

اندازه گیری در مکانیک کوانتومی

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲۱ آذر ۱۴۰۳

۱ مقدمه

اصل موضوع اندازه گیری به آن شکلی که معمولاً در درس مکانیک کوانتومی بیان می شود به شکل زیر است:

به هر مشاهده پذیر مثل A یک عملگر هرمیتی مثل $\hat{A}$ وابسته است. اندازه گیری روی یک حالت دلخواه مثل $|\psi\rangle$ ، حتماً یکی از ویژه مقدارهای عملگر $\hat{A}$ مثل a را با احتمال $P(a) = |\langle a|\psi\rangle|^2$ به دست خواهد داد. سیستم کوانتومی بعد از اندازه گیری با همان احتمال به ویژه بردار مربوط به آن ویژه مقدار یعنی $|a\rangle$ تصویر خواهد شد.

در این درس نخست به طور دقیق تر به این نوع اندازه گیری نگاه می کنیم و سپس در ادامه با اندازه گیری های عمومی تر آشنا خواهیم شد.

کار یک دستگاه اشترن گرواخ این است که ذرات را به طور تصادفی و با احتمالاتی که قابل محاسبه و تست کردن است به دو حالت متمایز از هم جدا می کند. یک پولاروید که جلوی باریکه نور قرار می گیرد نیز همین کار را انجام می دهد و بعضی از فوتون ها را جذب و بعضی دیگر را از خود عبور می دهد. هم چنین است یک آینه نیم شفاف که بعضی از فوتون ها را از خود عبور می دهد و بعضی دیگر را منعکس می کند. بک

بلور کالسیت^۱ نیز که ضریب شکست آن بستگی به قطبش نور تابیده دارد، فوتون های تابیده شده به آن را بر اساس جهت قطبش عمودی V و یا افقی H آنها از هم جدا می کند، شکل 1. تمام این آزمایش ها خصلت های زیر را به طور مشترک دارا هستند که همگی محصول مستقیم تجربه هستند.

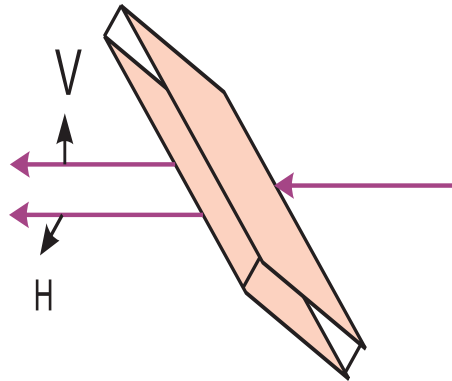
۱ - نتیجه این آزمایشها همواره تصادفی است و هرگز نمی توان رفتار دو ذره کاملاً یکسان را در این آزمایشها و یا اندازه گیری ها پیش بینی کرد. اما احتمالات تابع قوانین دقیق هستند.

۲ - نمی توان گفت که این آزمایشها یک خاصیت از قبل موجود ذره را «مشاهده» می کنند و می سنجند. تنهایی توان گفت که این آزمایشها یا «اندازه گیری» ها ذرات را به نحوی از هم جدا می کنند. ذراتی که بعد از آزمایش جدا می شوند دارای خصلت هایی هستند که ما بنابر یک مدل نظری به آنها نسبت می دهیم. به عنوان مثال ذراتی که از خروجی بالای یک آزمایش اشترن گراخ بیرون می آیند در حالت $|z+\rangle$ هستند و ذراتی که از شکاف پایینی بیرون می آیند در حالت $|z-\rangle$ هستند. به هیچ وجه نمی توان گفت که مولفه اسپین این ذرات از قبل دارای این مقادیر بوده است.

۳ - ذرات خارج شده از این دستگاه حالت های کاملاً متمایز دارند به این معنا که می توان براحتی تک تک آنها را با انجام آزمایشی از همان نوع از یکدیگر و به طور قطع تمیز داد.

توجه به این موضوع بسیار مهم است که در موارد سه گانه بالا هیچ اثری از عملگری که به یک مشاهده پذیر نسبت داده می شود وجود ندارد. درواقع این عملگر دراندازه گیری نقش کاملاً فرعی و ثانوی ایفا می کند و برای تعریف اندازه گیری توجه به آن ضرورت ندارد. در باره این موضوع و چگونگی وارد شدن عملگر مربوط به یک مشاهده پذیر در ادامه بحث خواهیم کرد. در این جا می خواهیم اصل موضوع اندازه گیری را دوباره و به شکلی تعریف کنیم که هم این ملاحظه در آن وارد شده باشد و هم جامعیت بیشتری داشته باشد.

¹ Calcite crystal



شکل ۱: یک بلور کالسیت که ضریب شکست آن بستگی به قطبش نور تابیده دارد، فوتون های تابیده شده به آن را بر اساس جهت قطبش افقی و عمودی آنها جدا می کند

۲ اندازه گیری تصویری

در ادامه بحث نیز از حالت ذره صحبت می کنیم اگرچه آگاه هستیم که ممکن است با یک سیستم چندذره ای سروکار داشته باشیم. اصطلاح ذره فقط برای راحتی به کار می رود. فرض کنید که ذره قبل از ورود به دستگاه در حالت $|\psi\rangle$ است. (بعداً این وضعیت را به حالت های آمیخته تعمیم می دهیم.)

۱.۲ اندازه گیری با تصویرگرهای رتبه یک

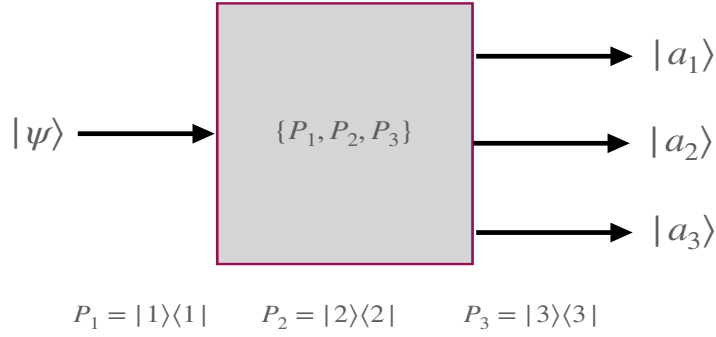
ای نوع اندازه گیری با یک مثال در شکل (۲) نشان داده شده است. در این جا دستگاه اندازه گیری دارای تعدادی خروجی متمایز است. این تعداد با بعد فضا برابر است. به عبارت بهتر در این نوع اندازه گیری واکنی وجود ندارد. این ذرات در حالت های

$$|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_N\rangle$$

قرار دارند. این ذرات بر اساس یک خاصیت که آن را A می نامیم از هم جدا شده اند. مشاهدات مکرر نشان می دهد که احتمال آنکه ذره در حالت $|a_i\rangle$ قرار گیرد برابر است با

$$P(a_i) = |\langle a_i | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | a_i \rangle \langle a_i | \psi \rangle = \langle \psi | P_i | \psi \rangle, \quad (1)$$

که در آن $P_i = |a_i\rangle\langle a_i|$ یک عملگر تصویرگر است. از آنجا که حالت های خروجی از هم متمایز هستند و مجموع احتمالات نیز برابر واحد



شکل ۲: شکل شماتیک برای اندازه گیری تصویری با تصویرگرهای رتبه یک. فرض کرده ایم که فضای هیلبرت سه بعدی است. در اینجا حالت خروجی به حالت ورودی بستگی ندارد. تنها احتمال ها هستند که به حالت ورودی بستگی دارند.

است نتیجه می گیریم که:

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i, \quad \sum_i P_i = I \quad (۲)$$

اگر توجه خود را به یکی از حالت های خروجی مثلا خروجی i ام معطوف کنیم حالت این ذرات عبارت است $|a_i\rangle$. این حالت ساده را می توان به شکل پیچیده تری نیز نوشت که اگر چه در نگاه اول ممکن است غیرلازم به نظر برسد ولی مفید بودن و ضروری بودن خود را بعدا نشان خواهد داد. می توان حالت فوق را به صورت زیر نوشت:

$$|a_i\rangle\langle a_i| = \frac{P_i|\psi\rangle\langle\psi|P_i}{\langle\psi|P_i|\psi\rangle}. \quad (۳)$$

دقت کنید که برای توصیف آنچه که تا کنون گفته ایم اصولا نیازی به استفاده از یک عملگر هرمیتی که متناظر با خاصیتی که اندازه گیری کرده ایم نداشته ایم. اندازه گیری چیزی نیست جز یک چیدمان آزمایشگاهی که ذرات را از هم تمیز می دهد. البته می توان پس از این جداسازی یک عملگر متناظر با این اندازه گیری نیز تعریف کرد. می توانیم با توجه به ملاحظات فیزیکی بگوییم که ذراتی که در خروجی i ام قرار دارند خاصیت a_i دارند و در نتیجه متوسط خاصیت اندازه گیری شده که آن را A می نامیم به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_i a_i P(a_i) = \sum_i a_i \langle\psi|a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle, \quad (۴)$$

که در آن عملگر $\hat{A}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{A} = \sum_i a_i |a_i\rangle \langle a_i|. \quad (5)$$

اگر ذراتی را که توسط دستگاه اندازه گیری جدا شده اند دوباره مخلوط کنیم حالت آنها چه خواهد بود؟ ممکن است که فکر کنید چرا می بایست ذراتی را که توسط یک دستگاه اندازه گیری از هم جدا شده اند دوباره مخلوط کنیم. پاسخ این است که در بسیاری اوقات پس از مدتی اگر ذرات تمیز داده شده را به صورت فیزیکی از هم جدا نکنیم ذرات در اثر پاشندگی معمولاً باهم مخلوط می شوند (مثل فوتون هایی که از بلور کالسیت خارج می شوند). در بسیاری دیگر از مواقع نیز آزمایش خود را به قصد معینی طوری ترتیب می دهیم که این اتفاق بیفتد. در چنین شرایطی حالت ذرات در خروجی دستگاه عبارت است از:

$$\rho' = \sum_i P(a_i) |a_i\rangle \langle a_i| = \sum_i \langle \psi | P_i | \psi \rangle \frac{P_i | \psi \rangle \langle \psi | P_i}{\langle \psi | P_i | \psi \rangle} = \sum_i P_i | \psi \rangle \langle \psi | P_i. \quad (6)$$

در بیشتر اوقات حالت ورودی به دستگاه اندازه گیری یک حالت خالص نیست بلکه یک حالت آمیخته به صورت

$$\rho = \sum_{\alpha} P_{\alpha} | \psi_{\alpha} \rangle \langle \psi_{\alpha} |, \quad (7)$$

است. در چنین شرایطی احتمالات نهایی ترکیبی از احتمالات کوانتومی ای که قبلاً در باره آنها صحبت کردیم و احتمالات کلاسیک ناشی از این آمیختگی است. در نتیجه احتمال اینکه نتیجه a_i بدست بیاید برابر است با:

$$P(a_i) = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \langle \psi_{\alpha} | P_i | \psi_{\alpha} \rangle = \sum_{\alpha} P_{\alpha} \text{tr}(P_i | \psi_{\alpha} \rangle \langle \psi_{\alpha} |) = \text{tr}(P_i \rho) = \text{tr}(P_i \rho P_i). \quad (8)$$

حالت خروجی i ام هم چنان عبارت است از $|a_i\rangle \langle a_i|$. این بار این حالت خروجی را می توان به صورت زیر نوشت:

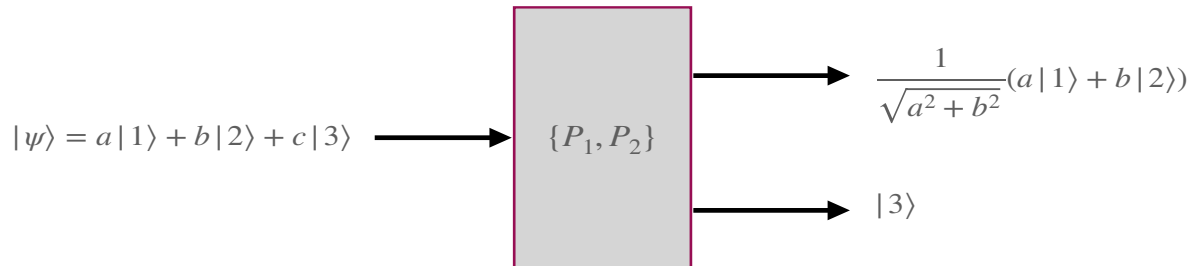
$$|a_i\rangle \langle a_i| = \frac{P_i \rho P_i}{\text{tr}(P_i \rho P_i)}, \quad (9)$$

و اگر حالت های تمیز داده شده را از هم جدا نکنیم حالت خروجی عبارت خواهد بود از:

$$\rho' = \sum_i P(a_i) |a_i\rangle \langle a_i| = \sum_i \text{tr}(P_i \rho P_i) \frac{P_i \rho P_i}{\text{tr}(P_i \rho P_i)} = \sum_i P_i \rho P_i. \quad (10)$$

۲.۲ اندازه گیری با تصویرگرهای با رتبه دلخواه

حال می پرسیم که عبارت طرف راست (۳) چه مزیتی بر عبارت طرف چپ دارد؟ مگر هر دوی این عبارات یک چیز را بیان نمی کنند؟ به چه دلیل می بایست برای توصیف حالت در یکی از خروجی های دستگاه اندازه گیری از عبارت طرف راست استفاده کنیم و نه از عبارت طرف چپ



$$P_1 = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| \quad P_3 = |3\rangle\langle 3|$$

شکل ۳: شکل شماتیک برای اندازه گیری تصویری با تصویرگرهایی که رتبه آنها دلخواه است. فرض کرده ایم که فضای هیلبرت سه بعدی است. در اینجا خود حالت خروجی نیز علاوه بر احتمالات به حالت ورودی بستگی دارند.

که خیلی ساده تر است؟ پاسخ این است که این دو عبارت فقط در حالت ساده ای که حالت های خروجی دستگاه دارای واگنی نباشند باهم مساوی هستند. (منظور از واگنی این است که حداقل یک آزمایش دیگر وجود دارد که خروجی i ام دستگاه را بازم به دو یا چند خروجی دیگر می شکافد. تحت این شرایط خروجی های دستگاه دوم را با $|a_i, b_g\rangle, \dots, |a_i, b_2\rangle, |a_i, b_1\rangle$ نشان می دهیم.)

تحت چنین شرایطی خروجی i ام دستگاه اندازه گیری هیچ گونه بستگی به حالت اولیه ندارد و تنها می توان آن را به صورت $|a_i\rangle\langle a_i|$ که به وضوح از حالت اولیه مستقل است بیان کرد. اما در بقیه موارد و در واقع شاید در بسیاری از موارد دستگاه های اندازه گیری ما آنقدر ظریف نیستند یا به شکلی طراحی نشده اند که این تمیز کامل را انجام دهند. شکل (۳) این نوع اندازه گیری را به صورت شماتیک نشان می دهد. بیایید به یک مثال توجه کنیم. فرض کنید که دو ذره اسپین 1/2 داریم که در حالت زیر قرار دارند:

$$|\psi\rangle = a|0,0\rangle + b|0,1\rangle + c|1,0\rangle + d|1,1\rangle, \quad (11)$$

که در آن $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به ترتیب نشان دهنده اسپین بالا و پایین هستند. دستگاه اندازه گیری ما طوری است که فقط تعیین می کند که آیا اسپین ها با هم موازی هستند یا پادموازی. در این صورت این اندازه گیری با دو عملگر تصویر گر زیر توصیف می شود:

$$P_0 = |0,0\rangle\langle 0,0| + |1,1\rangle\langle 1,1|, \quad P_1 = |0,1\rangle\langle 0,1| + |1,0\rangle\langle 1,0|. \quad (12)$$

احتمال بدست آوردن نتیجه های موازی و پادموازی به ترتیب برابرند با:

$$P(0) = \langle \psi | P_0 | \psi \rangle = |a|^2 + |d|^2, \quad P(1) = \langle \psi | P_1 | \psi \rangle = |b|^2 + |c|^2, \quad (13)$$

حالت های بعد از اندازه گیری نیز به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{P_0 |\psi\rangle \langle \psi| P_0}{\langle \langle \psi | P_0 | \psi \rangle} = |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0|, \\ \rho_1 &= \frac{P_1 |\psi\rangle \langle \psi| P_1}{\langle \langle \psi | P_1 | \psi \rangle} = |\Psi_1\rangle \langle \Psi_1|, \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن

$$|\Psi_0\rangle = \frac{a|0,0\rangle + d|1,1\rangle}{\sqrt{|a|^2 + |d|^2}}, \quad |\Psi_1\rangle = \frac{b|0,1\rangle + c|1,1\rangle}{\sqrt{|b|^2 + |c|^2}}. \quad (15)$$

به این ترتیب می بینیم که در اینجا با شرایطی روبرو هستیم که صورت بندی جامع تری که برای اندازه گیری معرفی کرده ایم بخوبی توصیف کننده آزمایش هست و حال آنکه صورت بندی مقدماتی ای که در درس های مقدماتی مکانیک کوانتومی دیده ایم پاسخگوی آن نیست.

