

مسایل سری سوم - درس اطلاعات کوانتومی

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲ فروردین ۱۴۰۰

تنها حل مسایلی را که با سه ستاره مشخص شده اند در موعد تعیین شده تحویل دهید.

■ سه دوست به یک بازی شیر یا خط مشغولند. برنده کسی است که اولین نفری باشد که سکه او خط می شود. و در آن موقع بازی تمام می شود. احسان نفر اولی است که سکه می اندازد، بابک نفر دوم و پوپک نفر سوم و بازی به همین ترتیب ادامه می یابد. حساب کنید که احتمال اینکه هر کدام از این سه نفر برنده بازی شود چقدر است. اگر این بازی با N نفر انجام شود، احتمالات فوق چگونه اند.

■ در یک مسابقه تلویزیونی به شرکت کننده پیشنهاد می شود که یکی از سه جعبه را برای خود بردارد. از این سه جعبه تنها یکی حاوی یک جایزه بزرگ است و دو جعبه دیگر خالی هستند. وقتی که شرکت کننده جعبه را برمی دارد، (بدون اینکه البته آن را باز کند) مجری مسابقه یک جعبه خالی از دو جعبه دیگر را به او نشان می دهد و به شرکت کننده این شانس را می دهد که در صورت تمایل جعبه خود را با جعبه سوم عوض کند. بسیاری از شرکت کنندگان جعبه خود را عوض نمی کنند. کسی که با قضیه بیز آشناست چه کار خواهد کرد؟

■ الف: دو کودک را به طور تصادفی در نظر گرفته و به ما گفته اند که حتما یکی از آنها پسر است. احتمال اینکه هر دو پسر باشند چقدر است؟

ب: دو کودک را به طور تصادفی در نظر گرفته و به ما گفته اند که حتما یکی از آنها پسری به نام احسان است. احتمال این که هر دو پسر باشند چقدر است؟

نکته: این مسئله احتیاج به کمی فکر بیشتر از آنچه که به نظر می رسد، دارد.

■ *** یک بازی تلویزیونی وجود دارد که در آن به یک تیم متشکل از سه شرکت کننده سه کارت داده می شود. (هر شرکت کننده یک کارت می گیرد که با احتمال مساوی می تواند سیاه یا سرخ باشد.) هر شرکت کننده کارت را به پیشانی خود می چسباند طوری که دو نفر دیگر می توانند کارت او را ببینند اما خود او نمی تواند کارت خودش را ببیند. هر شرکت کننده می تواند با نگاه کردن به کارت های دو نفر دیگر رنگ کارت خود را حدس بزند و آن را روی یک برگه بنویسد. او هم چنین می تواند از حدس زدن رنگ کارت خود داری کند و به اصطلاح «پاس» کند. تیم وقتی برنده می شود که یکی از دو نتیجه زیر بدست آید:

- الف- حد اقل یک نفر رنگ صحیح کارت خود را حدس بزند یا
- ب- هیچ کسی حدس اشتباه نزند (پاس کردن در این حالت مهم است.)

در این بازی شرکت کنندگان قبل از شروع بازی می توانند یک استراتژی برای خود تعیین کنند اما پس از شروع بازی از حرف زدن بین خود منع می شوند. سوال این است: آیا یک استراتژی وجود دارد که احتمال برد تیم در آن برابر با $\frac{3}{4}$ باشد؟

■ ثابت کنید که هر نوع تغییری در جهت یکنواخت سازی یک تابع توزیع احتمال منجر به افزایش آنتروپی آن می شود. منظور از یکنواخت سازی نیز تبدیل زیر است:

$$P(i) \longrightarrow P'(i) = \sum_j \lambda_{ij} P(j), \quad \sum_j \lambda_{ij} = 1 \quad \forall i. \quad (1)$$

■ *** به خاطر دشواری هایی که در محاسبه آنتروپی شانون وجود دارد در بعضی مواقع از توابع دیگری نیز استفاده می شود که رفتاری شبیه به آنتروپی شانون دارند، از جمله

$$\begin{aligned} L &:= \sum_i P_i(1 - P_i) && \text{Linear Entropy} \\ T &:= \frac{1 - \sum_i P_i^q}{q - 1} && \text{Tsallis Entropy} \\ R &:= \frac{\ln(\sum_i P_i^q)}{1 - q} && \text{Renyi Entropy.} \end{aligned} \quad (2)$$

نشان دهید که :

الف- هر سه نوع آنتروپی مثبت یا بزرگتر از صفر هستند و تنها برای توزیع احتمالی صفر می شوند که یکی از احتمالات برابر با یک و بقیه برابر با صفر باشند.

