گروه بازبهنجارش، بخش اول

وحید کریمی پور، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

۹ آذر ۱۳۹۲

۱ مقدمه

درزندگی روزمره اغلب از لفظ تقارن استفاده می‌کنیم. می‌گوییم که یک گل ، یک منظره،یک مجسمه و یا یک ساختمان متقارن است و دیگری نیست. یایکی تقارن بیشتری نسبت به دیگری دارد. درتوصیف دقیق طبیعت آنچنان‌که درفیزیک با آن روبرو هستیم تقارن نقش مهم تر و بنیادی تری ایفا می‌کند و اثر آن تنها یک اثر زیبایی شناسی نیست. درسطوح مختلف طبیعت به تقارن های متعدد و متفاوت برمی خوریم. فضای سه بعدی مطلق یعنی فضای خالی دارای تقارن انتقالی و دورانی است یا به عبارت بهتر قوانین طبیعت نسبت به انتقال و دوران درفضای سه بعدی یکسان هستند. این تقارن ها نتایج مهمی دارند. به عنوان مثال تقارن تحت انتقال منجر به قانون بقای اندازه حرکت خطی و تقارن تحت دوران منجر به قانون بقای اندازه حرکت زاویه ای می شود. تقارن های دیگر هم به نوبه خود منجر به قوانین بقای دیگری می شوند. این موضوع در مکانیک کوانتومی شکل مشهود تری به خود می‌گیرد. به عنوان ما می توانیم ویژه حالت های اتم هیدروژن را با چهار عدد کوانتومی $|n, l, m, s\rangle$ مشخص کنیم که سه عدد کوانتومی آخر در واقع اعدادی هستند که خصوصیت این حالت را تحت تبدیل های دوران مشخص می‌کنند. این وضعیت برای اتم های چند الکترونی و در واقع برای بسیاری از سیستم های کوانتومی دیگر هم برقرار است. در واقع تقارن دورانی به ما این امکان را داده است که مشخصاتی کلی از سیستم های فیزیکی را مستقل از نوع برهم‌کنش و جزئیات ساختاری آنها بدست آوریم.

مثال: تابع دو نقطه ای مربوط به یک سیستم دلخواه را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) := \langle \phi(\mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_2)\rangle, \qquad (۱)$$

که در آن ϕ پارامتر نظم سیستم است. محاسبه دقیق این تابع دو نقطه ای به صورت مستقیم خیلی دشوار است اما ما قبل از هر نوع محاسبه ای می

توانیم تنها با استفاده از تقارن محدودیت های بزرگی روی شکل این تابع اعمال کنیم. مثلا تقارن انتقالی شکل تابع را به صورت $G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ محدود می کند. هم چنین تقارن دورانی شکل این تابع را بازهم بیشتر و به صورت $G(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ محدود می کند. به این ترتیب می بینیم که وجود دو تقارن یعنی تقارن انتقالی و دورانی محدودیت های زیادی را روی این تابع اعمال کرده اند.

حال از خود سوال می کنیم که آیا یک سیستم بحرانی نیز دارای تقارن است؟ و اگر پاسخ مثبت است این تقارن چه نتایجی در بر دارد؟ مسلم است که در این سوال منظور ما تقارنی بیش از تقارن های موجود و شناخته شده برای تمام سیستم های فیزیکی بسته یعنی تقارن تحت انتقال و دوران است. منظور ما تقارن تحت تبدیلاتی است که ناظر به خصوصیت بس ذره ای بودن و بحرانی بودن سیستم است. می خواهیم ببینیم که آیا یک سیستم بحرانی در نقطه‌گذار فاز دارای یک تقارن مخصوص به خود است یا نه؟ و آیا در صورت وجود این تقارن مثل دیگر تقارن های موجود در فیزیک نتایج مشخصی در بر دارد؟ آیا ممکن است که در سیستم های بحرانی نیز بتوانیم بعضی خصلت های کلی را فقط با استفاده از تقارن بدست بیاوریم؟ آیا ممکن است که نماهای بحرانی نیز یک نوع اعداد و شاخص ها باشند که ناشی از تقارن هستند و به همین دلیل ربطی به جزئیات ساختاری سیستم ها ندارند؟