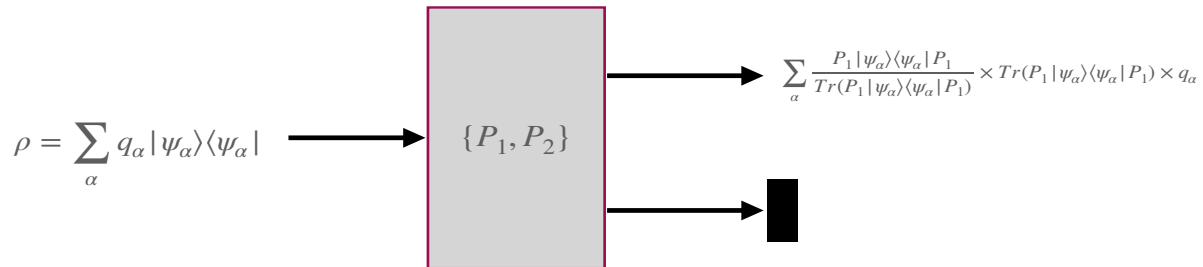
۳.۲ وقتی که حالت ورودی دیگر خالص نیست.

تا کنون حالت ورودی را یک حالت خالص گرفتیم. اما اغلب اوقات حالت ورودی یک حالت خالص نیست. در این صورت با استفاده از آنچه که در مورد حالت های خالص یاد گرفتیم می توانیم نتایج اندازه گیری را به طور کامل بفهمیم. شکل (۳). حالت ورودی ρ حتما یک تجزیه آماری به صورت

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}|$$

دارد. در این صورت مطابق شکل، حالت های خروجی و احتمالات از ترکیب احتمالات کوانتومی ای که قبلا بدست آوردیم و احتمالات کلاسیک q_{α} بدست می آید. فرض کنید که خروجی شماره دو را بسته ایم. در این صورت می پرسیم که ذراتی که از خروجی شماره یک خارج می شوند در چه حالتی هستند. این ذرات با احتمال q_{α} ناشی از ورود ذرات $|\psi_{\alpha}\rangle$ به دستگاه اندازه گیری هستند. از این نوع ذرات درصد $\langle \psi_{\alpha} | P_1 | \psi_{\alpha} \rangle$ از خروجی شماره یک خارج می شوند و حالت آنها نیز عبارت است از:

$$\frac{P_1 |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}| P_1}{Tr(P_1 |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}| P_1)}.$$



$$P_1 = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| \quad P_3 = |3\rangle\langle 3|$$

شکل ۴: فرض کنید که خروجی شماره دو را بسته ایم. در این صورت می پرسیم که ذراتی که از خروجی شماره یک خارج می شوند در چه حالتی هستند. این ذرات با احتمال q_{α} ناشی از ورود ذرات $|\psi_{\alpha}\rangle$ به دستگاه اندازه گیری هستند. از این نوع ذرات درصد $\langle\psi_{\alpha}|P_1|\psi_{\alpha}\rangle$ از خروجی شماره یک خارج می شوند.

بنابراین ذراتی که از خروجی شماره یک خارج می شوند در حالت

$$\rho = \sum_{\alpha} \frac{P_1 |\psi_{\alpha}\rangle\langle\psi_{\alpha}| P_1}{Tr(P_1 |\psi_{\alpha}\rangle\langle\psi_{\alpha}| P_1)} \times Tr(P_1 |\psi_{\alpha}\rangle\langle\psi_{\alpha}| P_1) \times q_{\alpha} = P_1 \rho P_1$$

هستند. هم چنین می توانیم بپرسیم که شمارشگر شماره یک با چه احتمالی کلیک می کند. این احتمال برابر است با:

$$P(1) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \langle\psi_{\alpha}|P_1|\psi_{\alpha}\rangle = Tr(P_1 \sum_{\alpha} q_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle\langle\psi_{\alpha}|) = Tr(P_1 \rho) = Tr(P_1 \rho P_1) \quad (16)$$

که در آخرین تساوی از خاصیت تصویرگرها یعنی $P_1^2 = P_1$ استفاده کرده ایم. برای راحتی مراجعه یک بار دیگر اندازه گیری متعامد را در زیر بیان می کنیم:

اندازه گیری متعامد: یک اندازه گیری متعامد با یک مجموعه از عملگرهای تصویری $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ مشخص می شود که در شرایط

$$P_i P_j = \delta_{ij}, \quad \sum_i P_i = I$$

صدق می کنند. هر عملگر تصویری متناظر با یکی از خروجی های متمایز چیدمان آزمایشگاهی است. وقتی که روی ذراتی که در حالت کوانتومی ρ قرار دارند این اندازه گیری را انجام می دهیم نتیجه i ام با احتمال زیر بدست می آید:

$$P(i) = \text{tr}(P_i \rho P_i)$$

و حالت ذره ای که از خروجی i ام خارجی می شود عبارت است از:

$$\rho_i := \frac{P_i \rho P_i}{\text{tr}(P_i \rho P_i)}.$$

در صورتی که ذرات را از هم جدا نکنیم کار این چیدمان آزمایشگاهی این است که حالت ρ را به حالت ρ' مطابق با زیر تبدیل می کند:

$$\rho \longrightarrow \rho' = \sum_i P_i \rho P_i.$$

■ تمرین: اگر روی دو ذره ای که در حالت (۱۱) هستند اسپین کل دو ذره را اندازه گیری کنیم چه مقادیری و با چه احتمالاتی بدست می آید؟

■ تمرین: سه ذره در حالت زیر هستند:

$$|\psi\rangle = a|0, 0, 0\rangle + b|0, 0, 1\rangle + c|0, 1, 0\rangle + d|0, 1, 1\rangle + e|1, 0, 0\rangle + f|1, 0, 1\rangle + g|1, 1, 0\rangle + h|1, 1, 1\rangle. \quad (17)$$

یک اندازه گیری انجام می دهیم تا مشخص کنیم اکثریت اسپین ها رو به بالا هستند یا پایین. احتمالات مربوطه و هم چنین حالت های بعد از اندازه گیری را تحت شرایط زیر تعیین کنید:

الف: وقتی که حالت های بعد از اندازه گیری را از هم جدا می کنیم.

ب: وقتی که حالت های بعد از اندازه گیری را از هم جدا نمی کنیم.

■ تمرین: دو ذره را که در حالت (۱۱) هستند در نظر بگیرید. روی آنها اندازه گیری در پایه بل انجام می دهیم. احتمالات مربوطه را محاسبه کنید. اگر حالت های بدست آمده را از هم جدا نکنیم حالت بعد از اندازه گیری را مشخص کنید.

■ تمرین: چهار کیوبیت در حالت زیر هستند:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle)_{A,B} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle)_{C,D}. \quad (18)$$

ذرات A و B از هم دور هستند. همینطور ذرات C و D نیز از هم دور هستند ولی ذرات B و C به هم نزدیک و در یک آزمایشگاه هستند. روی این دو ذره اندازه گیری در پایه بل انجام می دهیم. حالت ذرات A, D را بعد از اندازه گیری پیدا کنید. از این روش می توان برای درهم تنیده کردن ذرات دور از هم استفاده کرد. این روش را تعویض درهم تنیدگی^۲ می گویند.

۳ اندازه گیری های نامتعامل

آنچه که در بالا گفتیم مربوط به اندازه گیری های متعامل یا تصویری^۳ است. ولی این نوع اندازه گیری کلی ترین اندازه گیری قابل انجام در آزمایشگاه نیست. در واقع نوع کلی تری از اندازه گیری به نام اندازه گیری نامتعامل^۴ وجود دارد که در واقع از نظر تجربی خیلی رایج تر از اندازه گیری های تصویری است. فرق این نوع اندازه گیری ها با اندازه گیری های متعامل از نظر فیزیکی این است که ذراتی که در اندازه گیری از هم جدا می شوند به طور مطلق و صد در صد از هم قابل تمیز نیستند. این خاصیت از نظر ریاضی خود را به این شکل نشان می دهد که عملگرهای

^۳Entanglement Swapping
^۴Projective Measurements
^۵Non-Orthogonal Measurement

مربوط به این نوع اندازه گیری عملگرهای مصور نیستند. البته می توان نشان داد، چنانکه در همین فصل به تفصیل نشان خواهیم داد، که نهایتاً این نوع اندازه گیری ها از یک نوع اندازه گیری تصویری پدید می آیند. چگونگی این پدید آمدن را به بعد موكول می كنیم. نخست این نوع اندازه گیری را به دقت تعریف می كنیم:

یک اندازه گیری نامتعامل با مجموعه ای از عملگرهای $\{M_m, m = 1 \dots K\}$ مشخص می شود که در شرط

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I$$

صدق می کنند. این عملگرها الزاماً عملگرهای مصور نیستند یعنی

$$M_i M_j \neq \delta_{ij} M_i.$$

اندازه گیری روی حالت ρ با احتمال $P(m) = \text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)$ نتیجه m را بدست می دهد. حالت هایی که نتیجه m را دارند عبارتند از

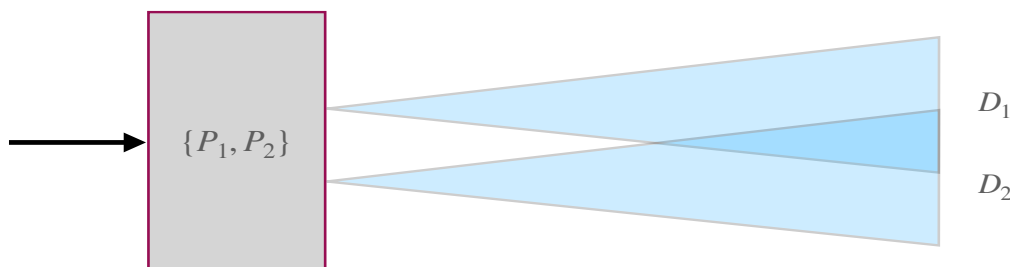
$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)}$$

. توجه به این نکته مهم است که تعداد عملگرهای M_m می تواند از بعد فضا بیشتر باشد. هرگاه حالت های خروجی را از هم جدا نکنیم، حالت خروجی با یک آنزامل مخلوط از حالت ها یعنی با آنزامل زیر داده می شود:

$$\rho' = \sum_m P(m) \rho_m = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger.$$

اندازه گیری های نامتعامل به چند طریق پدیدار می شوند که البته همه به هم شبیه بوده و ریشه مشترک دارند. نخست وقتی که یک اندازه گیری ایده آل با یک تحول یکانی اغلب ناخواسته بعد از اندازه گیری همراه می شود که باعث می شود تابع موج ذرات جدا شده از هم همپوشانی پیدا کرده و دیگر از هم کاملاً تمیز ناپذیر نباشند، شکل (۶). هم چنین ممکن است که حالت های خروجی پس از یک اندازه گیری تصویری ایده آل دچار پاشندگی شوند و با یک دیگر همپوشانی پیدا کنند که در این صورت ذراتی که به آشکارگر ها می رسند چندان از هم قابل تمیز نیستند زیرا معلوم نیست از کدام خروجی اندازه گیری متعامل به آشکارگر رسیده اند، (شکل (۵)).

هم چنین این نوع اندازه گیری وقتی پدید می آید که سیستمی را که روی آن اندازه گیری می کنیم به عنوان بخشی از یک سیستم بزرگ تر با

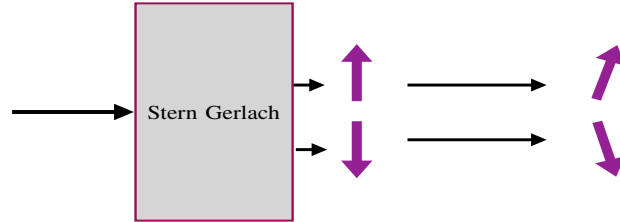


شکل ۵: یک اندازه گیری متعامد که ذرات خارج شده از خروجی های آن پخش شده و تابع موج آنها با هم همپوشانی پیدا کرده.

فضای هیلبرت بزرگ تر در نظر گرفته و در فضای بزرگ اندازه گیری متعامد انجام می دهیم. طبیعی است که دستگاه بردارهای متعامد در فضای بزرگ از دیدگاه یک زیر فضا دیگر متعامد نخواهد بود، شکل (۷). در زیر نخست این مطالب را شرح می دهیم و سپس مثال های متعددی را بررسی می کنیم.

۱.۳ وقتی که حالت های بعد از اندازه گیری تغییر می کنند.

ممکن است که در یک اندازه گیری ذرات را از هم جدا کنیم ولی ذرات جدا شده کاملاً از هم قابل تمیز نباشند. درواقع اندازه گیری تصویری یک ایده آل سازی است که در آن فرض می کنیم ذراتی که در اثر آزمایش جدا شده اند (مثلاً ذرات اسپین 1/2 در آزمایش اشترن گرایخ) تحت تاثیر گرادیان مغناطیسی در دو جهت مختلف نیرو احساس می کنند و جدا می شوند ولی تحت تاثیر خود میدان مغناطیسی نیز قرار گرفته و اسپین آنها حول میدان متوسط می چرخد، بنابراین وقتی که ذرات به آشکارسازهای ما می رسند دیگر در حالت های ایده آل $|z, +\rangle$ و $|z, -\rangle$ نیستند، بلکه این حالت ها به حالت های $U_+|z, +\rangle$ و $U_-|z, -\rangle$ تبدیل شده اند که در آن U_+ و U_- نشان دهنده اثر میدان مغناطیسی موضعی بر حرکت وضعی اسپین ها در فاصله ای است که این ذرات به آشکارسازها رسیده اند. از آنجا که میدان موضعی برای باریکه های جدا شده می تواند متفاوت باشد عملگریکانی ای که به کار برده ایم نیز متفاوت است. بنابراین حالت های رسیده به آشکارسازها دیگر متعامد نیستند. به این دلیل عملگرهایی که حالت های پس از اندازه گیری را مشخص می کنند دیگر دو عملگر تصویری P_+ و P_- نیستند، بلکه این عملگرها عبارتند از $M_+ := U_+P_+$ و $M_- := U_-P_-$.



شکل ۶: ذرات اسپین ۱/۲ از یک آزمایش اشترن گِراخ ایده آل بیرون آمده اند. تذرآت اسپین ۱/۲ بعد از بیرون آمدن از آزمایش اشترن گِراخ ایده آل تا به آشکارسازهای ما برسند کمی چرخیده اند. احتمالات دست نخورده باقی می مانند ولی حالت ها دیگر بر هم عمود نیستند.

به طور کلی تر وقتی که یک اندازه گیری تصویری و ایده آل را با یک تحول زمانی خواسته یا ناخواسته دنبال کنیم، خواهیم داشت

$$M_m = U_m P_m \quad (۱۹)$$

که در آن U_m ها عملگرهای یکانی هستند. در این شرایط با توجه به تعریف اندازه گیری متعامد خواهیم داشت:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \sum_m P_m U_m^\dagger U_m P_m = \sum_m P_m = I, \quad (۲۰)$$

و

$$P(m) = \text{tr}(P_m \rho P_m) = \text{tr}(U_m^\dagger M_m \rho M_m^\dagger U_m) = \text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger). \quad (۲۱)$$

هم چنین حالت بعد از اندازه گیری عبارت است از:

$$\rho_m = U_m \frac{P_m \rho P_m}{\text{tr}(P_m \rho P_m)} U_m^\dagger = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)}. \quad (۲۲)$$

۲.۳ وقتی که روی یک فضای بزرگ تر اندازه گیری متعامد انجام می دهیم.

