اسپین های مجاور به ترتیب J و $-J$ است. تابع پارش را بدست آورید و از روی آن انرژی آزاد را محاسبه کنید.

■ مسئله چهار: یک سیستم یک بعدی اسپین با هامیلتونی پادفرومغناطیسی زیر در نظر بگیرید:

$$H = J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} - B \sum_{i=1}^N (-1)^i S_i \quad (127)$$

شرایط مرزی را پریودیک در نظر بگیرید و طول رشته را طوری بگیرید که این نوع شرط امکان پذیر باشد. حال تابع پارش را محاسبه کنید و سپس مغناطش متناوب را که به صورت زیر تعریف می شود حساب کنید:

$$M_s := \left\langle \sum_{i=1}^N (-1)^i S_i \right\rangle. \quad (128)$$

تغییرات M_s را به B حساب کنید. می توانید این کمیت را χ_s بنامید.

■ مسئله پنج: یک زنجیره اسپینی را با هامیلتونی زیر در نظر بگیرید:

$$H = \sum_{i=1}^N -JS_i S_{i+1} - KS_i S_{i+2} - B \sum_{i=1}^N S_i. \quad (129)$$

در این زنجیره هر اسپین با نزدیک ترین همسایه و هم چنین همسایه بعدی اش برهم کنش می کند. آیا این مدل گذار فاز از خود نشان می دهد؟ مغناطش را بر حسب میدان مغناطیسی بدست آورید. آیا مغناطش خود بخود پدیدار می شود؟

■ مسئله شش: در متن درس تابع همبستگی را برای مدل آیزینگ از روش مستقیم حساب کردیم. حال با استفاده از روش ماتریس انتقال و استفاده از رابطه $G(i, j) = kT \frac{\partial \langle S_i \rangle}{\partial B_j}$ تابع همبستگی را حساب کنید.

■ مسئله هفت: مدل $Q - State Potts$ به صورت زیر تعریف می شود. در هر نقطه ی i از شبکه یک متغیر S_i وجود دارد که می تواند Q متغیر متمایز از مجموعه $\{1, 2, \dots, Q\}$ اختیار کند.
هامیلتونی به شکل زیر است:

$$H = -J \sum_{i=1}^N \delta_{S_i, S_{i+1}} \quad (130)$$

در این مسئله توجه خود را به حالت $Q = 3$ معطوف می کنیم.

الف: زنجیره را باز بگیرید و با هر روشی که می توانید تابع پارش این مدل را حساب کنید. متوسط $\langle S_i \rangle$ و تابع همبستگی $\langle S_i S_j \rangle$ را حساب کنید. طول هم بستگی را بدست آورید.

ب: یک میدان خارجی اضافه کنید که در اثر آن هامیلتونی به شکل زیر در می آید:

$$H = -J \sum_{i=1}^N \delta_{S_i, S_{i+1}} - B \sum_{i=1}^N \delta_{S_i, 1}. \quad (131)$$

با محاسبه تابع پارش متوسط $\langle S_i \rangle$ را حساب کنید. در این قسمت شرایط مرزی را پرئودیک در نظر بگیرید.

■ مسئله هشت: در مدل آیزینگ بدون میدان مغناطیسی و با شرایط مرزی پرئودیک احتمال این را که 3 اسپین مجاور مقدار یکسان داشته باشند را حساب کنید. نتیجه خود را به k اسپین تعمیم دهید.

■ مسئله نه: مدل آیزینگ را روی یک زنجیره باز با طول N در نظر بگیرید. فرض کنید میدان مغناطیسی نیز برابر با صفر است. به حالتی که k تا اسپین سمت چپ همه در یک حالت مثلاً $+1$ هستند و بقیه اسپین های سمت راست در حالت -1 هستند اصطلاحاً حالتی با یک دیواره حوزه 1^N می گویند.