۲ تبدیلات بازبهنجارش در سیستم های اسپینی

وقتی صحبت از تقارن یک شی می کنیم اولین سوالی که باید به آن پاسخ دهیم این است که تبدیل مورد نظر ما چیست؟ سپس سوال دوم مطرح می شود که آیا این شی تحت تبدیل مورد نظر ما متقارن هست یا نیست؟ بنابراین تعریف دقیق یک تبدیل یک چیز است و متقارن بودن یک شی تحت آن تبدیل یک چیز دیگر. یک تبدیل تقارنی مثل دوران را همواره می توان تعریف کرد. آنگاه بعضی از اشیا هستند که تحت دوران متقارن هستند (مثل یک توپ) و بعضی اشیا هستند که چنین تقارنی ندارند، یا لااقل تحت همه اعمال تقارنی شکل خود را حفظ نمی کنند (مثل یک مکعب). یا بعضی چیزها هستند که تقریبا تحت آن تبدیل دورانی متقارن هستند (مثل یک توپ پخ شده). در این جا هم وقتی که با یک سیستم بس ذره ای سروکار داریم نخست می بایست تبدیل مورد نظر خود را به طور دقیق معرفی کنیم. این بخش به طورکامل به معرفی این تبدیل اختصاص دارد. نخست به معرفی مفهومی این تبدیل می پردازیم و سپس با بررسی مثال های متعدد با آن آشنا می شویم. نخستین مسئله ای که باید به آن توجه کنیم این است که سیستم مورد نظر ما در حد ترمودینامیک قرار دارد و بی نهایت بزرگ است و بی نهایت ذره دارد. مسئله دوم این است که این تبدیل در دو مرحله انجام می شود:

مرحله اول: انتگرال گیری یا جمع بستن روی افت و خیز های کوچک که آن را با $I := Integration$ نشان می دهیم . در این مرحله به طریقی که بعدا دقیق خواهد شد یک سیستم بدست می آید که میدان هایش یا هیئت های اسپینی اش دارای افت و خیزهای کوچک مقیاس نیستند. این مرحله در شکل های (۱) و (۲) تبدیل A به B را نشان می دهد.

مرحله دوم: بزرگ کردن مقیاس طول به قسمی که همه اشیا کوچکتر دیده شوند. وقتی که مقیاس طول مثلا متر را دو برابر می کنیم همه چیز از جمله طول واحد شبکه نیز کوچکتر دیده می شوند. بنابراین سیستمی که به نظر می رسید از نظر هندسی دیگر مثل سیستم قبلی نیست بار دیگر مثل سیستم قبلی می شود. این مرحله در شکل های (۱) و (۲) تبدیل B به C را نشان می دهد. این مرحله را با $R := Rescaling$ نشان می دهیم. دقت کنید که چون سیستم در حد ترمودینامیک است کل سیستم کوچک نمی شود و هم چنان دارای ابعاد بی نهایت و تعداد ذرات بی نهایت است. بنابراین تبدیل RG را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$RG := R \circ I. \tag{۲}$$