ممکن است ایده اندازه گیری در یک فضای بزرگ تر و مترادف با آن انجام یک اندازه گیری روی یک سیستم d بعدی که تعداد خروجی های اندازه گیری بیش از d باشد در نگاه اول کمی عجیب به نظر برسد. در این بخش مثال هایی از این نوع اندازه گیری را معرفی می کنیم.

subsubsection مثال اول: اندازه گیری اسپین کل برای دو ذره

۱.۲.۳ مثال ۱

فرض کنید که یک ذره اسپین $1/2$ در حالت $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ است که در آن $|+\rangle$ و $|-\rangle$ ویژه حالت های عملگر S_z هستند. ممکن است که بدلایلی اندازه گیری اسپین این ذره در راستای z برای ما امکان پذیر نباشد ولی بتوانیم اسپین کل یک سیستم دو ذره ای را مشخص کنیم. برای سادگی فرض می کنیم که ذره دوم در حالت $|+\rangle$ قرار داشته باشد. در این صورت سیستم مرکب در حالت

$$|\Psi\rangle = a|+, +\rangle + b|-, +\rangle \quad (۲۳)$$

قرار دارد. برای اندازه گیری اسپین کل یعنی S^2 این دو ذره حالت فوق را به صورت زیر بسط می دهیم :

$$|\Psi\rangle = \alpha|1, 1\rangle + b\frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle - |0, 0\rangle). \quad (۲۴)$$

در این جا از نمادهای $|l, m\rangle$ مربوط به تکانه زاویه ای استفاده کرده ایم. از آنجا که اندازه گیری اسپین کل انجام می شود، این سیستم دو ذره ای با احتمالات زیر به حالت های نوشته شده تصویر می شود:

$$\begin{aligned} P(1) &= a^2 + \frac{b^2}{2} & \longrightarrow & \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2}}} (a|1, 1\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle) \\ P(0) &= \frac{b^2}{2} & \longrightarrow & |0, 0\rangle. \end{aligned} \quad (۲۵)$$

یا با بازنویسی حالت ها

$$\begin{aligned} P(1) &= a^2 + \frac{b^2}{2} & \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2}}} & \left(a|++\rangle + \frac{b}{2}(|+-\rangle + |-+\rangle) \right) \\ P(0) &= \frac{b^2}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & (|+-\rangle - |-+\rangle) \end{aligned} \quad (۲۶)$$

برای آنکه حالت های بعد از اندازه گیری را برای ذره اول تشخیص دهیم می بایست ماتریس چگالی آن را محاسبه کنیم. بدست می آوریم

$$\begin{aligned} P(1) &= a^2 + \frac{b^2}{2} & \rho_1 &= \frac{1}{a^2 + \frac{b^2}{2}} \begin{pmatrix} a^2 + \frac{b^2}{4} & \frac{ab}{2} \\ \frac{ab}{2} & \frac{b^2}{4} \end{pmatrix} \\ P(0) &= \frac{b^2}{2} & \rho_0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (۲۷)$$

و حالت های ρ_0 و ρ_1 برهم عمود نیستند و حال آنکه اندازه گیری اسپین کل یک اندازه گیری تصویری و متعامد است.

۲.۲.۳ مثال ۲

یکی از راه های مرسوم اندازه گیری آن است که حالت سیستم مورد نظر یعنی A را با یک حالت مرجع از سیستم دیگر مثل B جفت کرده و بعد از یک عمل یکانی روی کل سیستم AB ، در پایه های B اندازه گیری انجام می دهیم. اگر حالت اولیه سیستم A را با $|\phi\rangle$ ، حالت مرجع سیستم B را با $|0\rangle$ و بردارهای پایه سیستم B را با $\{|\mu\rangle\}_{m=1}^K$ نمایش دهیم، آنگاه عمل یکانی U روی سیستم AB حالت $|0\rangle_B \otimes |\phi\rangle_A$ چنین خواهد بود:

$$U : |\phi\rangle_A \otimes |0\rangle_B \longrightarrow \sum_{m=1}^K |\phi_m\rangle_A \otimes |m\rangle. \quad (28)$$

لازمه ی خطی بودن این عملگر نسبت به $|\phi\rangle$ آن است که بردارهای $|\phi_m\rangle$ به صورت $M_m|\phi\rangle$ باشند که در آن ها M_m ها عملگرهایی در فضای A هستند، بنابراین

$$|\phi\rangle_A \otimes |0\rangle_B \longrightarrow \sum_{m=1}^K M_m|\phi\rangle_A \otimes |m\rangle. \quad (29)$$

(یک راه دیگر فهمیدن این نکته این است که عملگر یکانی U را به صورت $U = \sum_m M_m \otimes N_m$ بسط دهیم که در آن $N_m|0\rangle = |m\rangle$ و $M_m|\phi\rangle = |\phi_m\rangle$ هستند.) حال اندازه گیری تصویری سیستم B در پایه ی $\{|m\rangle\}$ باعث می شود که سیستم A در یکی از حالت های نامتعامل $M_m|\phi\rangle$ قرار گیرد. این کار با احتمال $P(m) = \langle\phi|M_m^\dagger M_m|\phi\rangle$ صورت می گیرد. در این جا چند نکته ی جالب توجه وجود دارد. اول اینکه تعداد حالت های K می تواند بیشتر از بعد فضای هیلبرت باشد. مثلاً می توانیم به این ترتیب یک ذره اسپین $1/2$ را روی بیش از دو حالت نامتعامل تصویر کنیم. دوم اینکه احتمالات را می توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$P(m) = \langle\phi|M_m^\dagger M_m|\phi\rangle = \text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger) = \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho) \quad (30)$$

واضح است که حالت ذره را نیز پس از بدست آوردن نتیجه ی m می توان به صورت $\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)}$ نمایش داد. ضمناً شرط یکانی بودن عملگر U الزام می کند که به ازای هر حالت اولیه ی $|\phi\rangle$ داشته باشیم

$$\langle\phi| \otimes \langle 0| U^\dagger U |\phi\rangle \otimes |0\rangle = \langle\phi|\phi\rangle, \quad (31)$$

که پس از جایگزاری و ساده کردن طرف راست منجر به شرط زیر می شود:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I_A. \quad (32)$$

■ **تمرین حل شده:** آلیس و باب هر کدام یک ذره در اختیار دارند و حالت دو ذره به صورت زیر است:

$$|\phi\rangle_{AB} = \sqrt{1-p}|0,0\rangle + \sqrt{p}|1,1\rangle \quad \frac{1}{2} \leq p \leq 1. \quad (33)$$

آنها می خواهند این حالت را به یک حالت درهم تنیده ماکزیمال تبدیل کنند. برای این کار آلیس یک کیوبیت کمکی در حالت صفر در کنار کیوبیت خودش قرار می دهد. اکنون حالت کل ذرات به این شکل است:

$$|\phi\rangle_{A'AB} = \sqrt{1-p}|0,0,0\rangle + \sqrt{p}|0,1,1\rangle. \quad (34)$$

حال آلیس روی کیوبیت هایی که در اختیار خودش است یعنی A و A' یک عملگر U مناسب اعمال می کند. سپس در پایه محاسباتی روی کیوبیت A' یک اندازه گیری انجام می دهد. این اندازه گیری باعث می شود که با یک احتمال معین حالت کیوبیت های A, B به صورت یک حالت درهم تنیده ماکزیمال یعنی یک حالت بل در بیاید. عملگر مناسب U را پیدا کنید. و بیشترین احتمال تولید حالت بل را بدست آورید.

حل: آلیس عملگر یکانی زیر را روی کیوبیت های اول و دوم که در اختیار اوست انجام می دهد:

$$U|00\rangle = |00\rangle, \quad U|01\rangle = \alpha|01\rangle + \beta|11\rangle. \quad (35)$$

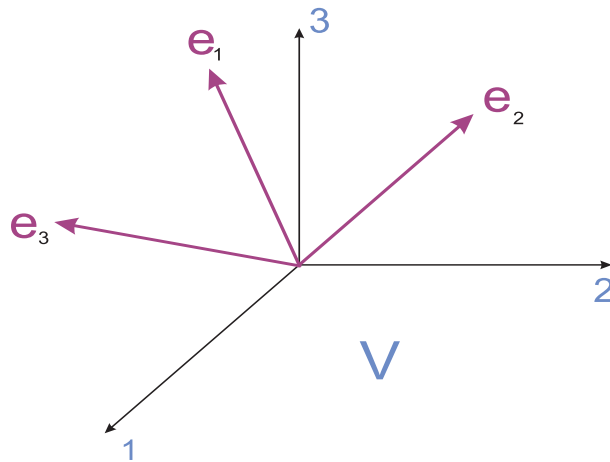
مسلماً وقتی که $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ باشد، این عملگر یکانی است. نیازی هم نیست که اثر این عملگر را روی بقیه حالت های دو کیوبیت اول تعریف کنیم. در نتیجه این عملگر حالت به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} |\phi\rangle_{A'AB} \longrightarrow \Phi\rangle_{A'AB} &= \sqrt{1-p}|000\rangle + \sqrt{p}(\alpha|011\rangle + \beta|111\rangle) \\ &= |0\rangle(\sqrt{1-p}|00\rangle + \alpha\sqrt{p}|11\rangle) + \beta\sqrt{p}|1\rangle|11\rangle. \end{aligned} \quad (36)$$

این رابطه نشان می دهد که اگر آلیس کیوبیت اول را اندازه گیری کند، با احتمال $p\beta^2$ حالت $|1\rangle$ را بدست می آورد که در این صورت کیوبیت های دوم و سوم به حالت ضربی $|11\rangle$ رمبش می کنند که هیچ درهم تنیدگی ندارند. اما با احتمال $1-p+\alpha^2p$ نیز حالت $|0\rangle$ را بدست می آورد که در این صورت کیوبیت های دوم و سوم به حالت درهم تنیده ی $\sqrt{\frac{1-p}{1-p+\alpha^2p}}|00\rangle + \alpha\sqrt{\frac{p}{1-p+\alpha^2p}}|11\rangle$ رمبش می کنند. برای اینکه این حالت یک حالت درهم تنیده ماکزیمال باشد باید داشته باشیم:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1-p}{p}}. \quad (37)$$

این حالت با احتمال $2(1-p)$ حاصل می شود. هرگاه $p=1$ باشد، این احتمال برابر با صفر است. یعنی به هیچ ترتیبی نمی توان با این روشها از یک حالت ضربی یک حالت درهم تنیده درست کرد.



شکل ۷: اندازه گیری تصویری در امتداد بردارهای فضای بزرگ از دید ناظری که در یک زیر فضا قرار دارد یک اندازه گیری نامتعامد است .

۳.۲.۳ مثال ۳

آنچه که در مثال قبلی گفتیم نمونه ای است از یک قضیه کلی تر موسوم به قضیه نویمارک^۵ که بر مبنای آن هر اندازه گیری نامتعامد را می توان ناشی از یک اندازه گیری متعامد در یک فضای بزرگ تر در نظر گرفت. در زیر نمونه ای از استدلال را می بینیم که خواننده را برای اثبات کلی در ادامه درس آماده می کند. در بسیاری از اوقات ما روی یک سیستم بزرگ تر یک اندازه گیری تصویری انجام می دهیم و این اندازه گیری روی یک سیستم اصلی ما به عنوان یک اندازه گیری نامتعامد پدیدار می شود. شکل (۷) به طور شماتیک این پدیده را نشان می دهد. برای فهم بهتر این موضوع نخست یک مثال را بررسی می کنیم:

شکل (۷) یک فضای سه بعدی و یک زیر فضای دوبعدی از آن را نشان می دهد. زیر فضای دوبعدی با بردارهای پایه $|1\rangle$ و $|2\rangle$ جاروب می شود. ولی ما به دلایلی سیستم خود را که یک سیستم دو بعدی است در یک سیستم بزرگ تر که سه بعد دارد جای داده و در فضای هیلبرت بزرگ تر یک اندازه گیری متعامد در پایه $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ انجام می دهیم. در آینده مثال ها و تمرین های مشخصی از این نوع اندازه گیری خواهیم دید. فضای دوبعدی کوچک را با H_A و فضای بزرگ تر را با H نشان می دهیم. H_A یک زیر فضای H است. فرض کنید که برداری های نشان داده شده در شکل به صورت زیر باشند:

^۵Neumark

$$\begin{aligned}
|e_1\rangle &= \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle \\
|e_2\rangle &= \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle \\
|e_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle.
\end{aligned} \tag{۳۸}$$

حال یک اندازه گیری تصویری در امتداد بردارهای فوق روی حالت زیر که مربوط به سیستم A است و به همین جهت بردار حالت آن در فضای هیلبرت H_A قرار دارد، انجام می دهیم. بردار حالت سیستم A را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle. \tag{۳۹}$$

اگرچه این بردار در زیر فضای H_A قرار دارد ولی اندازه گیری ما در فضای بزرگ H انجام می شود. برای اینکه نتیجه اندازه گیری را بفهمیم می بایست بردار $|\psi\rangle$ را برحسب بردارهای سه گانه فضای بزرگ بسط دهیم. بنابراین از روابط زیر استفاده می کنیم

$$\begin{aligned}
|1\rangle &= \frac{1}{2}|e_1\rangle + \frac{1}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_3\rangle \\
|2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle \\
|3\rangle &= \frac{1}{2}|e_1\rangle + \frac{1}{2}|e_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|e_3\rangle.
\end{aligned} \tag{۴۰}$$

و بسط بردار $|\psi\rangle$ را پیدا می کنیم:

$$|\psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)|e_1\rangle + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)|e_2\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|e_3\rangle \tag{۴۱}$$

دراین صورت اندازه گیری تصویری روی این بردار حالت در امتداد های $|e_1\rangle$ ، $|e_2\rangle$ و $|e_3\rangle$ با احتمالات زیر مرتبط است:

$$\begin{aligned}
P(e_1) &= \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 \\
P(e_2) &= \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 \\
P(e_3) &= \frac{a^2}{2}.
\end{aligned} \tag{۴۲}$$

به این معنا که با احتمالات فوق حالت ذره به یکی از حالت های $|e_1\rangle$ ، $|e_2\rangle$ و یا $|e_3\rangle$ تصویر خواهد شد. اما نتیجه اندازه گیری را می بایست از دید ناظر درون زیرفضای H_A نگاه کنیم. درنتیجه می بایست بردارهای فوق را به زیرفضای H_A تصویر کنیم. بنابراین نتیجه آن خواهد شد

که اندازه گیری انجام شده از دید این ناظر، بردار حالت را با احتمالات بالا به یکی از حالت های غیر متعامد زیر تصویر می کند. دقت کنید که بردارها را بهنجار کرده ایم.

$$\begin{aligned} |v_1\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle \\ |v_2\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle \\ |v_3\rangle &= |1\rangle. \end{aligned} \quad (43)$$

این مثال نشان می دهد که چگونه یک اندازه گیری غیر متعامد از یک اندازه گیری تصویری یا متعامد در یک فضای بزرگ تر بوجود می آید. حال می توانیم آنچه را که در این مثال بیان کردیم به صورت کلی تر صورتبندی کنیم. فرض کنید که حالتی که می خواهیم اندازه گیری کنیم در فضای H_A قرار دارد ولی ما روی فضای هیلبرت $H = H_A \oplus H_A^\perp$ یک اندازه گیری تصویری در پایه ی $\{|e_m\rangle\}$ انجام می دهیم. فضای $H_A^\perp$ بر H_A عمود است. هر حالت $|e_m\rangle$ به شکل یکتایی به صورت زیر تجزیه می شود:

$$|e_m\rangle = |v_m\rangle + |v_m^\perp\rangle \quad (44)$$

یا به صورت صریح تر:

$$|e_m\rangle = \begin{pmatrix} |v_m\rangle \\ |v_m^\perp\rangle \end{pmatrix} \quad (45)$$

که در آن بلوک بالا مربوط به زیر فضای H_A و بلوک پایین مربوط به زیر فضای $H_A^\perp$ است. از آنجا که حالت سیستم ما یعنی ρ_A در فضای هیلبرت H_A است، می دانیم که

$$\langle v_m^\perp | \rho_A = 0 = \rho_A | v_m^\perp \rangle. \quad (46)$$

باز هم به طور صریح تر حالت سیستم بزرگ تر چنین است:

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \rho_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

که واضح است خاصیت های گفته شده را دارد.