الف: احتمال اینکه در سیستم یک دیواره حوزه وجود داشته باشد چقدر است؟

ب: احتمال اینکه در یک سیستم 2 تا دیواره حوزه وجود داشته باشد چقدر است؟

ج: انرژی یک حالت برحسب تعداد دیواره های حوزه ای که دارد بنویسید. با شمارش تعداد حالت هایی که دارای k تا دیواره حوزه دارند تابع پارش مدل آیزینگ را حساب کنید.

د: تعداد متوسط دیواره های حوزه را در یک دمای خاص حساب کنید.

■ مسئله ده: مدل $StatePotts - 3$ را با هامیلتونی زیر در نظر بگیرید: شرایط مرزی را پرئودیک در نظر بگیرید:

$$H = -J \sum_{i=1}^N \delta_{S_i, S_{i+1}}. \quad (132)$$

الف: تابع پارش این سیستم را حساب کنید.

ب: احتمال اینکه دو تا سایت متوالی در یک حالت قرار داشته باشند را محاسبه کنید.

پ: احتمال اینکه سه تا سایت متوالی در یک حالت قرار داشته باشند را حساب کنید.

■ مسئله یازده: با استفاده از بسط دمای بالا تابع پارش مدل آیزینگ یک بعدی را وقتی که میدان مغناطیسی صفر است به طور دقیق بدست آورید. هم چنین با استفاده از این روش تابع همبستگی بین دو اسپین را بدست آورید. شرایط مرزی را پرئودیک در نظر بگیرید.

■ مسئله دوازده: تابع پارش مدل آیزینگ دو بعدی را در غیاب میدان مغناطیسی تا مرتبه τ^8 بدست آورید. در این جا $\tau = \tanh(\frac{J}{kT})$. هم چنین تا این رتبه تابع همبستگی بین دو اسپین دلخواه را بدست آورید.

■ مسئله سیزده: روشی را که برای بسط دمای بالا در مدل آیزینگ به کار بردیم برای مدل Q حالت پاتر $Potts$ در دو بعد تعمیم دهید. پارامتر اختلال را مشخص کنید. جملات اول بسط اختلالی برای تابع پارش را بدست آورید.

■ مسئله چهارده: مدل ۳ حالت پاتر را روی یک شبکه یک بعدی با شرایط مرزی پرئودیک در نظر بگیرید. با استفاده از بسط دمای بالا تابع پارش این مدل را به صورت دقیق حساب کنید. آیا این مدل از خود گذار فاز نشان می دهد؟

■ مسئله پانزده: در مدل آیزینگ دو بعدی فرض کنید که دما پایین است یعنی $J \ll kT$. تابع پارش را تا مرتبه ۸ از پارامتر $\epsilon := e^{-\frac{J}{kT}}$

۱۱ ضمیمه: قضیه پرون-فروبنیوس

روش ماتریس انتقال بخصوص وقتی که توابع همبستگی را حساب می کنیم متکی است بر قضیه پرون-فروبنیوس^{۱۹}. این قضیه بیان می کند که هرگاه درایه های یک ماتریس T اکیدا مثبت باشند آنگاه بزرگترین مقدار ویژه این ماتریس یکتاست و واگنی ندارد.

نخست به این نکته توجه می کنیم که ردّ ماتریس T مثبت است بنابراین بزرگترین ویژه مقدار آن حتما مثبت است. برای بقیه اثبات نخست به قضیه نخست به قضیه رایلی^{۲۰} توجه می کنیم. بر مبنای این قضیه هرگاه یک ماتریس هرمیتی T داشته باشیم، و کمیت $\langle v|T|v \rangle$ در مجموعه بردارهای بهنجار $|v\rangle$ حساب کنیم، نقاط اکسترمم این تابع همان ویژه بردارهای T هستند. برای اثبات این تابع کافی است که با استفاده از ضرایب لاگرانژ وردش رتبه یک تابع

$$F(v) := \langle v|T|v \rangle - \lambda \langle v|v \rangle \quad (۱۳۳)$$

را مساوی با صفر قرار دهیم. این وردش منجر خواهد شد به:

$$\langle \delta v|(T - \lambda I)|v \rangle + \langle v|(T - \lambda I)|\delta v \rangle = 0. \quad (۱۳۴)$$