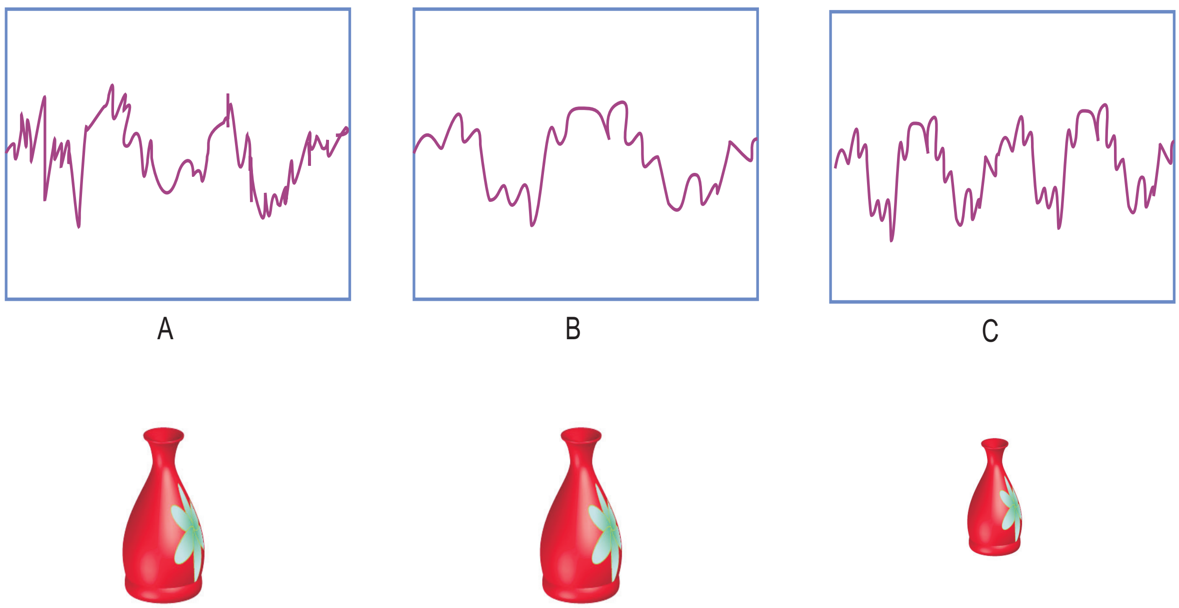
در اثر این دو مرحله پشت سرهم تنها اتفاقی که می افتد این است که ضرایب جفتیدگی سیستم تغییر می کند. نمونه هایی از این تغییرات را در مثال ها خواهیم دید.

۳ روش بازبهنجارش کادانف

روش بازبهنجارش کادانف ساده ترین نوع بازبهنجارش است که در آن فرض می شود که تحت عمل بازبهنجارش ثابت های جفتیدگی به طرز بسیار ساده ای تبدیل می شوند . برای وضوح بیشتر بلوک ها را مکعبی درنظر می گیریم و طول آنها را چنا ن انتخاب می کنیم که s برابر ثابت شبکه باشد. بنابراین درهربلوک تعداد s^d اتم جای خواهندگرفت. تعدادکل اتم ها برابراست با N. بنابراین تعدادکل بلوک ها برابرخواهد بود با Ns^{-d}. می توانیم به هربلوک مثل I یک متغیر اسپینی S_I نسبت دهیم که هم چنان مقدار ۱+ یا ۱− را اختیارکند:

$$S_I = \frac{\lambda(s)}{s^d} \sum_{i \in I} s_i \tag{۳}$$

که در آن $\lambda(s)$ یک ضریب است که بعدا آن را تعیین می کنیم. نخستین سوالی که پیش می آید این است که این ضریب چه ربطی به طول s دارد. برای تعیین این وابستگی دقت می کنیم که اگر دو بار پشت سرهم یک بار این بلوک بندی را انجام دهیم ، یک بار با مقیاس s و بار دوم با مقیاس



شکل ۱: اصول کلی و فلسفه بازبهنجارش: نخست روی افت و خیزهای کوچک انتگرال می‌گیریم و در مرحله بعد مقیاس اندازه‌گیری طول را بزرگ می‌کنیم. در اثر این تغییر مقیاس همه اشیا کوچک تر دیده می شوند هم‌گلدان و هم طول شبکه ..

s' ، مثل این است که بلوک بندی را یک بار با مقیاس ss' انجام داده باشیم. بنابراین تابع $\lambda(s)$ می بایست در رابطه زیر صدق کند:

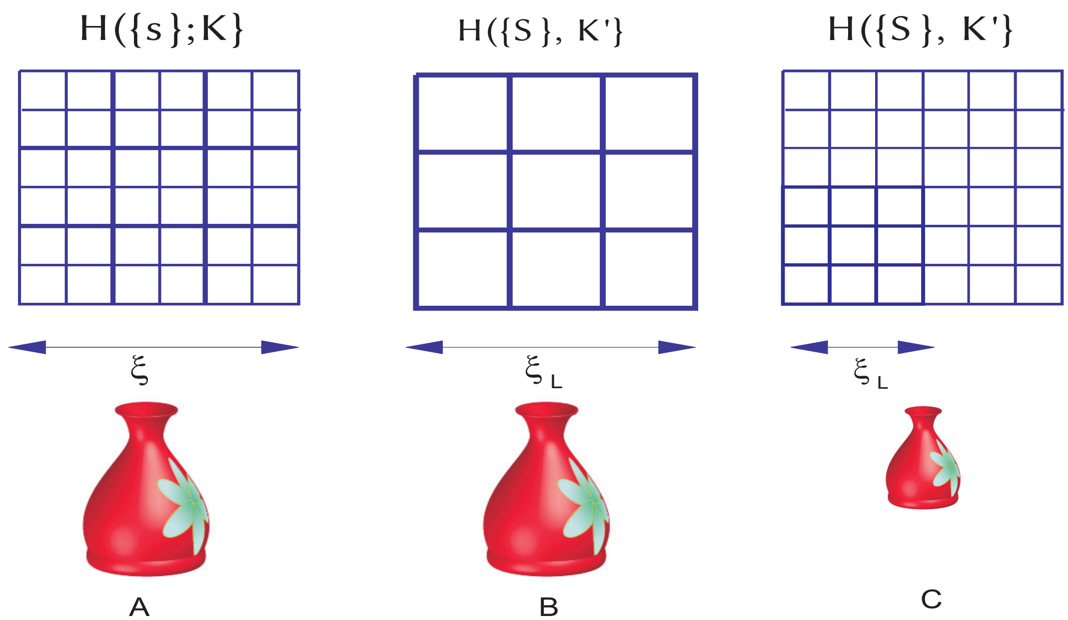
$$\lambda(s)\lambda(s') = \lambda(ss'), \qquad (۴)$$

که از آن نتیجه می شود که $\lambda(s)$ به فرم زیر است:

$$\lambda(s) = s^{\Delta}. \qquad (۵)$$

عددδ را بعد ناهنجار [1] مربوط به این پارامتر نظم می خوانند. با دانش فعلی خود نمی توانیم این بعد ناهنجار را پیدا کنیم و فعلا سعی می کنیم آن را دانسته شده فرض کنیم . خواهیم دید که بقیه نماهای بحرانی بر اساس این عدد بدست می آیند. پس بنابراین رابطه (۳) را می توان به

[1] Anamolous Dimension



شکل ۲: بازبهنجارش در یک سیستم اسپینی. در مرحله اول روی اسپین های درون یک بلوک جمع می زنیم و در مرحله دوم مقیاس طول را بزرگ می‌کنیم به نحوی که بلوک ها به اندازه قبلی کوچک شوند. سیستم در حد ترمودینامیک است و بی نهایت اسپین و بلوک دارد. .

صورت زیر نوشت:

$$S_I = \frac{s^\Delta}{s^d}\sum_{i\in I} S_i \tag{۶}$$

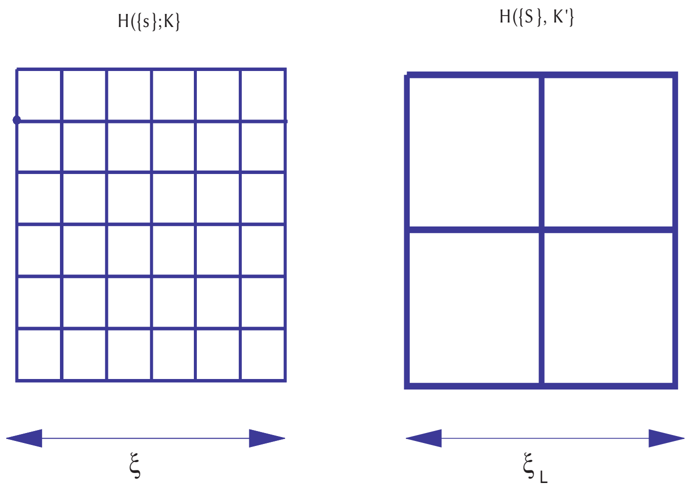
می توان نوشت. مرحله اساسی در روش کادانف پذیرش این فرض است که هامیلتونی دستگاه اسپینی در مقیاس جدید که آن را با H_s نشان می دهیم همان شکل هامیلتونی اصلی را دارد با این تفاوت که ضرایب جفت شدگی آن تغییر کرده است به این معنا که :

$$H_s = -J_s \sum_{I,J=1}^{Ns^{-d}} S_I S_J - B_s \sum_{I=1}^{Ns^{-d}} S_I \tag{۷}$$

که درآن J_s و B_s ثابت های جفتیدگی جدید هستند. هرگاه طول همبستگی را برحسب طول واحد شبکه بسنجیم درمی یابیم که طول همبستگی درسیستم جدید برابراست با :

$$\xi_s = \frac{\xi}{s} \tag{۸}$$

زیرا ثابت شبکه در سیستم جدید L برابر سیستم قدیمی است. معنای رابطه بالا آن است که سیستم جدید دارای طول همبستگی کمتری است.



شکل ۳: بلوک های اسپینی کادانف: برحسب ثابت شبکه طول همبستگی کوچکتر شده است. در نتیجه سیستم جدید از نقطه بحرانی دور تر است.

بنابراین نسبت به سیستم اسپینی اولیه این سیستم از نقطه بحرانی دورتر است . بنابراین می توان فرض کرد که دمای کاهش یافته آن رابطه زیر را با دمای کاهش یافته سیستم اولیه دارد:

$$t_s = s^x t \tag{۹}$$

که درآن $x > 0$ است. این رابطه درواقع جایگزین رابطه بین J_s و J شده است . می توان با یک استدلال ساده رابطه بین B_s و B را پیدا کرد. سهم برهم کنش اسپین هایا میدان مغناطیسی در انرژی به صورت زیر است :

$$B\sum_{i=1}^{N} S_i = B\sum_{I=1}^{Ns^{-d}}\sum_{i\in I} S_i = Bs^{d-\Delta}\sum_{I=1}^{Ns^{-d}} S_I = B_s\sum_{I=1}^{Ns^{-d}} S_I \tag{۱۰}$$

بنابراین با توجه به (؟؟) خواهیم داشت :

$$B_s = s^{d-\Delta} B. \tag{۱۱}$$

بنابراین آنچه که تاکنون انجام داده ایم این است که در اثر این تغییر مقیاس و با فرض یکسان ماندن شکل هامیلتونی تغییرات زیر حاصل می شوند که بهتر است همه را یک جا بنویسیم:

$$\xi_s = \frac{1}{s}\xi, \qquad t_s = s^x t, \qquad B_s = s^{d-\Delta} B, \qquad S_I = s^{\Delta-d}\sum_i S_i. \tag{۱۲}$$

نکته مهم این است که ما این تغییرات را (بجز این که $t' = s^x t$ است) را نسبتا از فرض های معقولی بدست آورده ایم.