در اندازه گیری تصویری ای که در فضای H انجام می دهیم نتیجه ی m با احتمال زیر حاصل می شود

$$P(m) = \text{tr}(\rho_{AB}|e_m\rangle\langle e_m|) = \langle e_m|\rho_{AB}|e_m\rangle.$$

اما با توجه به شکل ρ_{AB} و $|e_m\rangle$ این احتمال را می توان به صورت زیر نوشت:

$$P(m) = \langle v_m | \rho_A | v_m \rangle = \text{tr}(|v_m\rangle\langle v_m| \rho_A).$$

برای اینکه این احتمال را به صورت $\text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)$ بنویسیم فکر می کنیم ببینیم که $|v_m\rangle\langle v_m|$ را به صورت مربع چه عملگری می توان نوشت: قرار می دهیم $M_m := c|v_m\rangle\langle v_m|$ که در آن c یک پارامتر حقیقی است. بنابراین M_m یک عملگر هرمیتی است. می خواهیم که تساوی زیر برقرار باشد.

$$M_m^\dagger M_m = |v_m\rangle\langle v_m| \quad (۴۸)$$

بنابراین بدست می آوریم که $c = \frac{1}{\sqrt{\langle v_m | v_m \rangle}}$ و در نتیجه قرار می دهیم:

$$M_m = \frac{|v_m\rangle\langle v_m|}{\sqrt{\langle v_m | v_m \rangle}}. \quad (۴۹)$$

بنابراین می توانیم بنویسیم

$$P(m) = \text{tr}(M_m \rho_A M_m^\dagger). \quad (۵۰)$$

هم چنین می دانیم که

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \sum_m |v_m\rangle\langle v_m|. \quad (۵۱)$$

اما طرف راست را با استفاده از عملگر تصویرگر روی فضای H_A می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \sum_m |v_m\rangle\langle v_m| = P_A \left(\sum_m |e_m\rangle\langle e_m| \right) P_A = P_A I_{A \oplus B} P_A = P_A \equiv I_A, \quad (۵۲)$$

که در آن P_A عملگر تصویرگر روی فضای H_A است و طبیعی است که از نظر A این عملگر مثل عملگر واحد در این فضا می ماند.

حالت بعد از اندازه گیری نیز در فضای بزرگ H برابر خواهد بود با $|e_m\rangle$ ولی در زیر فضای H_A تنها تصویر این بردار یعنی $|v_m\rangle$ دیده می

شود. بنابراین حالت بعد از اندازه گیری از دید سیستم A بعد از بهنجار شدن برابر خواهد بود با:

$$\rho_m = \frac{|v_m\rangle\langle v_m|}{\sqrt{\langle v_m | v_m \rangle}} \quad (۵۳)$$

■ تمرین: از تعریف M_m استفاده کنید و نشان دهید که عبارت فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)}. \quad (54)$$

۴ اندازه گیری های $POVM$

تقریباً در اغلب موارد ما تنها به آمار اندازه گیری علاقمندیم و به حالت های پس از اندازه گیری علاقمند نیستیم یا اینکه به آنها دسترسی نداریم. مثلاً یک دستگاه شمارشگر فوتون^۶ را در نظر بگیرید. فوتونی که به این دستگاه وارد می شود در همان اول جذب یک الکتروود فلزی شده و یک یا چند الکترون را آزاد می کند که به نوبه خود در چند مرحله پیاپی یک جریان الکتریکی را تولید می کنند. به این ترتیب با ثبت یک پالس جریان متوجه می شویم که یک فوتون به شمارشگر وارد شده است. در اینجا به حالت فوتون بعد از این که به شمارشگر وارد شده علاقه ای نداریم. یا پرده فلوروسانسی را در نظر بگیرید که به کمک آن می توانیم شدت نور را روی یک نقاط مختلف پرده تعیین کنیم. در هر دوی این موارد واقعا حالت ذرات ثبت شده مورد علاقه ما نیست چرا که اصولاً ذرات ثبت شده تغییر حالت می دهند و از دسترس ما نیز خارج می شوند (در حالت اول در صفحات فلزی ریزی که درون شمارشگر وجود دارد و در حالت دوم روی پرده جذب می شوند). در چنین مواردی تنها به احتمال رویداد ها علاقمند هستیم، مثلاً علاقمندیم بدانیم که در هر ثانیه چند تا فوتون به شمارشگر ما می رسند یا چند تا فوتون به یک نقطه از پرده می رسند یا چند تا فوتون قطبش افقی دارند و چند تا عمودی و نظایر این ها. احتمال اینکه شمارشگر شماره m کلیک کند (یعنی نتیجه m بدست آید) تابعی خطی بر حسب ρ است. اما هر تابع خطی از یک ماتریس چگالی را می توان به صورت ردّ حاصل ضرب یک عملگر در آن ماتریس نوشت، به عبارت بهتر می توان نوشت:

$$P_m(\rho) = \text{Tr}(E_m \rho). \quad (55)$$

اثبات: از آنجا که $P_m(\rho)$ یک تابع خطی از ماتریس چگالی ρ ست، می توان نوشت:

$$P_m(\rho) = f\left(\sum_{i,j} \rho_{i,j} P_m|i\rangle\langle j|\right) = \sum_{i,j} \rho_{i,j} P_m(|i\rangle\langle j|). \quad (56)$$

^۶Photo-multiplier tube

حال با تعریف ماتریس E_m با درایه های $P_m(|i\rangle\langle j|) := (E_m)_{ji}$ می توانیم بنویسیم

$$P_m(\rho) = \sum_{i,j} \rho_{ij} (E_m)_{ji} = \text{Tr}(E_m \rho) \quad (57)$$

که نکته گفته شده را ثابت می کند. از آنجا که این احتمالات می بایست برای هر ماتریس چگالی ای مثبت باشند و مجموع آنها برابر با یک باشد، می فهمیم که ماتریس های E_m می بایست مثبت بوده و مجموع آنها نیز برابر با یک باشد، یعنی

$$E_m \geq 0, \quad \sum_m E_m = I, \quad (58)$$

■ **تمرین:** رابطه های (58) را ثابت کنید.

به این ترتیب به نوعی از اندازه گیری می رسم که به صورت زیر تعریف می شود:

یک اندازه گیری $POVM$ با مجموعه ای از عملگرهای مثبت $\{E_m, m = 1 \dots K\}$ که در شرط

$$\sum_m E_m = I$$

صدق می کنند تعریف می شود. در این نوع اندازه گیری تنها به آمار اندازه گیری (تعداد کلیک های شمارشگرها) علاقه مندیم و نه به حالت ذرات بعد از اندازه گیری. وقتی که روی حالت ρ اندازه گیری می کنیم، احتمال بدست آوردن نتیجه m برابر است با:

$$P(m) = \text{tr}(\rho E_m)$$

■ **تمرین حل شده:** عملگرهای زیر را در نظر بگیرید:

$$M_1 = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad M_2 = \frac{1}{2}(I + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad M_3 = \frac{1}{2}(I + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (59)$$

رابطه سه بردار $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ و $\mathbf{t}$ چگونه باشد که این سه عملگر یک اندازه گیری نامتعامل را تعریف کنند. مثال های مشخصی از عملگرهای مربوطه ارائه دهید.

حل: می بایست داشته باشیم

$$M_1^\dagger M_1 + M_2^\dagger M_2 + M_3^\dagger M_3 = I. \quad (60)$$

با توجه به اینکه $(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = r^2 I$ طرف چپ عبارت بالا برابر می شود با:

$$\frac{1}{4} (3 + r^2 + s^2 + t^2 + 2(\mathbf{r} + \mathbf{s} + \mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\sigma}) = I \quad (61)$$

بنابراین شرط های لازم عبارتند از:

$$\mathbf{r} + \mathbf{s} + \mathbf{t} = 0, \quad r^2 + s^2 + t^2 = 1. \quad (62)$$

و یا

$$\mathbf{t} = -\mathbf{r} - \mathbf{s}, \quad 2r^2 + 2s^2 + 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = 1. \quad (63)$$

■ **تمرین حل شده:** تمرین: دو ذره در حالت

$$|\psi\rangle = \cos \theta |0, 0\rangle + \sin \theta |1, 1\rangle, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad (64)$$

قرار دارند. روی ذره اول یک اندازه گیری نامتعامل با ماتریس های زیر انجام می دهیم:

$$M_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-a^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-b^2} \end{pmatrix}. \quad (65)$$

الف- نسبت پارامترهای a, b را چنان تعیین کنید که وقتی که نتیجه 0 بدست می آید، حالت بعد از اندازه گیری یک حالت بل باشد.

ب - مقدار مطلق این پارامترها را چنان تعیین کنید که احتمال بست آوردن یک حالت بل به بیشترین مقدار ممکن برسد. تحت این شرایط

وقتی که نتیجه 1 بدست می آید، حالت دو ذره به چه حالتی تبدیل می شود؟

حل: در این اندازه گیری حالت اولیه با مشخص شدن نتایج 0 و 1 به ترتیب به حالت های زیر و با احتمالات نشان داده شده رمبش می

کند:

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= \frac{M_0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle}} & P(0) &= \langle\psi|M_0^\dagger M_0|\psi\rangle, \\ |\psi_1\rangle &= \frac{M_1|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle}} & P(1) &= \langle\psi|M_1^\dagger M_1|\psi\rangle. \end{aligned} \quad (66)$$

یا پس از ساده کردن

$$|\psi_0\rangle = \frac{a \cos \theta |00\rangle + b \sin \theta |11\rangle}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} \quad P(0) = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta, \quad (67)$$

و

$$|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{1-a^2} \cos \theta |00\rangle + \sqrt{1-b^2} \sin \theta |11\rangle}{\sqrt{(1-a^2) \cos^2 \theta + (1-b^2) \sin^2 \theta}} \quad P(1) = (1-a^2) \cos^2 \theta + (1-b^2) \sin^2 \theta. \quad (68)$$

برای آنکه حالت $|\psi_0\rangle$ یک حالت درهم تنیده ماکزیمال باشد، باید زاویه θ چنان باشد که در شرط $\tan \theta = \frac{a}{b}$ صدق کند. در این صورت با جایگذاری θ در روابط بالا خواهیم داشت:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad P(0) = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} = 2b^2 \frac{\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta}, \quad (69)$$

و

$$|\psi_1\rangle = \frac{b\sqrt{1-a^2}|00\rangle + a\sqrt{1-b^2}|11\rangle}{\sqrt{a^2+b^2-2a^2b^2}} \quad P(1) = 1 - \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} = 1 - 2b^2 \frac{\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta}. \quad (70)$$

بیشترین احتمال تولید حالت های درهم تنیده ماکزیمال وقتی است که قرار دهیم $b = 1$ که در این صورت این حالت ها با احتمال $P(0) = 2 \frac{\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta}$ تولید خواهند شد و با احتمال مکمل این یعنی $P(1) = 1 - 2 \frac{\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta}$ حالت ضربی تولید خواهد شد. از نظر فیزیکی هم این نتیجه قابل انتظار است، یعنی وقتی که بیشترین مقدار در هم تنیدگی را تولید می کنیم، می بایست در نتیجه دیگر اندازه گیری هیچ نوع درهم تنیدگی ای باقی نمانده باشد. دقت کنید که وقتی $\theta = \frac{\pi}{4}$ است، احتمال تولید درهم تنیدگی به بیشترین مقدار خود یعنی عدد یک می رسد و البته این هم قابل قبول است، چرا که در این حالت قبل از اندازه گیری هم درهم تنیده ماکزیمال است.

■ تمرین: دو عملگر

$$E_1 = a_0 I + \mathbf{a}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad b_0 + \mathbf{b}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

را در نظر بگیرید. تحت چه شرایطی این دو عملگر یک $POVM$ می سازند.

■ تمرین: یک اتم رادیواکتیو را در نظر بگیرید که از خود ذرات گاما در همه جهات ساطع می کند. در بالا و پایین این ذره دو آشکارساز قرار داده ایم که بتوانند تعداد ذرات تابیده شده در جهت های بالا و پایین بشمارند. عملگرهای مربوط به این اندازه گیری عبارتند از:

(۷۱)

$$E_{up} = \int_0^{\frac{5\pi}{12}} d\theta \sin \theta d\phi |\theta, \phi\rangle \langle \theta, \phi|, \quad E_{down} = \int_{\frac{7\pi}{12}}^{\pi} d\theta \sin \theta d\phi |\theta, \phi\rangle \langle \theta, \phi|, \quad E_{escape} = I - E_{up} - E_{down}.$$

الف- فرض کنید که ذرات با احتمال یکنواخت در همه جهات پخش می شوند. در این صورت احتمال اینکه آشکارساز بالایی کلیک کند چقدر است؟ احتمال اینکه هیچ کدام از آشکارسازهای بالا و پایین کلیک نکنند چقدر است؟ احتمال اینکه هر دو آشکارساز بالا و پایین کلیک کنند چقدر است؟

ب - فرض کنید که ذرات با احتمال $\frac{2}{3}$ به طرف نیمکره بالا و با احتمال $\frac{1}{3}$ در جهت نیم کره پایین تابیده می شوند. در این صورت پاسخ سوالات بالا چیست؟

ج - حال فرض کنید که ذرات با همان احتمالات گفته شده در قسمت ب، به ترتیب به طرف نیم کره دست راست و دست چپ تابانده می شوند. سوالهای قسمت ب را دوباره پاسخ دهید.

■ تمرین: دو ذره در حالت زیر قرار دارند:

$$\rho = \frac{1}{4}(I + t\sigma_x \otimes \sigma_x + t\sigma_y \otimes \sigma_y + t\sigma_z \otimes \sigma_z) \quad (۷۲)$$

الف: محدوده مجاز پارامتر t را چنان تعیین کنید که این عبارت نشان دهنده یک ماتریس چگالی باشد.

ب - یک اندازه گیری انجام می دهیم که تعیین می کند آیا این دو ذره در یک حالت متقارن هستد یا یک حالت پادمقارن. این اندازه گیری با دو عملگر $POVM$ مشخص می شود. این دو عملگر را بنویسید.
ج - احتمال هر کدام از دو رویداد را بدست آورید.

۱.۴ وقتی که آشکارسازها دقیق نیستند و در آنها اشتباه رخ می دهد.

در این بخش نشان می دهیم که چگونه اندازه گیری های $POVM$ در توصیف اندازه گیری های متعامد ولی غیردقیق به کار می روند. در بعضی از موارد آشکارسازهای ما خیلی دقیق نیستند و یا قدرت تفکیک کاملی ندارند یا اینکه تابع موج ذرات پخش شده و با یکدیگر همپوشانی پیدا می کنند. در این موارد ذره ای که قرار بوده به آشکارساز D_0 وارد شود با احتمالی به آشکارساز D_1 وارد می شود و باعث ایجاد خطا می شود. در ساده ترین حالت می توانیم فرض کنیم اندازه گیری ما ترکیبی است از یک اندازه گیری تصویری ایده آل که با تصویرگرهای P_0 و P_1 توصیف می شود ولی بلافاصله بعد از خطاهایی در ثبت ذرات بوجود می آید. در این صورت می توانیم احتمال ثبت ذرات را در آشکارسازها به صورت زیر بنویسیم:

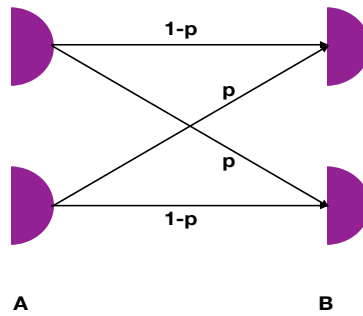
$$\begin{aligned} P(0) &= (1-p)Tr(\rho P_0) + pTr(\rho P_1) \\ P(1) &= (1-p)Tr(\rho P_1) + pTr(\rho P_0). \end{aligned} \quad (73)$$

در اینجا برای سادگی فرض کرده ایم که احتمال خطا به صورت متقارن و مطابق شکل (۸) است. در این صورت می توانیم روابط بالا را به شکل زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} P(0) &= Tr(\rho E_0) \\ P(1) &= Tr(\rho E_1). \end{aligned} \quad (74)$$

که در آن

$$\begin{aligned} E_0 &= (1-p)P_0 + pP_1 \\ E_1 &= (1-p)P_1 + pP_0. \end{aligned} \quad (75)$$



شکل ۸: سمت چپ آشکارسازهای ایده آل و سمت راست آشکارسازی های واقعی را نشان می دهد.

دقت کنید که این عملگرهای مثبت هستند و مجموع آنها نیز برابر با یک است. آنچه که در این مثال ساده گفته شد به صورت زیر تعمیم می یابد:

$$\mathcal{P}(\alpha) = \sum P(\alpha \leftarrow i)P(i) \quad (76)$$

$$\mathcal{P}(\alpha) = \sum_i P(\alpha \leftarrow i)Tr(\rho P_i) = Tr(\rho(\sum_i P(\alpha \leftarrow i)P_i)) = Tr(\rho E_\alpha) \quad (77)$$

که در آن

$$E_\alpha = \sum_i P(\alpha \leftarrow i)P_i. \quad (78)$$

معلوم است که این عملگرها همگی مثبت هستند و مجموع آنها نیز برابر با یک است.