دو- هر سه نوع آنتروپی مقدار ماکزیمم خود را برای تابع توزیع یکنواخت اختیار می کنند.

سه- اگر آنتروپی شانون را با H نشان دهیم، ثابت کنید که :

$$H \geq L \quad (۳)$$

که در آن تساوی فقط وقتی برقرار می شود که هر دو برابر با صفر باشند.

چهار- نشان دهید که

$$\lim_{q \rightarrow 1} T = H = \lim_{q \rightarrow 1} R. \quad (۴)$$

■ *** درستی رابطه زیر را ثابت کنید.:

$$H(A, B, C) + H(B) \leq H(A, B) + H(B, C) \quad (۵)$$

راهنمایی: نخست نشان دهید که تساوی زیر یک توزیع قابل قبول احتمالات را تعریف می کند:

$$Q(a_i, b_j, c_k) := \frac{P(a_i, b_j)P(b_j, c_k)}{P(b_j)}. \quad (۶)$$

■ *** مثالی از یک تابع توزیع احتمال $P(x, y)$ ارائه دهید که برای بعضی از مقادیر متغیرها داشته باشیم: $P(x | y) \leq P(x)$ و برای

بعضی دیگر داشته باشیم. $P(x | y) \geq P(x)$.

■ *** یک کانال در نظر بگیرید که به صورت زیر عمل می کند:

$$P(0|0) = 1 - p, \quad P(1|1) = 1 - q. \quad (۷)$$

آترامبل های ورودی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$X_0 := \{P(0) = 1/2, P(1) = 1/2\}, \quad X_1 := \{Q(0) = 1/3, Q(1) = 2/3\}. \quad (۸)$$

الف: درستی رابطه تحدب را برای اطلاعات متقابل تحقیق کنید.

ب: هرگاه که در مقصد، گیرنده رشته خروجی 000 را دریافت کند حساب کنید که احتمال اینکه در مبداء هرکدام از رشته های $x_1x_2x_3$ ارسال شده باشند چقدر است؟

■ *** در الفبای انگلیسی حرف Z کمترین فرکانس را دارد و احتمال یافتن آن در متن های انگلیسی برابر است با $P(z) = 0.074$.

الف: احتمال اینکه در یک متن که دارای N حرف است، تعداد k حرف z حضور داشته باشد چقدر است؟

ب: احتمال اینکه این تعداد از تعداد متوسط به اندازه کمتر از دو واریانس فاصله داشته باشد چقدر است؟

راهنمایی: می توانید از توزیع دوجمله ای یا توزیع پواسون که حد توزیع دوجمله ای برای وقتی است که $p < 1$ باشد استفاده کنید.

جواب قسمت ب را برای وقتی که $N = 100,000$ است بدست آورید.

■ *** الفبای زیر را در نظر بگیرید:

$$P(A) = 1/3 \quad P(B) = 1/3 \quad P(C) = 1/6 \quad P(D) = 1/6$$

داده شده است را در نظر بگیرید.

الف: می خواهیم که احتمال کل رشته های نمونه از 0.95 بیشتر باشد. حساب کنید که تا چند تا واریانس نسبت به متوسط تعداد حروف را می بایست جز رشته های نمونه در نظر بگیریم؟

ب: اگر طول رشته ها برابر با 100 باشد، حدود بالا و پایین را برای تعداد کل رشته های نمونه حساب کنید. حساب کنید که این رشته ها را با چند تا بیت می توانیم کد کنیم یعنی چقدر می توانیم آنها را فشرده کنیم.

ج: مقدار فشرده سازی را برای وقتی که طول رشته ها برابر با 500 است نیز حساب کنید.