۱.۳ بدست آوردن نمای ν

حال دقت می کنیم که از ترکیب دو رابطه اول در (۱۲) بدست می آوریم

$$\xi_s^x \; t_s = \xi^x \; t. \tag{۱۳}$$

حال استدلال می کنیم که اگر در نزدیک نقطه بحرانی باشیم که t کوچک و ξ بسیار بزرگ است آنگاه با تکرار رابطه فوق می توانیم بنویسیم

$$(\xi_{s^n})^x t_{s^n} = \xi^x \; t. \tag{۱۴}$$

پس از چند بار تکرار و رسیدن به رابطه بالا می توانیم بگوییم که دیگر نه t_{s^n} کمیت خیلی کوچکی است و نه ξ_{s^n} کمیت خیلی بزرگی بلکه هر دو این کمیت ها از مرتبه واحد شده اند. در نتیجه می توانیم طرف راست را بسنجیم و بنویسیم

$$\xi^x \; t \sim 1 \qquad \longrightarrow \qquad \xi \sim t^{\frac{-1}{x}} \tag{۱۵}$$

به این ترتیب یکی از نماهای بحرانی را بدست می آوریم یعنی این که

$$\nu = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}. \tag{۱۶}$$

۴ بدست آوردن نمای β

حال به سراغ مغناطش می رویم و مغناطش متوسط را قبل و بعد از تغییر مقیاس به هم ربط می دهیم. با توجه به رابطه (۳) بدست می اوریم:

$$M \equiv \langle S_I \rangle = s^{\Delta - d} \sum_{i\in I} \langle S_i \rangle = s^{\Delta} \langle S_i \rangle = s^{\Delta} M, \tag{۱۷}$$

و یا با قرار دادن پارامتر ها

$$M(t_s, B_s) = s^{\Delta} M(t, B) \tag{۱۸}$$

و با استفاده از (۱۲)

$$M(s^x t, s^{d-\Delta} B) = s^{\Delta} M(t, B). \tag{۱۹}$$

برای بدست آوردن نمای β می بایست B را مساوی با صفر قرار دهیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$M(s^x t, 0) = s^{\Delta} M(t, 0). \tag{۲۰}$$

این رابطه برای هر مقدار s برقرار است. می توانیمs را چنان انتخاب کنیم که $s^x t$ یا همان $s^{\frac{1}{\nu}} t$ یک مقدار ثابت مثلا 1 باشد. یعنی اینکه قرار می دهیم $s \sim t^{-\nu}$ بنابراین بدست می آوریم:

$$M(1, 0) \sim t^{-\nu\Delta} M(t, 0) \qquad \longrightarrow \qquad M(t, 0) \sim t^{\nu\Delta} \tag{۲۱}$$

و در نتیجه نمای بحرانی β برابر می شود با:

$$\beta = \nu\boldsymbol{\Delta}. \tag{۲۲}$$

۵ بدست آوردن نمای بحرانی δ

برای بدست آوردن این نما بازهم به سراغ معادله (۱۹) می رویم و این بارt را برابر با صفر قرار می دهیم که در نتیجه خواهیم داشت:

$$M(0, s^{d-\Delta} B) = s^{\Delta} M(0, B). \tag{۲۳}$$

بازهم این رابطه برای هر مقدار s برقرار است . این بار قرار می دهیم $s^{d-\Delta} B \sim 1$ یا $s \sim B^{\frac{1}{\Delta-d}}$ و در نتیجه

$$M(0, 1) \sim B^{\frac{\Delta}{\Delta-d}} M(0, B) \qquad \longrightarrow \qquad M(0, B) \sim B^{\frac{\Delta}{d-\Delta}}. \tag{۲۴}$$

به این ترتیب نمای بحرانی δ بدست می آید:

$$\delta = \frac{\mathbf{\Delta}}{\mathbf{d} - \mathbf{\Delta}}. \tag{۲۵}$$

۶ بدست آوردن نمای بحرانی γ

از رابطه (۱۹ نسبت به B مشتق می‌گیریم و بدست می آوریم:

$$s^{d-\Delta}\chi(s^x t, s^{d-\Delta}B) = s^{\Delta}\chi(t, B). \tag{۲۶}$$

حال B را برابر با صفر قرار داده و بازهم $s^x\ t$ یا همان $s^{\frac{1}{\nu}}\ t$ را برابر با یک قرار می دهیم. در نتیجه رابطه بالا تبدیل می شود به :

$$t^{\nu(\Delta-d)}\chi(1,0) \sim t^{-\nu\Delta}\chi(t,0) \qquad \longrightarrow \qquad \chi(t,0) \sim t^{\nu(2\Delta-d)} \tag{۲۷}$$