■ تمرین: ثابت کنید که E_α ها مثبت هستند و مجموع آنها برابر با عملگر واحد است.

۵ تشخیص حالت ها از یکدیگر

فرض کنید که آلیس تعداد زیادی از حالت های $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ در اختیار دارد و این حالت ها را با احتمال مساوی به باب می فرستد. سوالی که باب با آن مواجه است این نیست که فلان مشاهده پذیر را از یک حالت معین اندازه گیری کند، بلکه می خواهد ببیند که آیا حالتی که اکنون آلیس برایش فرستاده است $|\psi_1\rangle$ است یا $|\psi_2\rangle$. این نمونه ای است از سوال های کلی ای که ما در اندازه گیری به آنها توجه داریم و به آن تشخیص حالت^۷ می گوییم. بنابراین می بینیم که همیشه سوالهای مهم از نوع اندازه گیری یک مشاهده پذیر روی یک حالت معین نیستند. باب می بایست با انجام بهترین اندازه گیری ها بتواند تا حد ممکن تشخیص دهد که آیا آلیس حالت $|\psi_1\rangle$ را برای وی فرستاده است یا حالت $|\psi_2\rangle$ را.

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle). \quad (۷۹)$$

فرض می کنیم که باب در پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ اندازه گیری می کند و بسته به نتیجه ای که بدست آورده است حدسی در باره حالتی که آلیس برایش فرستاده می زند و این حدس را اعلام می کند. دقت کنید که باب می تواند استراتژی های گوناگونی را به کار ببرد. در زیر دو نمونه از این استراتژی ها را توضیح می دهیم:

استراتژی الف: هرگاه باب نتیجه 0 بدست می آورد اعلام می کند که حالت ارسال شده توسط الیس $|0\rangle$ است (البته ممکن است باب در بعضی از موارد اشتباه کند) و هرگاه که نتیجه 1 بدست آورد اعلام می کند که آلیس حالت $|+\rangle$ را فرستاده است. در این استراتژی احتمال موفقیت باب برابر است با:

$$P_{success} = P(0| |0\rangle)P(|0\rangle) + P(1| |+\rangle)P(|+\rangle). \quad (۸۰)$$

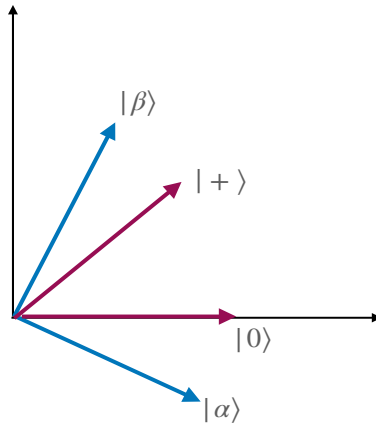
که در آن

$$P(|0\rangle) = P(|+\rangle) = \frac{1}{2}$$

احتمال این است که آلیس هرکدام از حالت های فوق را به باب بفرستد که در این مثال آنها را برابر گرفته ایم و $P(a| |b\rangle)$ نیز احتمال این است که باب نتیجه a بدست بیاورد وقتی که حالت $|b\rangle$ دریافت کرده است. با توجه به رابطه (۸۰) بدست می آوریم:

$$P_{success} = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \quad (۸۱)$$

^۷State Discrimination



شکل ۹: شکل مربوط به استراتژی ب برای تمیز دادن حالت ها.

دقت کنید که در این استراتژی گاهی اوقات باب اشتباه می کند و نتیجه را غلط اعلام می کند و این همان مواردی است که آلیس حالت $|+\rangle$ را برای او می فرستد و او نتیجه 0 را بدست می آورد و اعلام می کند که حالت فرستاده شده $|0\rangle$ است. این خطا با احتمال $1/4$ رخ می دهد.

استراتژی ب: در این استراتژی باب یک اندازه گیری متعامد (تصویری) در پایه های

$$|\alpha\rangle = \cos \frac{\pi}{8} |0\rangle - \sin \frac{\pi}{8} |1\rangle, \quad |\beta\rangle = \sin \frac{\pi}{8} |0\rangle + \cos \frac{\pi}{8} |1\rangle \quad (۸۲)$$

انجام می دهد و هرگاه نتیجه α بدست آورد اعلام می کند که آلیس حالت $|0\rangle$ را برای او فرستاده و هرگاه نتیجه β را بدست آورد اعلام می کند که آلیس حالت $|+\rangle$ را برای او ارسال کرده است. شکل (۹) نشان می دهد که چرا باب این استراتژی را انتخاب کرده است. در این استراتژی باب ممکن است که در هر دو حالت اشتباه کند، ولی به نظر می رسد که احتمال اشتباهش کم است. احتمال موفقیت او برابر است با:

$$P_{success} = P(\alpha|0)P(0) + P(\beta|+)P(+) \quad (۸۳)$$

و از آنجا که هر دو حالت را آلیس با احتمال مساوی به باب می فرستد و با جایگزینی احتمالات اندازه گیری ها

$$P_{success} = \frac{1}{2} \left[\cos^2 \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8})^2 \right]. \quad (۸۴)$$

با توجه به اینکه

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

نتیجه نهایی برابر خواهد شد با:

$$P_{\text{success}} = 0.922 \quad (۸۵)$$

که مقدار خیلی بهتری نسبت به استراتژی الف است. اما ضعف این استراتژی این است که این احتمال موفقیت به صورت کلی و برای کل رشته درست است و باب راجع به هیچ کدام از تک تک حالت هایی که دریافت می کند اطمینان کامل ندارد.

استراتژی پ: در این استراتژی باب تنها وقتی نتیجه را می گوید که از درستی حدس اش کاملاً مطمئن باشد. در نتیجه تنها وقتی که نتیجه 1 را دریافت می کند اعلام می کند که حالت $|+\rangle$ برایش ارسال شده و در غیر این صورت سکوت می کند. در این جا او تنها در $1/4$ موارد اعلام نظر قطعی می کند. اگر این را موفقیت بنامیم می توانیم بنویسیم:

$$P_{\text{no error}} = P(1| |+\rangle)P(|+\rangle) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \quad (۸۶)$$

۸

■ **تمرین:** حال فرض کنید که آلیس هر بار دو نسخه از هر حالت برای باب می فرستد. و باب بازهم در پایه محاسباتی اندازه گیری می کند. حساب کنید که این بار باب در چند درصد موارد می تواند با قطعیت بگوید که آلیس کدام جفت حالت را برایش فرستاده است.

■ **تمرین:** حال فرض کنید که آلیس هر بار یک بسته N تایی از هر حالت برای باب می فرستد و باب بازهم در پایه محاسباتی اندازه گیری می کند. حساب کنید که این بار باب در چند درصد موارد می تواند با قطعیت بگوید که آلیس کدام بسته را برایش فرستاده است. یک استراتژی دیگر را نیز طرح و احتمال موفقیت آن را محاسبه کنید. اگر N به سمت بی نهایت میل کند نتیجه شما چه می شود؟

حل: اگرچه باب می تواند تک تک ذرات را در پایه محاسباتی اندازه گیری کند یعنی عملگرهای تصویری او به شرح زیر باشد:

$$\{|s_1, s_2, \dots, s_n\rangle \langle s_1, s_2, \dots, s_N|, \quad s_i = 0, 1\},$$

اما از آنجا که او می داند الیس حالت های یکسان برایش می فرستد، راه بهتری انتخاب می کند و یک اندازه گیری تصویری فقط با دو عملگر تصویری زیر انجام می دهد:

$$\{|00 \dots 0\rangle \langle 00 \dots 0|, |11 \dots 1\rangle \langle 11 \dots 1|\}.$$

^۸البته اندازه گیری در پایه محاسباتی بهترین روش برای تشخیص این دو حالت از یکدیگر نیست. باب می بایست پایه ای به کار ببرد که نسبت به حالت های ارسال شده تقارن داشته باشد. رجوع کنید به تمرین های آخر ای درس.

دو نتیجه این اندازه گیری را نیز با 0 و 1 نشان می دهیم. می دانیم که

$$P(0| |0\rangle^{\otimes N}) = \langle 00 \dots 0 | |0\rangle^{\otimes N} = 1, \quad P(0| |+\rangle^{\otimes N}) = \langle 00 \dots 0 | |+\rangle^{\otimes N} = \frac{1}{2^N}, \quad (87)$$

باب همان استراتژی الف را که در بالا شرح دادیم دنبال می کند. در این صورت احتمال موفقیت او برابر است با:

$$P_{success} = P(0| |0\rangle^{\otimes N})P(|0\rangle^{\otimes N}) + P(1| |+\rangle^{\otimes N})P(|+\rangle^{\otimes N}) = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2^N} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2^N}\right). \quad (88)$$

به این ترتیب به نظر نمی رسد که فرستادن N نسخه از هر حالت کمکی به باب برای تشخیص حالت ها بکند، چرا که باب اساساً استراتژی اشتباهی را طراحی کرده است.

اما اگر آلیس فقط بتواند هر بار یکی از حالت ها را برایش بفرستد و منبعی نداشته باشد که از حالت های فوق تعداد دلخواهی درست کند، آیا باب می تواند اندازه گیری بهتری انجام دهد و حالت ها را از هم تشخیص دهد؟ در این قسمت می خواهیم نشان دهیم که در واقع یک چنین اندازه گیری هایی وجود دارند. وی می بایست یک اندازه گیری $POVM$ با عملگرهای زیر را انجام می دهد:

$$E_1 = \alpha |1\rangle\langle 1|, \quad E_2 = \beta |-\rangle\langle -| \quad (89)$$

که در آن $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ و

$$E_3 = I - E_1 - E_2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\beta}{2} & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & 1 - \alpha - \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \quad (90)$$

که در آن E_3 در پایه محاسباتی یعنی پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ نوشته شده و α و β اعداد مثبتی هستند که می بایست چنان انتخاب شوند که عملگر E_3 نیز مثبت باشد. می خواهیم ببینیم که باب در چند درصد موارد می تواند با قطعیت نوع حالت ارسال شده را تشخیص دهد. برای این کار دقت می کنیم که آزمایش حالت های ارسال شده به صورت زیر است.

$$\rho = \frac{1}{2}(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) \quad (91)$$

هم چنین می دانیم که وقتی نتیجه ۱ بدست آید وی با اطمینان می گوید که حالت $|\psi_2\rangle$ ارسال شده است زیرا $\langle\psi_1|E_1|\psi_1\rangle = 0$. به همین دلیل وقتی که نتیجه ۲ را بدست می آورد مطمئن است که حالت $|\psi_1\rangle$ برای وی ارسال شده است. تنها در حالت بدست آوردن نتیجه ۳ است که وی هم چنان مردد باقی خواهد ماند. بنابراین احتمال موفقیت برابر است با $P_{no-error} = P(1) + P(2)$ که در آن

$$P(1) = \text{tr}(\rho E_1) = \frac{1}{2} \langle\psi_2|E_1|\psi_2\rangle = \frac{1}{4} \alpha$$

$$P(2) = \text{tr}(\rho E_2) = \frac{1}{2} \langle \psi_1 | E_2 | \psi_1 \rangle = \frac{1}{4} \beta. \quad (92)$$

به عبارت دیگر داریم:

$$P_{no-error} = \text{tr}(\rho(1 - E_3)) = 1 - \text{tr}(\rho E_3). \quad (93)$$

برای بیشینه کردن احتمال موفقیت می بایست مقدار $\alpha + \beta$ را بیشینه کنیم. اما این بیشینه کردن می بایست تا جایی ادامه پیدا کند که عملگر E_3 هم چنان مثبت باقی بماند. ویژه مقدارهای عملگر E_3 برابرند با:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(2 - \alpha - \beta \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) \quad (94)$$

بدلیل تقارنی که نسبت به تعویض α و β وجود دارد می توانیم آن ها را مساوی بگیریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$P_{no-error} = \frac{\alpha}{2}, \quad \lambda_{\pm} = 1 - \alpha \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha \quad (95)$$

هدف ما زیاد کردن α است تا جاییکه هیچکدام از ویژه مقدارها منفی نشوند. برای این کار باید به مقدار صفر برای λ_{-} نگاه کنیم چون که این مرز ناحیه ای است که این ویژه مقدار شروع به منفی شدن می کند. با چنین محاسبه ای معلوم می شود که مقدار ممکن برای α برابر است با:

$$\alpha = \beta = 2 - \sqrt{2}. \quad (96)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$P_{no-error} = \frac{1}{2} (2 - \sqrt{2}) = 0.29. \quad (97)$$

یعنی این بار برخلاف قبل باب می تواند در ۲۹ درصد از موارد حالت ها را به دقت تشخیص دهد. دقت کنید که ما در این مثال استراتژی (ب) را مطالعه کردیم. در واقع اگر بخواهیم استراتژی (الف) با این نوع اندازه گیری ها دنبال کنیم، یعنی اینکه باب بتواند حدس بزند و بعضی وقت ها نیز این حدس ها اشتباه از آب درآید، آنگاه اندازه گیری های از نوع گفته شده در این مثال خوب نیستند و احتمال موفقیت آنها کمتر از مواردی است که اندازه گیری فقط دو نتیجه خروجی دارد.

■ تمرین: حال فرض کنید که آلایس حالت ها را با احتمال یکسان نمی فرستد بلکه با احتمال p حالت $|0\rangle$ و با احتمال $1 - p$ حالت $|+\rangle$ ارسال می کند. حساب کنید که در این صورت احتمال موفقیت باب برای تشخیص حالت چقدر است. پاسخ شما می بایست چنان باشد

که در حالت حدی $p \rightarrow 1$ یا $p \rightarrow 0$ احتمال تشخیص حالت به سمت یک و در حد $p = \frac{1}{2}$ به سمت مقدار 0.29 میل کند.

پاسخ:

$$P_{correct} = 1 - \sqrt{2p(1-p)}. \quad (98)$$

■ تمرین: آلیس دو حالت $|\psi_1\rangle := \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$ و $|\psi_2\rangle := \sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle$ را به صورت تصادفی و با احتمالات مساوی برای باب می فرستد. دقت کنید که هر دو حالت دلخواهی را همواره می توان به این شکل پارامتر بندی کرد. آلیس یک اندازه گیری متعامد دریاه $|u_1\rangle := \cos\alpha|0\rangle + \sin\alpha|1\rangle$ و $|u_2\rangle := -\sin\alpha|0\rangle + \cos\alpha|1\rangle$ انجام می دهد. هرگاه نتیجه u_i را بدست آورد حدس می زند که آلیس حالت $|\psi_i\rangle$ را برای او فرستاده است. برای آنکه به طور متوسط حدس باب بیشترین تطابق را با واقعیت داشته باشد α چه مقداری را باید اختیار کند. با یک تعریف مناسب مقدار موفقیت باب را تعیین کنید.

■ تمرین: همان حالت های مسئله قبلی را در نظر بگیرید اما این بار مشابه با راه حلی که در درس ارائه دادیم یک اندازه گیری $POVM$ به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$E_\phi := \alpha|\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|, \quad E_\psi := \alpha|\phi^\perp\rangle\langle\phi^\perp|, \quad E_0 = I - E_\psi - E_\phi. \quad (99)$$

آلیس دو حالت $|\psi_1\rangle := \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$ و $|\psi_2\rangle := \sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle$ را به صورت تصادفی و با احتمالات مساوی برای باب می فرستد. احتمال این که باب حالت ها را بدون هیچ گونه خطایی تعیین کند، یعنی کمیت $P_{no-error}$ را در این حالت حساب کنید. در حالت های حدی باید نتیجه شما از نظر فیزیکی نتیجه معقولی داشته باشد.

■ تمرین: یک $POVM$ به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}|z, +\rangle\langle z, +|, & E_2 &= \frac{1}{2}|z, -\rangle\langle z, -|, \\ E_3 &= \frac{1}{2}|x, +\rangle\langle x, +| & E_4 &= \frac{1}{2}|x, -\rangle\langle x, -| \end{aligned} \quad (100)$$

نشان دهید که این $POVM$ را می توان به عنوان یک اندازه گیری متعامد در یک فضای دوکیوبیتی در نظر گرفت.

