

امتحان نهایی مکانیک آماری پیشرفته

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف - بهمن ماه ۱۳۹۷ - مدرس: وحید کریمی پور

۲۸ دی ۱۳۹۷

نکات مهم: زمان امتحان چهارساعت است. لطفاً برگه های خود را تمیز و مرتب بنویسید و از خط خوردگی اجتناب کنید و روابط ریاضی خود را با استدلال های کلامی به هم پیوند دهید. خواننده وظیفه ای برای درک آنچه که شما نزد خود فکر می کرده اید ندارد بلکه این وظیفه شما به عنوان نویسنده است که منظور خود را خیلی روشن برای خواننده توضیح دهید. این نکته در مورد هر نوع نوشته ای در هر زمینه ای درست است.

■ مسئله اول: یک مدل آیزینگ روی یک شبکه نردبانی شکل با شرایط مرزی پریودیک و با هامیلتونی زیر در نظر بگیرید:

$$H = -J_1 \sum_i (\sigma_i \sigma_{i+1} + \sigma'_i \sigma'_{i+1}) - J_2 \sum_i \sigma_i \sigma'_i. \quad (1)$$

نشان دهید که تابع پارش این مدل عبارت است از:

$$\frac{1}{2N} \ln Q \approx \frac{1}{2} \ln [2 \cos K_2 \{ \cosh 2K_1 + \sqrt{1 + \sinh^2 2K_1 \tanh^2 K_2} \}] \quad (2)$$

که در آن

$$K_1 = \beta J_1 \quad K_2 = \beta J_2.$$

■ مسئله دوم: یک مدل آیزینگ یک بعدی با اسپین یک را با شرایط مرزی پریودیک در نظر بگیرید:

$$H = -J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \sigma_i = -1, 0, 1. \quad (3)$$

انرژی آزاد را برای این مدل حساب کنید.

■ مسئله سوم: مدل آیزینگ دوبعدی را با شرایط مرزی پریودیک و بدون میدان مغناطیسی در نظر بگیرید

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j. \quad (4)$$

از بسط دمای بالا استفاده کنید و تا رتبه دهم از پارامتر $\tau = \tanh \beta J$ تابع پارش را حساب کنید.

■ مسئله چهارم:

یک گاز در نظر بگیرید که پتانسیل بین اتم های آن به شکل زیر است:

$$U(r) = \begin{cases} \infty & , r < r_0 \\ -U_0 & , r_0 < r < r_1 \\ 0 & r_1 < r < \infty. \end{cases} \quad (5)$$

با استفاده از بسط خوشه ای، اولین تصحیح بر انرژی آزاد هلمهولتز را برای این گاز نسبت به گاز ایده آل بدست آورید و از آنجا کمیت

های زیر را حساب کنید:

الف - انرژی آزاد گیبس،

ب- انتروپی،

پ- ظرفیت گرمایی ویژه در حجم ثابت.

■ مسئله پنجم: نشان دهید که برای یک گاز فرمی ضریب تراکم پذیری هم دما κ_T و ضریب تراکم پذیری بی در رو κ_S از روابط زیر تعیین

می شوند:

$$\kappa_T = \frac{1}{nkT} \frac{f_{1/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \quad \kappa_S = \frac{3}{5nkT} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{5/2}(z)}. \quad (6)$$

نشان دهید که در دماهای پایین داریم:

$$\kappa_T \approx \frac{3}{2n\epsilon_F} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right] \quad \kappa_S \approx \frac{3}{2n\epsilon_F} \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (v)$$