و از انجا

$$\gamma = \nu(\mathbf{2\Delta} - \ \mathbf{d}). \tag{۲۸}$$

۷ بدست آوردن نماهای بحرانی مربوط به تابع همبستگی

کاردیگر ی‌که می توانیم انجام دهیم آن است‌که نماهای بحرانی مربوط به طول همبستگی را برحسب ν و Δ بدست بیاوریم . برای این‌کار توجه می‌کنیم‌که همبستگی بین دوبلوک اسپینی را می توان به شکل زیر حساب‌کرد:

$$\langle S_I S_J \rangle = s^{2\Delta-2d}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\langle s_i s_j\rangle \tag{۲۹}$$

اما با توجه به اینکه اسپین های درون یک بلوک همبسته هستند و برای وقتی‌که فاصله بین دو بلوک بسیار بیشتر ازa s باشد می توان نوشت :

$$\langle S_I S_J \rangle = s^{2\Delta}\langle s_i s_j\rangle \tag{۳۰}$$

که درآن همبستگی اسپین های درون یک بلوک را با اسپین های درون بلوک دیگر یکی‌گرفته ایم. هرگاه فاصله دو بلوک اسپین برحسب واحد طول شبکه قبلی برابر با r باشد این فاصله برحسب واحد طول شبکه جدید برابر است با $r_s = \frac{r}{s}$. بنابراین می توان رابطه (30) به شکل زیر نوشت :

$$G(r_s, t_s, B_s) = s^{2\Delta} G(r, t, B) \quad (۳۱)$$

و یا

$$G(\frac{r}{s}, s^{\frac{1}{\nu}} t, s^{d-\Delta} B) = s^{2\Delta} G(r, t, B) \quad (۳۲)$$

دقت‌کنیدکه این رابطه برای هر مقدار s ای برقراراست.

هرگاه میدان مغناطیسی را برابر با صفر قرار دهیم و مقدار s را برابر با r اختیارکنیم بدست می آوریم

$$G(1, r^{\frac{1}{\nu}} t, 0) = r^{2\Delta} G(r, t, 0) \quad (۳۳)$$

و یا

$$G(r, t, 0) \sim r^{-2\Delta} f(rt^{\nu}) \sim \frac{f(\frac{r}{t^{-\nu}})}{r^{2\Delta}} \quad (۳۴)$$

مقایسه این عبارت با شکل تابعی همبستگی یعنی

$$G(r, t, 0) \sim \frac{e^{-\frac{r}{\xi}}}{r^{d-2+\eta}} \quad (۳۵)$$

یکبار دیگر نشان می دهدکه چرا $\xi \sim t^{-\nu}$ درست است و دیگراینکه نشان می دهدکه

$$\Delta = \frac{1}{2}(d - 2 + \eta) \quad (۳۶)$$

و یا

$$\eta = \mathbf{2\Delta - d + 2}. \quad (۳۷)$$

به این ترتیب توانستیم نماهای بحرانی را برحسب دو نمای اصلی یعنی x و Δ بدست آوریم. در روش کادانف ما راهی برای بدست آوردن این دو نما نداریم و تنها می توانیم پس از دانستن آنها نماهای دیگر را بدست آوریم. آیا راهی برای بدست آوردن این دو نما وجود دارد؟ آیا می توانیم بازهم با استفاده از بازبهنجارش ، احتمالا با روشی پیچیده تر، این نما ها را بدست آورد؟ این کاری است که سعی می کنیم در بخش های بعدی درس بازبهنجارش یاد بگیریم.