حل: مطابق با آنچه که در ضمیمه این درس در مورد اثبات قضیه نویمارک خواهیم آموخت و با استفاده از همان نمادگذاری، می توانیم بنویسیم:

$$E_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \quad E_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2| \quad E_3 = |\psi_3\rangle\langle\psi_3| \quad E_4 = |\psi_4\rangle\langle\psi_4|. \quad (101)$$

که در آن

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & |\psi_4\rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (۱۰۲)$$

با توجه به رابطه $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = I$ نتیجه می گیریم

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\psi_3\rangle\langle\psi_3| + |\psi_4\rangle\langle\psi_4| = I \quad (۱۰۳)$$

(و با توجه به شیوه اثبات قضیه نویمارک در ضمیمه) می فهمیم که بردارهای چهاربعدی زیریکه و برهم عمودند:

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad e_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right). \quad (۱۰۴)$$

می توان ماتریس چهاربعدی ساخت که دو ستون اول آن را بردارهای فوق تشکیل می دهند:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (۱۰۵)$$

می توان با اضافه کردن دو ستون یا دو بردار دیگر این ماتریس را تبدیل به یک ماتریس یکانی کرد:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (۱۰۶)$$

به این ترتیب چهاربردار متعامد و یکه پیدا می کنیم که همان سطرهای ماتریس فوق هستند:

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad |u_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad |u_3\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad |u_4\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (107)$$

با توجه به آنچه که در ضمیمه آمده است، اندازه گیری در پایه این بردارهای متعامد در فضای چهاربعدی تصویرش در فضای دوبعدی همان اندازه گیری $POVM$ در فضای دوبعدی است.

■ تمرین: می خواهیم حالت های $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ و $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|1\rangle$ را با اندازه گیری از هم تمیز دهیم. یک اندازه گیری $POVM$ که به کمک آن می توان این دو حالت را از هم تمیز داد بدست آورید. هم چنین تعیین کنید که در چند درصد موارد قضاوت شما درمورد نوع حالت بطور قطع درست است.

■ تمرین: فرض کنید که یک حالت خالص $|\psi\rangle$ با احتمال یکنواخت از روی کره بلوخ به شما داده می شود. شما حدس می زنید که حالت $|\phi\rangle$ به شما داده شده است. به طور متوسط، تشابه یا به اصطلاح $Fidelity$ مربوط به این حدس شما که با عبارت زیر داده می شود چقدر است؟

$$F := |\langle\phi|\psi\rangle|^2. \quad (108)$$

■ تمرین: فیدلیته یا تشابه دو حالت ρ و σ به صورت زیر تعریف می شود:

$$F := \text{tr} \sqrt{\sigma^{\frac{1}{2}} \rho \sigma^{\frac{1}{2}}}. \quad (109)$$

برای دو حالت $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{s} \cdot \vec{\sigma})$ و $\sigma = \frac{1}{2}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$ در کره بلوخ، فیدلیته را حساب کنید. پاسخ شما می بایست تابعی از فاصله بردارهای r و s باشد. اگر درست محاسبه کرده باشید، نتیجه نهایی می بایست علیرغم فرم تعریف F نسبت به ρ و σ متقارن باشد. در حالتیکه هر دو حالت خالص هستند نشان دهید که این تابع تشابه به همان رابطه ای منجر می شود که در درس مکانیک کوانتومی دیده اید.

■ تمرین: یک حالت دلخواه و خالص مثل $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ را در نظر بگیرید. روی این حالت یک اندازه گیری تصویری در پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ انجام می دهیم، بدون اینکه از نتیجه اندازه گیری آگاه شویم. فیدلیته حالت بعد از اندازه گیری را با حالت قبل از اندازه گیری بدست آورید. به ازای چه مقدارهایی از a و b این فیدلیته بیشترین مقدار را دارد؟

■ تمرین: حالت خالص زیر را در نظر بگیرید:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle \right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \left(\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle \right). \quad (110)$$

تجزیه اشمیت این حالت را بدست آورید.

■ تمرین: یک ذره اسپین $2/1$ در حالت $|\psi\rangle = a|z, +\rangle + b|z, -\rangle$ قرار دارد. این ذره را در کنار ذره دومی که در حالت $|z, -\rangle$ قرار دارد، گذاشته و یک اندازه گیری روی هر دوزره در پایه $|l, m\rangle$ که پایه های تکانه زاویه ای کل است انجام می دهیم. از نتایج اندازه گیری نیز مطلع نیستیم.

الف: ماتریس چگالی ذره اول را قبل و بعد از اندازه گیری مشخص کنید.

ب: از دید ذره اول اندازه گیری که انجام شده است با چه عملگرهایی مشخص می شود؟

۶ تخمین حالت ها

در این بخش به مسئله تخمین حالت^۹ می پردازیم. صورت مسئله این است. تعداد زیادی حالت یکسان به ما داده شده است و ما می خواهیم با انجام آزمایش و اندازه گیری این حالت را مشخص کنیم. طبیعی است که دقت تخمین ما بستگی به عوامل متعدد دارد. آیا تعدادی که به ما داده

^۹ State Estimation

شده است بی نهایت است یا متناهی؟ آیا فقط یک نوع اندازه گیری می توانیم انجام دهیم یا اینکه می توانیم اندازه گیری های متعدد انجام دهیم؟ همه این ها در تخمین نهایی ما نقش ایفا می کنند. در بخش های زیر شرایط گوناگونی را بررسی می کنیم:

۱.۶ وقتی که اندازه گیری های دلخواه را می توانیم روی تعداد نامحدودی از حالت ها انجام دهیم.

برای سادگی فرض می کنیم که با یک کیوبیت سروکار داریم. حالت یک کیوبیت به صورت زیر نوشته می شود:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \sigma). \quad (111)$$

برای مشخص کردن این حالت می بایست بردار $\mathbf{r}$ را تعیین کنیم. مولفه های بردار $\mathbf{r}$ برابرند با

$$x := \langle \sigma_x \rangle = \text{tr}(\sigma_x \rho), \quad y := \langle \sigma_y \rangle = \text{tr}(\sigma_y \rho), \quad z := \langle \sigma_z \rangle = \text{tr}(\sigma_z \rho). \quad (112)$$

بنابراین کافی است که سه آزمایش جداگانه انجام دهیم تا مقادیر متوسط های بالا را بدست آوریم. (فعلا فرض می کنیم که تعداد بسیار زیادی از این حالت های یکسان در اختیار داریم و در محاسبه متوسط های بالا هیچ نوع محدودیتی نداریم. بعدا این محدودیت را به تفصیل بررسی خواهیم کرد.) واضح است که سه مشاهده پذیر بالا تنها انتخاب ممکن نیستند و بی نهایت انتخاب برای اندازه گیری وجود دارد.

■ تمرین: روی یک کیوبیت اندازه گیری های انجام شده متوسط های زیر را بدست داده است:

$$\langle H \rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad \langle X - Z \rangle = \frac{1}{3}, \quad \langle X \rangle = \langle Y \rangle. \quad (113)$$

این کیوبیت با چه برداری در کره بلوخ مشخص می شود؟

■ تمرین: یک حالت دو کیوبیتی به شما داده شده است.

الف: شکل کلی این حالت را برحسب ماتریس های پاولی بنویسید.

ب: مشخص کنید که چند تا اندازه گیری لازم است که حالت به طور کامل مشخص شود. فرض کنید که تعداد نامحدودی حالت یکسان در اختیار دارید.

■ تمرین: یک حالت کیوبیتی با بعد d به شما داده شده است.

الف: چند تا اندازه گیری لازم است که شکل حالت به طور کامل مشخص شود؟

ب: یک مجموعه عملگر هرمیتی مشخص کنید که با اندازه گیری متوسط آنها حالت مشخص شود.

■ تمرین: یک حالت n کیوبیتی به شما داده شده است.

الف: شکل کلی این حالت را برحسب ماتریس های پاولی بنویسید.

ب: مشخص کنید که چند تا اندازه گیری لازم است که حالت به طور کامل مشخص شود. فرض کنید که تعداد نامحدودی حالت یکسان در اختیار دارید.

۲.۶ وقتی که فقط بعضی از اندازه گیری ها را می توانیم روی تعداد نامحدودی از حالت ها انجام دهیم.

باز می گردیم به مثال کیوبیت. دیدیم که برای اندازه گیری حال فرض کنید که در آزمایشگاه امکان انجام سه نوع اندازه گیری بالا را نداریم. مثلاً می توانیم فقط متوسط مشاهده پذیرهای σ_x و σ_z را که دو جهت مشخص هستند اندازه بگیریم. در این صورت می پرسیم که بهترین تخمینی که برای حالت کوانتومی می توانیم بدست بدهیم چیست؟

واضح است که در این جا حالت کوانتومی را نمی توانیم به طور دقیق مشخص کنیم و تنها باید به یک تخمین اکتفا کنیم. این مسئله را به طور کلی مطالعه می کنیم. بنابر این فرض کنید که حالت سیستم کوانتومی، که می تواند یک ذره یا چند ذره باشد، با ρ نشان داده می شود و در آزمایشگاه امکان اندازه گیری متوسط مشاهده پذیرهای G_1 تا G_K را داریم. یعنی کمیت های زیر را می توانیم در آزمایشگاه تعیین کنیم:

$$g_i := \langle G_i \rangle = \text{tr}(G_i \rho), \quad i = 1, \dots, K. \quad (114)$$

سوال این است که با دانشی که از روابط بالا در مورد ρ داریم بهترین تخمین برای ρ چیست؟ اگر هیچ اطلاعی در مورد حالت نداشته باشیم، این حالت می تواند در فضای ماتریس های چگالی هر جایی باشد. و هیچ نوع ماتریس چگالی بر دیگری برتری ندارد. بنابراین بهترین تخمین آن است که ρ را متناسب با واحد اختیار کنیم. این ماتریس بیشترین مقدار عدم یقین را منعکس می کند. این بیشینه عدم یقین نیز ناشی از این است که ما هیچ گونه اطلاع خاصی در باره حالت نداریم. در واقع حالت $\rho = \frac{1}{d}I$ که در آن d بعد فضای هیلبرت مربوط به سیستم است حالتی است

که عدم یقین یا آنتروپی S را که به صورت زیر تعریف می شود، بیشینه می کند:

$$S(\rho) = -tr(\rho \log \rho). \quad (115)$$

این جا برای اولین بار با تعریف آنتروپی فون نویمان^{۱۰} روبرو می شویم ولی در درسهای آینده به خصوص در درس اطلاعات کوانتومی به تفصیل در باره آنتروپی سخن خواهیم گفت. برای بحث کنونی کافی است به یک خاصیت کلی آن اشاره کنیم و آن اینکه هرگاه آنتروپی شانون را بر حسب ویژه مقدارهای ρ بسط دهیم به صورت زیر در می آید:

$$S(\rho) = -\sum_i p_i \log p_i, \quad (116)$$

که در واقع کاملاً با آنتروپی کلاسیکی که از درسهای مکانیک آماری با آن آشنا هستیم و می دانیم که نشان دهنده بی نظمی است، یکسان است.

■ تمرین: نشان دهید که برای یک حالت خالص مقدار انتروپی برابر با صفر و برای یک حالت کاملاً آمیخته آنتروپی برابر است با $\log_2 d$ ، که در آن d بعد فضای هیلبرت است.

در واقع می توانید p_i ها را مقادیر احتمال برای یک متغیر تصادفی تصور کنید که d مقدار ممکن را اختیار می کند. هرچقدر که این مقادیرها پراکنده تر و بی نظم تر باشند مقدار انتروپی بیشتر و هر چقدر که به هم نزدیک تر باشند میزان آنتروپی کمتر است.

حال که می دانیم حالت ρ چنان است که مقید به روابط ۱۱۴ است می بایست آنتروپی را با توجه به قید های بالا و هم چنین با توجه به این که $tr(\rho) = 1$ است در فضای ماتریس های هرمیتی بیشینه کنیم. این کار را با استفاده از ضرایب لاگرانژ انجام می دهیم. (همان کاری که بارها در مکانیک آماری انجام داده ایم). بنابراین قرار می دهیم:

$$F(\rho) = -tr(\rho \log \rho) - \sum_i \lambda_i (tr(\hat{G}_i \rho) - g_i) - \lambda (tr \rho - 1), \quad (117)$$

و تقاضا می کنیم که تغییرات مرتبه اول این تابع نسبت به تغییرات ρ برابر با صفر باشد. وردش F نسبت به ρ منجر می شود به:

^{۱۰} von Neumann Entropy

$$\delta F(\rho) = -tr(\delta\rho \log \rho + \delta\rho) - \sum_i \lambda_i tr(\hat{G}_i \delta\rho) - \lambda tr(\delta\rho), \quad (118)$$

از آنجا که این وردش می بایست برای هر $\delta\rho$ برابر با صفر باشد با قرار دادن ضریب $\delta\rho$ مساوی با صفر در رابطه بالا به نتیجه زیر می رسم:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\sum_i \lambda_i \hat{G}_i}, \quad (119)$$

که در آن Z یک ضریب عددی است. می دانیم که مطابق با روش ضرایب لا گرانژ می بایست مشتق F را نسبت به λ_i ها و λ مساوی با صفر قرار دهیم. این دو معادله منجر به همان قیدهایی می شوند که از آن ها شروع کرده ایم یعنی اینکه $tr(\hat{G}_i \rho) = g_i$ و $tr(\rho) = 1$. معادله اول مقدار Z را بدست می دهد که در نتیجه

$$Z = tr\left(e^{-\sum_i \lambda_i \hat{G}_i}\right). \quad (120)$$

معادله دوم هم منجر به این می شود که :

$$g_i = \frac{1}{Z} tr\left(\hat{G}_i e^{-\sum_i \lambda_i \hat{G}_i}\right). \quad (121)$$

این معادله اخیر را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$g_i = -\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \ln Z. \quad (122)$$

حل کردن دسته معادلات اخیر که البته یک دسته جفت شده غیرخطی است مقادیر λ_i ها را بر حسب g_i ها بدست می دهد. به این ترتیب بهترین تخمین برای ρ با استفاده از آزمایش هایی که انجام داده ایم بدست می آید.

■ **مثال:** فرض کنید که روی حالت یک کیوبیت آزمایش انجام شده است و مقدار زیر در دست است:

$$\langle \sigma_x \rangle = a. \quad (123)$$

بهترین تخمین برای حالت کیوبیت چیست؟

حل: با توجه به آنچه یاد گرفتیم قرار می دهیم:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\lambda \sigma_x} = \frac{1}{Z} (\cosh \lambda - \sinh \lambda \sigma_x) \quad (124)$$

که در آن

$$Z = \text{Tr}(e^{-\lambda \sigma_x}) = 2 \cosh \lambda. \quad (125)$$

با ترکیب این دو رابطه بدست می آوریم

$$\rho = \frac{1}{2} (I - \tanh \lambda \sigma_x). \quad (126)$$

اما باید مقدار λ را هم پیدا کنیم. می دانیم که

$$a \equiv \langle \sigma_x \rangle = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln Z = -\tanh \lambda. \quad (127)$$

با ترکیب نتایج بالا بدست می آوریم:

$$\rho = \frac{1}{2} (I + a \sigma_x). \quad (128)$$

این بهترین تخمین برای ماتریس چگالی است.

■ تمرین: در تمرین قبلی فرض کنید که دو آزمایش انجام شده و مقادیر زیر را در اختیار داریم:

$$\langle \sigma_x \rangle = a, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \langle (\sigma_y + \sigma_z) \rangle = b. \quad (129)$$

بهترین تخمین حالت کیوبیت چیست؟

■ تمرین: در یک کاواک الکترومغناطیسی که شامل فوتون های با یک فرکانس معین است، مقدار متوسط فوتون ها را تعیین کرده ایم. با

استفاده از روش بالا بهترین تخمینی که برای حالت ρ را تعیین کنید.

■ تمرین: می خواهیم حالت کوانتومی یک نوسانگر هارمونیک را تنها با داشتن متوسط مختصه مکان یعنی $\langle X \rangle$ تخمین بزنیم. برای سادگی

پارامترهایی نظیر جرم و فرکانس نوسانگر و هم چنین ثابت پلانک را چنان بگیرد که داشته باشیم: $X = a + a^\dagger$.

راهنمایی: برای محاسبه Z می توانید از رابطه کامل بودن حالت های همدوس یعنی

$$\frac{1}{\pi} \int dz d\bar{z} |z\rangle \langle z| = I \quad (130)$$

که در آن $|z\rangle$ نشان دهنده حالت بهنجار همدوس است.

۳.۶ وقتی که تنها روی تعداد محدودی از حالت ها می توانیم آزمایش انجام دهیم.