هرگاه به جای δv قرار دهیم $i\delta v$ به جای رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\langle \delta v|(T - \lambda I)|v \rangle - \langle v|(T - \lambda I)|\delta v \rangle = 0. \quad (۱۳۵)$$

که در نتیجه ترکیب دو رابطه به نتیجه مورد نظر خواهیم رسید یعنی $\langle v|T|v \rangle = \lambda \langle v|v \rangle$ که در ضمن بیان می کند ضریب لاگرانژ همان ویژه مقدار است. این خاصیت برای همه ویژه مقدارها برقرار است. اما برای بزرگترین ویژه مقدار یک خاصیت اضافه برقرار است به این معنا که نقطه مربوطه تنها

^{۱۹}Peron-Ferrobienius
^{۲۰}Rayleigh

اکسترم نیست بلکه ماکزیمم است. برای فهم آن هم کافی است که عبارت $F(v_0 + \delta v)$ را که در آن v_0 ویژه بردار مربوط به ویژه مقدار ماکزیمم یعنی λ_{max} است، تا رتبه دو بسط دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$F(v + \delta v) = \langle v + \delta v | T | v + \delta v \rangle - \lambda \langle v + \delta v | v + \delta v \rangle = F(v) + \langle \delta v | T - \lambda_{max} | \delta v \rangle. \quad (136)$$

از آنجا که λ_{max} بزرگترین ویژه مقدار است خواهیم داشت:

$$\langle \delta v | T - \lambda_{max} | \delta v \rangle = \langle \delta v | \sum_i (\lambda_i - \lambda_{max}) |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i| \delta v \rangle \leq 0. \quad (137)$$

که ادعای قضیه را ثابت می کند.

حال از این قضیه استفاده می کنیم و نشان می دهیم که هرگاه درایه های T اکیدا مثبت باشند یعنی $T_{ij} > 0$ آنگاه درایه های $|v_0\rangle$ نیز اکیدا مثبت هستند یعنی $(v_0)_i > 0$. برای نشان دادن این موضوع به این نکته توجه می کنیم که فضای بردارهای بهنجار متناظر با یک کره و بنابراین بدون مرز است. در نتیجه تابع $F(v)$ در نقطه v_0 نه تنها یک ماکزیمم نسبی دارد بلکه این ماکزیمم مطلق است. از برهان خلف استفاده می کنیم و فرض می کنیم که v_0 یک یا چند درایه منفی دارد. حال دقت می کنیم که عبارت $F(v_0)$ مجموع جملات مثبت و منفی است. اما با ضرب کردن این درایه های در عدد -1 بردار دیگری بدست می آوریم که هم بهنجار است و هم مقدار عبارت $F(v)$ را بزرگتر می کند که با ماکزیمم بودن $F(v_0)$ بدیل به مقدار بمقدار بزرگتری حاصل کند. منافات دارد. بنابراین v_0 نمی تواند دارای هیچ درایه ی منفی ای باشد. حال ثابت می کنیم که هیچ کدام از درایه های v_0 صفر نیز نمی توانند باشند زیرا اگر مثلا درایه اول آن برابر با صفر باشند به این معناست که عبارت زیر صفر شده است

$$\sum_{j=1}^d T_{1j} v_j = 0 \quad (138)$$

که با توجه به مثبت اکید بودن مقادیر T_{ij} و نامنفی بودن v_j ها غیرممکن است. پس ثابت کردیم که تمام درایه های v_0 اکیدا مثبت هستند. اما می دانیم که نمی توان دو بردار متعامد از این گونه داشت و از آنجا که ویژه بردارهای ماتریس هرمیتی همه بر هم عمودند نتیجه می گیریم که بزرگترین ویژه مقدار T واقعا غیر واگن است.