در بخش قبلی فرض ما این بود که می توانیم متوسط مشاهده پذیر را به طور دقیق تعیین کنیم. محاسبه درست و دقیق متوسط یک مشاهده پذیر از روی آزمایش نیازمند داشتن بی نهایت کپی از یک حالت است که هیچ وقت در عمل ممکن نیست. در واقع مسئله اصلی ما این است که حتی اگر آلیس تعداد خیلی زیادی حالت یکسان به آزمایشگاه ما ارسال کرده باشد ما نمی خواهیم روی تمام آنها آزمایش انجام دهیم زیرا این کار باعث رمبش و وادوسی این حالت ها می شود. آنچه که ما می خواهیم این است که روی تعداد کمی از حالت ها آزمایش کنیم و با استفاده از این تعداد محدود حالت تمام ذرات را تعیین کنیم. بنابراین می بایست از حالت ایده آلی که در بخش قبل به آن پرداختیم فاصله بگیریم و حالت واقعی تری را بررسی کنیم که در آن تنها تعداد محدودی حالت در دسترس داریم و می خواهیم با انجام آزمایش روی آنها حالت کوانتومی را تخمین بزنیم. برای آشنا شدن با این موضوع نخست یک مثال از دنیای کلاسیک را بررسی می کنیم.

۱.۳.۶ استنتاج آماری کلاسیک

فرض کنید که چندین سکه نامتوازن در اختیار داریم که با شماره های 1 تا m شماره گذاری شده اند. سکه k ام دارای احتمالات p_k برای شیر آمدن و $q_k = 1 - p_k$ برای خط آمدن است. یکی از این سکه ها را به ما می دهند و ما حق داریم که آن را N بار بیندازیم. در این N بار آزمایش N_+ بار سکه شیر آمده است. می خواهیم از نتیجه آزمایش حدس بزنیم که کدام سکه را به ما داده اند. می دانیم که روابط زیر برقرارند:

$$P(N_+|k) = \binom{N}{N_+} p_k^{N_+} q_k^{N-N_+}, \quad k = 1, m, \quad (131)$$

که در آن $P(N_+|k)$ احتمال آمدن N_+ تا شیر است اگر سکه k ام را به ما داده باشند.

می دانیم که رابطه زیر بین احتمالات شرطی برای دو متغیر تصادفی به صورت زیر برقرار است:

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)P(x)}{P(y)} = \frac{P(y|x)P(x)}{\sum_x P(y, x)} \quad (132)$$

بنابراین با استفاده از این رابطه و رابطه قبلی می توانیم مجهول مسئله یعنی $P(k|N_+)$ را بدست بیاوریم. این کمیت یعنی $P(k|N_+)$ همان چیزی است که ما می خواهیم یعنی احتمال اینکه سکه k را در دست داشته باشیم اگر N_+ تا شیر آورده باشیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$P(k|N_+) = \frac{P(k|N_+)P(k)}{P(N_+)} = \frac{P(N_+|k)P(k)}{\sum_{k=1}^m P(N_+|k)P(k)}. \quad (133)$$

می توان یک متغیر تصادفی K تعریف کرد که همان شماره سکه مربوطه باشد. در این صورت بعد از انجام آزمایش و محاسبه احتمالات بالا می توانیم بهترین مقدار K را تخمین بزنیم. این مقدار را با K_{est} نشان می دهیم و مقدار آن را برابر با متوسط متغیر تصادفی K می گیریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$K_{est} = \sum_{k=1}^m P(k|N_+)k = \frac{\sum_{k=1}^K P(N_+|k)P(k)}{\sum_k P(N_+|k)P(k)} \quad (134)$$

در صورتی که سکه ها را با احتمال یکنواخت به ما داده باشند قرار می دهیم $P(k) = const$ و در نتیجه رابطه بالا به شکل ساده زیر درمی آید:

$$K_{est} = \frac{\sum_{k=1}^K p_k^{N_+} q_k^{N-N_+} k}{\sum_{k=1}^K p_k^{N_+} q_k^{N-N_+}}. \quad (135)$$

به این ترتیب از روی نتیجه ای که از آزمایش بدست آمده است می توانیم محتمل ترین سکه ای را که به ما داده شده است استنتاج کنیم.

■ تمرین: یکی از دو سکه زیر را به ما داده اند: سکه A که احتمالات شیر و خط شان به ترتیب عبارتند از $p = 1/3$ و $q = 2/3$ و سکه B که احتمالاتش برابرند با $p = 2/5$ و $q = 3/5$.
این سکه را ۱۰۰۰ بار می اندازیم و ۶۰۰ بار شیر می آوریم. احتمال اینکه سکه A را به ما داده باشند چقدر است؟ احتمال اینکه سکه B را به ما داده باشند چقدر است؟

بعد از این مثال کلاسیک می خواهیم این نحوه استنتاج را به دنیای کوانتومی و مسئله تخمین حالت تعمیم دهیم. فرض می کنیم که آلایس N نسخه از یک حالت ρ برای باب می فرستد. باب یک اندازه گیری $POVM = \{E_1, E_2, \dots, E_K\}$ روی هر نسخه از این حالت ها انجام می دهد. در این N بار اندازه گیری m_1 بار نتیجه ۱، m_2 بار نتیجه ۲، و بطور کلی m_i بار نتیجه i بدست می آید. طبیعی است که

$$m_1 + m_2 + \dots + m_K = N.$$

احتمال این که این نتایج در اندازه گیری ها بدست آید برابر است با:

$$P_N(m_1, m_2, \dots, m_K | \rho) = \frac{N!}{m_1! m_2! \dots m_K!} \text{tr}(E_1 \rho)^{m_1} \text{tr}(E_2 \rho)^{m_2} \dots \text{tr}(E_K \rho)^{m_K}. \quad (136)$$

آنچه که ما می خواهیم احتمال زیر است:

$$P(\rho | m_1, m_2, \dots, m_K) \quad (137)$$

یعنی احتمال اینکه آلایس حالت ρ را برای باب ارسال کرده باشند اگر باب نتایج $m_1, m_2, \dots$ را در N بار اندازه گیری بدست آورده باشد. بهتر است که نمادهای خلاصه ای را تعریف کنیم، بنابراین قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} P_N(\rho | m_1, m_2, \dots, m_K) &\equiv P_N(\rho | \mathbf{m}) \\ P_N(m_1, m_2, \dots, m_K | \rho) &\equiv P_N(\mathbf{m} | \rho). \end{aligned} \quad (138)$$

با این نمادهای اختصاری می توانیم بنویسیم:

$$P_N(\rho | \mathbf{m}) = \frac{P_N(\mathbf{m} | \rho) P(\rho)}{\int d\rho P_N(\mathbf{m} | \rho) P(\rho)} \quad (139)$$

برای وقتی که $P(\rho)$ ثابت است این رابطه ساده تر شده و به شکل زیر در می آید:

$$P_N(\rho | \mathbf{m}) = \frac{P_N(\mathbf{m} | \rho)}{\int d\rho P_N(\mathbf{m} | \rho)}. \quad (140)$$

در نتیجه حالتی که تخمین زده می شود برابر است با:

$$\rho_{est} = \int P_N(\rho | \mathbf{m}) \rho d\rho. \quad (141)$$

■ تمرین: N نسخه از یک کیوبیت که در حالت خالص $|\psi\rangle$ قرار دارد برای ما ارسال می شود. روی این حالت های یک اندازه گیری تصویری با تصویرگرهای $\{|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|\}$ انجام می دهیم و m بار نتیجه 0 و $N - m$ بار نتیجه 1 بدست می آوریم. بهترین تخمینی را که برای ρ می توانیم بزنیم چیست؟ پاسخ:

$$\rho_{est} = \frac{1}{2} \left(I + \frac{2m - N}{N} \sigma_z \right) \quad (142)$$

دقت کنید که اگر چه حالت های خالص برای ما فرستاده شده ولی بهترین تخمین ما یک حالت آمیخته است.

■ تمرین: آلیس یکی از دو حالت $|0\rangle$ یا $|+\rangle$ را با احتمال مساوی آنهم برای یک بار برای باب می فرستد. باب روی این حالت ها در پایه محاسباتی 1 یا همان پایه $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ اندازه گیری انجام داده و $|0\rangle$ بدست می آورد. از نظر او احتمال این که آلیس حالت $|0\rangle$ را فرستاده باشد چقدر است و احتمال اینکه حالت $|+\rangle$ را فرستاده باشد چقدر؟

■ تمرین: آلیس یکی از دو حالت $|0\rangle$ یا $|+\rangle$ را با احتمال مساوی ولی برای دو بار به باب می فرستد. باب روی این حالت ها در پایه محاسباتی اندازه گیری انجام داده و در هر دو بار $|0\rangle$ بدست می آورد. از نظر او احتمال این که آلیس حالت $|0\rangle$ را فرستاده باشد چقدر است و احتمال اینکه حالت $|+\rangle$ را فرستاده باشد چقدر؟

■ تمرین: آلیس یکی از دو حالت $|0\rangle$ یا $|+\rangle$ را با احتمال مساوی ولی برای n بار به باب می فرستد. باب روی این حالت ها در پایه محاسباتی اندازه گیری انجام داده و در هر n بار $|0\rangle$ بدست می آورد. از نظر او احتمال این که آلیس حالت $|0\rangle$ را فرستاده باشد چقدر است و احتمال اینکه حالت $|+\rangle$ را فرستاده باشد چقدر؟

¹Computational Basis

دو تمرین گذشته راه ما را برای صورت بندی حالت کلی تر هموار می کنند. فرض کنید که آلیس n نسخه از حالت ρ را برای باب ارسال می کند. باب روی این حالت ها اندازه گیری $POVM$ با عملگرهای

$$POVM = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_k\} \quad (۱۴۳)$$

انجام می دهد. حالتی که آلیس ارسال کرده عبارت است از $\rho^{\otimes N}$ و اندازه گیری ای که باب نیز انجام می دهد روی همه نسخه ها باهم است. البته این اندازه گیری می تواند یک اندازه گیری در هم تنیده یا جدا از هم باشد. در این صورت داریم:

$$P_N(k|\rho) = \text{tr}(\mathcal{E}_k \rho^{\otimes N}). \quad (۱۴۴)$$

منظور از $P_N(k|\rho)$ احتمال این است که وقتی آلیس N نسخه از حالت ρ برای باب می فرستد و باب روی آنها اندازه گیری می کند نتیجه k بدست آورد.

مثل قبل بدست می آوریم:

$$P_N(\rho|k) = \frac{P_N(k|\rho)P(\rho)}{\int P_N(k|\rho)P(\rho)d\rho} = \frac{\text{tr}(\mathcal{E}_k \rho^{\otimes N})P(\rho)}{\int \text{tr}(\mathcal{E}_k \rho^{\otimes N})P(\rho)d\rho} \quad (۱۴۵)$$

باز هم وقتی که احتمال انتخاب حالت ρ یکنواخت باشد، رابطه بالا ساده می شود.

۷ ضمیمه یک: اثبات قضیه نویمارک

قضیه نویمارک بیان می کند که هر اندازه گیری $POVM$ را می توان از یک اندازه گیری تصویری در یک فضای بزرگ تر بازسازی کرد. برای این کار نخست به یک مقدمه کوتاه احتیاج داریم. فرض کنید که در یک فضای d بعدی V یک اندازه گیری $POVM$ با عملگرهای $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ انجام دهیم. این عملگرها می بایست نامنفی بوده و جمع همه آنها برابر با عملگر واحد باشد. این عملگرها را می توان بدون نقض کلیت عملگرهایی با رتبه یک (یعنی با حداکثر یک ویژه مقدار غیر صفر) در نظر گرفت. برای فهم این نکته فرض کنید که عملگری مثل E_1 دارای رتبه ۲ باشد. در این صورت می توان نوشت

$$E_1 = E'_1 + E''_1 \quad (۱۴۶)$$

که در آن E' و E'' عملگرهای رتبه یک هستند. در این صورت داریم

$$P(1) = \text{tr}(E_1 \rho) = \text{tr}(E'_1 \rho) + \text{tr}(E''_1 \rho) =: P(1') + P(1''). \quad (147)$$

که احتمالات $P(1')$ و $P(1'')$ را در طرف راست تعریف کرده‌ایم. بنابراین هرگاه اندازه گیری $\{E'_1, E''_1, E_2, \dots, E_k\}$ را انجام دهیم و احتمالات $P(1')$ و $P(1'')$ را با هم جمع کنیم و آن را مساوی $P(1)$ قرار دهیم مثل این است که اندازه گیری $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ را انجام داده‌ایم. با این مقدمه می‌توانیم تمام عملگرهای $POVM$ را عملگرهایی با رتبه یک در نظر بگیریم. هم چنین می‌توانیم تعداد این عملگرها را از بعد فضای V بیشتر بگیریم زیرا با افزودن عملگرهای نامنفی $E = 0$ می‌توانیم این کار را انجام دهیم. با این مقدمه به سراغ اثبات قضیه نویمارک می‌رویم. ایده اثبات را می‌توان با یک مثال در بعد کم نشان داد. این اثبات مطلقاً هیچ چیزی از اثبات کلی کم ندارد.

فضای V را دو بعدی در نظر می‌گیریم و یک اندازه گیری $POVM$ با عملگرهای $\{E_1, E_2, E_3\}$ که در این فضا انجام می‌شود. از آنجا که این عملگرها مثبت بوده و رتبه یک دارند می‌توان آنها را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} E_1 &= |\tilde{\psi}_1\rangle\langle\tilde{\psi}_1|, \\ E_2 &= |\tilde{\psi}_2\rangle\langle\tilde{\psi}_2|, \\ E_3 &= |\tilde{\psi}_3\rangle\langle\tilde{\psi}_3|, \end{aligned} \quad (148)$$

که در آن این بردارها لزوماً متعامد و یکه نیستند. اما به دلیل خاصیت povm در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$E_1 + E_2 + E_3 = |\tilde{\psi}_1\rangle\langle\tilde{\psi}_1| + |\tilde{\psi}_2\rangle\langle\tilde{\psi}_2| + |\tilde{\psi}_3\rangle\langle\tilde{\psi}_3| = I. \quad (149)$$

فرم صریح برداری $|\tilde{\psi}_1\rangle$ ، $|\tilde{\psi}_2\rangle$ و $|\tilde{\psi}_3\rangle$ به شکل زیر هستند:

$$|\tilde{\psi}_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad |\tilde{\psi}_2\rangle = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad |\tilde{\psi}_3\rangle = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (150)$$

در نتیجه فرم صریح عملگرهای $POVM$ به ترتیب زیر است:

$$E_1 = \begin{pmatrix} a_1 \bar{a}_1 & a_1 \bar{b}_1 \\ b_1 \bar{a}_1 & b_1 \bar{b}_1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} a_2 \bar{a}_2 & a_2 \bar{b}_2 \\ b_2 \bar{a}_2 & b_2 \bar{b}_2 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} a_3 \bar{a}_3 & a_3 \bar{b}_3 \\ b_3 \bar{a}_3 & b_3 \bar{b}_3 \end{pmatrix}. \quad (151)$$

فرم صریح شرط (۱۴۹) می شود

$$E_1 + E_2 + E_3 = \begin{pmatrix} a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_2 + a_3\bar{a}_3 & a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 + a_3\bar{b}_3 \\ b_1\bar{a}_1 + b_2\bar{a}_2 + b_3\bar{a}_3 & b_1\bar{b}_1 + b_2\bar{b}_2 + b_3\bar{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (152)$$

که به معنای آن است که ستون های ماتریس زیر تشکیل دو بردار متعامد و یکپه در فضای سه بعدی می دهند:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad (153)$$

براحتی می توان بردار سومی به این دو بردار اضافه کرد که مجموعاً تشکیل سه بردار متعامد و یکپه برای فضای سه بعدی بدهند. از این سه

بردار ماتریس زیر را تشکیل می دهیم

$$U := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (154)$$

در نتیجه شرط زیر برآورده می شود

$$U_{ij}U_{ik}^* = \delta_{ik} \quad (155)$$

که به معنای رابطه $U^\dagger U = I$ است. اما باید ثابت کنیم که رابطه $UU^\dagger = I$ نیز برقرار است. تنها به این ترتیب است که سطرهای ماتریس U نیز بر هم عمود می شوند. برای اثبات این رابطه توجه می کنیم که با توجه به رابطه $U^\dagger U = I$ نتیجه می گیریم که U یک ماتریس با دترمینان مخالف صفر و در نتیجه وارون پذیر است. بنابراین با ضرب دو طرف رابطه $U^\dagger U = I$ در U^{-1} نتیجه می گیریم که $U^\dagger = U^{-1}$ و در نتیجه $UU^\dagger = I$ که همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم. یکانی بودن U به ما اجازه می دهد که سطرهای ماتریس U را نیز به عنوان سه بردار متعامد و یکپه در نظر بگیریم. این سه بردار را با $|u_1\rangle$ ، $|u_2\rangle$ و $|u_3\rangle$ نشان می دهیم:

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad |u_2\rangle = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad |u_3\rangle = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (156)$$

این سه بردار به ترتیب زیر تجزیه می شوند:

$$\begin{aligned} |u_1\rangle &= |\tilde{\psi}_1\rangle + |\tilde{\psi}_1^\perp\rangle \\ |u_2\rangle &= |\tilde{\psi}_2\rangle + |\tilde{\psi}_2^\perp\rangle \\ |u_3\rangle &= |\tilde{\psi}_3\rangle + |\tilde{\psi}_3^\perp\rangle. \end{aligned} \quad (157)$$

به این ترتیب سه برداری را بدست آورده ایم که اولاً متعامد یک‌ه هستند و ثانیاً تصویر آنها در فضای دو بعدی همان بردارهای غیر متعامدی است که اندازه گیری $POVM$ را تعریف می کنند. اندازه گیری تصویری در امتداد این بردارها با عملگرهای تصویر گر زیر تعریف می شود:

$$P_1 = |u_1\rangle\langle u_1|, \quad P_2 = |u_2\rangle\langle u_2|, \quad P_3 = |u_3\rangle\langle u_3|. \quad (158)$$

احتمال بدست آمدن نتیجه m برابر است با

$$P(m) = \text{tr}(P_m \rho P_m) = \langle u_m | \rho | u_m \rangle = \langle \tilde{\psi}_m | \rho | \tilde{\psi}_m \rangle = \text{tr}(E_m \rho). \quad (159)$$

که در آن از این مطلب استفاده کرده ایم که حالت مورد اندازه گیری یعنی ρ برحالت های $|\tilde{\psi}_m^\perp\rangle$ عمود است. به این ترتیب نشان داده ایم اندازه گیری $POVM$ را می توان ناشی از یک اندازه گیری تصویری در فضای بزرگ تر دانست. این محاسبه نشان می دهد که چگونه عملگرهای $POVM$ در فضای V با عملگرهای تصویر گر در فضای بزرگ تر رابطه دارند. هرگاه عملگر تصویر روی فضای V را با P_V نشان دهیم خواهیم داشت:

$$E_m = |\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}| = P_V |u_m\rangle\langle u_m| P_V = P_V P_m P_V. \quad (160)$$

با استفاده از این رابطه می توان حالت نهایی را نیز به شکل زیر بدست آورد.

$$\rho \longrightarrow P_V \rho' P_V \longrightarrow P_V \sum_m P_m \rho P_m P_V = \sum_m E_m \rho E_m^\dagger. \quad (161)$$

اثبات قضیه نویمارک در اینجا کامل می شود.

۸ ضمیمه دو: مسئله اندازه گیری

مسئله اندازه گیری چیست؟ و چرا هنوز یک مسئله حل نشده است؟ چرا گفته می شود که مکانیک کوانتومی یک نظریه ناکامل است؟ چرا گاهی گفته می شود نقش آن چیزی شبیه به ترمودینامیک است و روزی می بایست یک نظریه بنیادی تر مثل مکانیک آماری این نظریه را که به مثابه یک نظریه پدیدارشناسی است توضیح دهد؟ آیا تابع موج یک واقعیت فیزیکی را توضیح می دهد؟ در مکانیک کوانتومی دو نوع تحول وجود دارد، یکی تحول یکانی تابع موج که توسط معادله شرودینگر داده می شود و به خودی خود برای فیزیک دانان چیز غریبی نیست زیرا معادلات ماکسول هم معادلات دیفرانسیل هستند که تحول پیوسته یک کمیت پیوسته و نسبتاً ناملموس را در فضا و زمان توضیح می دهند. اما آنچه که در مکانیک کوانتومی غریب و شگفت انگیز است، این است که نوع دیگری از تحول نیز وجود دارد که کاملاً ناگهانی رخ می دهد و آن رمبش این تابع موج پیوسته به یک نقطه است، آن هم هنگامی که اندازه گیری رخ می دهد و چگونگی آن کاملاً ناشناخته است. ما نمی دانیم رمبش چگونه رخ می دهد، و چه چیزی باعث می شود که تابع موج که تا قبل از اندازه گیری تحولی پیوسته و هموار داشته است، به ناگهان دچار رمبش شود و مقدار آن در همه نقاط به جز یک نقطه صفر شود؟ چه چیزی باعث می شود که تابع موج که در همه نقاط فضا گسترده بود به ناگهان خودش را جمع کند و در یک نقطه رمبیده شود و نه به نقاط دیگر؟ و چرا این رمبش کاملاً تصادفی و احتمالاتی است؟ از ابتدای پیدایش مکانیک کوانتومی دیدگاه غالب این بوده است که می بایست به محاسبه احتمالات گوناگون اکتفا کرد چرا که پرسش از چرایی رمبش تابع موج و این که در واقعیت چه اتفاقی می افتد چندان سازنده نیست. یک دلیل مهم برای غلبه این دیدگاه نیز موفقیت خارخ العاده مکانیک کوانتومی در توضیح بسیاری از پدیده های فیزیک بوده است. اما در عین حال تلاش بسیاری نیز صرف آشتی دادن مکانیک کوانتومی^[۹] با فهم متعارف ما از فیزیک به معنای علمی که هدفش درک کامل پدیده های فیزیکی آنچنان که در واقعیت عالم رخ می دهند، نیز شده است. در ادامه به اختصار به این تلاش ها اشاره می کنیم. هدف اصلی ما این است که دیدگاه های گوناگون برای پدیده رمبش تابع موج را به اختصار توضیح دهیم و به دیگر جنبه های مکانیک کوانتومی نمی پردازیم.

۱.۸ تصویر کپنهاگ

بنابر تفسیر کپنهاگ، ما بواقعیت فیزیکی به طور کامل نمی توانیم دسترسی داشته باشیم. اصل عدم قطعیت نمونه ای از این ناتوانی آنها به طور اصولی است. تنها سؤلهایی معنا دارند که بتوانیم لااقل به صورت ذهنی، آزمایشی برای تعیین پاسخ آنها پیشنهاد کنیم. از آنجا که نمی توانیم آزمایشی برای تعیین همزمان مکان و تکانه ذره پیشنهاد کنیم، پس این دو همزمان واقعیت فیزیکی ندارند. تابع موج نیز نشان دهنده یک واقعیت فیزیکی نیست بلکه عدم دانش ما را در باره نتایج یک آزمایش نشان می دهد. مربع تابع موج $|\psi(x)|^2$ احتمال یافتن ذره را، در یک نقطه مشخص

نشان می دهد، البته به شرطی که آزمایشی برای تعیین این مکان ترتیب بدهیم. وقتی که آزمایش انجام شد، دانش احتمالاتی ما به یقین تبدیل شده و مکان ذره دقیقا معلوم شده و رمبش تابع موج نیز به خوبی این را نشان می دهد. بنابراین هیچ تناقضی بین تحول یکانی و فروریزش تابع موج وجود ندارد. رمبش تابع موج تنها نشان می دهد که دانش ما تغییر یافته است.

۲۰۸ تصویر چندجهانی

تصویر چندجهانی، یک تفسیر جالب و در عین حال شگفت انگیز ارائه می دهد که درک و هضم آن دشوار است. در این تصویر تابع موج واقعیت فیزیکی دارد و اصلا رمبشی رخ نمی دهد. تحول تابع موج نیز یکانی است. اما تابع موج تنها شامل ذره ای که روی آن اندازه گیری شده نیست بلکه شامل دستگاهی که این اندازه گیری را انجام داده و بقیه جهان نیز هست. برای سادگی بیایید فرض کنیم که تنها ذره، دستگاه اندازه گیری و آزمایشگر (من یا آگاهی من) وجود داریم. برای سادگی فرض کنید که تنها اسپین بالا یا پایین یک ذره اسپین $\frac{1}{2}$ را اندازه می گیریم و دستگاه اندازه گیری نیز با یک عقربه مشخص می شود که در دو حالت معین قرار می گیرد و از روی حالت این عقربه می توانیم بگوییم که اسپین ذره بالا بوده است یا پایین. در این تصور تابع موج کل به صورت زیر تحول یکانی یافته است:

$$|\text{Spin}\rangle \otimes |\text{Pointer}\rangle \otimes |\text{Me}\rangle \longrightarrow a|\uparrow\rangle |\text{Pointer} = 0\rangle \otimes |\text{Me}(\text{spin is up})\rangle + b|\downarrow\rangle |\text{Pointer} = 1\rangle \otimes |\text{Me}(\text{spin is down})\rangle$$

که در آن حالتی را به صورت خلاصه زیر نوشته ایم:

$$|\text{Me}(\text{spin is down})\rangle = |\text{Me in the state that knows spin is down}\rangle \quad (۱۶۲)$$

$$|\text{Me}(\text{spin is up})\rangle = |\text{Me in the state that knows spin is up}\rangle. \quad (۱۶۳)$$

مم^۹ن است تصور کنیم که این به معنای وجود همزمان دو جهان موازی است، یک جهان که من در آن اسپین ذره را بالا می بینم و یک جهان دیگر که من در آن اسپین ذره را پایین می بینم. باید دقت کرد که این دو جهان به معنای فیزیکی و کیهانشناسی وجود ندارند، به همان صورتی که وقتی الکترون در یک برهم نهی از اسپین بالا و پایین است به معنای وجود همزمان دو الکترون نیست. بلکه معنایش این است که یک فضای هیلبرت خیلی بزرگ وجود دارد که بردار حالت همه اشیای جهان (در مثال بالا، الکترون، دستگاه اندازه گیری و من یا ذهن من) در آن قرار دارد و تحول هر بردار حالت نیز در این فضای هیلبرت یکانی است. همه تحولات ذرات جهان در این فضای هیلبرت بی نهایت بزرگ رخ می دهد، و همه اشیای جهان، همگی^{۱۰} با هم و به همراه ما در یک برهم نهی عظیم قرار داریم. به عبارت دیگر می توانیم بنویسیم:

$$| = a_1|\text{World}_1\rangle + a_2|\text{World}_2\rangle + a_3|\text{World}_3\rangle + a_4|\text{World}_4\rangle + a_\infty|\text{World}_\infty\rangle \quad (۱۶۴)$$

به این معناست که این تصویر را تصویر چندجهانی می نامند. اصطلاحاً اجزای مختلف این برهم نهی را شاخه ۱۲ می نامند. هرآزمایشی و هر کنش و واکنشی باعث می شود که به تعداد این شاخه ها اضافه شود ولی این به هیچ وجه به معنای خلق جهان های جدید نیست بلکه تنها به این معنا است که جملات جدیدی به این برهم نهی اضافه می شوند. آنچه که درک تفسیر چندجهانی را دشوار می کند این است که باید بپذیریم که ما به عنوان انسانهای دارای آگاهی نیز در یک برهم نهی هستیم. در واقع من « وقتی در حال نوشتن همین کلمات هستم، کپی های هم در دیگر شاخه ها مثل من با کمی تغییر وجود دارد که همین کار را می کنند. این کپی ها در جهان های دیگر و جاهای دیگری از کیهان نیستند بلکه کل کیهان در یک برهم نهی است. به هر حال کل کیهان یک سیستم بس ذره ای است و هر سیستم بس ذره ای نهایتاً بردار حالتی دارد که در یک فضای هیلبرت بزرگ قرار دارد. به همان دلیلی که تابع موج یک الکترون پهنایی دارد و احتمال وجود یک الکترون با احتمال یکسان در این جا و کره ما نیست به همان دلیل هم کپی های من نیز اختلاف خیلی کمی باهم دارند.

۱۰۲۰۸ گربه شرودینگر

از دیدگاه نگرش کپنهاگ هیچ چیز عجیبی در این جا وجود ندارد، چون تابع موج نشان دهنده واقعیت فیزیکی نیست بلکه تنها یک ابزار محاسبه است و شمارنده های فوتونی نیز دستگاه های ماکروسکوپی کلاسیک هستند که در برهم نهی قرار نمی گیرند. تابع موج تنها نشان می دهد که احتمال اینکه فوتون از آینه عبور کند ۵۰ درصد است و احتمال اینکه از آن منعکس شود نیز ۵۰ درصد است. مکانیک کوانتومی و تابع موج این احتمالات را محاسبه می کنند. در نتیجه احتمال اینکه گربه کشته شود ۵۰ درصد است و احتمال اینکه زنده بماند نیز ۵۰ درصد است. همین و بس. از دید نظریه فیزیکی این تفسیر کاملاً سازگار است زیرا در نگرش کپنهاگی مکانیک کوانتومی تنها نتایج آزمایش ها را پیش بینی می کند و کاری به کار واقعیت فیزیکی با هر معنایی که برای آن قائل هستیم ندارد. اما می توان پرسید که بالاخره شمارنده های فوتون نیز از اتم ها ساخته شده اند، بنابراین آنها هم نهایتاً تابع قوانین مکانیک کوانتومی هستند و علی الاصول می توانند در برهم نهی قرار گیرند.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle \otimes |\text{Live cat}\rangle + |1\rangle \otimes |\text{Dead Cat}\rangle] \quad (۱۶۵)$$

در نگرش چند جهانی می گوئیم برهم نهی تا سطح موجود آگاهی که ما هستیم نیز ادامه پیدا می کند و تابع موج بزرگتر به این شکل است:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle \otimes |\text{Live cat}\rangle \otimes |\text{I who see the cat alive}\rangle + |1\rangle \otimes |\text{Dead Cat}\rangle \otimes |\text{I who see the cat Dead}\rangle] \quad (۱۶۶)$$

این نگرش به معنای وجود چند جهان مجزا و موازی نیست. در این تفسیر آنچه که واقعی است خود مولفه های موجود در برهم نهی نیستند بلکه کل تابع موج است که واقعی است.

branch^{۱۲}

۳.۸ وادوسی

از آنجا که سیستم کوانتومی هیچگاه ایزوله نیست، پس هر حالتی که از یک آزمایش حاصل می شود را نمی توان به صورت یک حالت ضربی با محیط در نظر گرفت بلکه همه حالت های مختلف با حالت های متناظر محیط در هم تنیده هستند. از آنجا که حالت های محیط بسیار بزرگ هستند، خیلی زود وادوسی رخ می دهد و این حالت ها تبدیل به یک مخلوط آماری می شوند. در واقع در این دیدگاه به ماتریس چگالی اصالت داده می شود و نه به بردار حالت. ولی این دیدگاه را کسانی مثل راجر پنروز و جان بل دیدگاهی عملگرایانه می دانند نه بنیادی. دلیل اش این است که این دیدگاه به توان تکنولوژی ما در حال حاضر وابسته است. علی الاصول این امکان وجود خواهد داشت که در آینده بتوانیم فاز نسبی حالت محیط و سیستم را تا مدت طولانی تری مشاهده کنیم و به اصطلاح از وادوسی محیط جلوگیری کنیم. به این دلیل است که این نوع نظریه ها را نظریه های عمل گراییانه و به اصطلاح از نوع (FAPP) ^{۱۳} می نامند. این نوع نظریه ها نشان نمی دهند که در واقعیت دقیقاً چه اتفاقی می افتد. به عبارت دیگر می توان سیستم کوانتومی و دستگاه اندازه گیری و محیط موثر در آن را آنقدر ایزوله کرد که این وادوسی اتفاق نیفتد. در نتیجه در آن حالت هیچ نوع فروکاهش تابع موج نخواهیم داشت.

$$|\phi\rangle_S |p\rangle_M |0\rangle_E \longrightarrow \sum_k |\phi_k\rangle_S |p_k\rangle |k\rangle_E \quad (۱۶۷)$$

یک دیدگاه بنیادی شبیه به این هم این است که بگوییم در مقیاس های خیلی ریز، از مرتبه طول پلانک $10^{-35} m$ فضا زمان ساختار پیوسته و همواری ندارد و افت و خیزهای فضازمان یا به اصطلاح کف فضا زمان ^{۱۴} باعث رمبش تابع موج می شوند.

^{۱۳} For all Practical Purposes
^{۱۴} Spacetime foam