

مسایل سری ششم - درس اطلاعات کوانتومی

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۸ خرداد ۱۴۰۰

تنها حل مسایلی را که با سه ستاره مشخص شده اند در موعد تعیین شده تحویل دهید.

■ برای دو حالت خالص در یک فضای هیلبرت دلخواه $P_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ و $P_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ نشان دهید که

$$\|P_1 - P_2\|_{tr} = 2\sqrt{1 - \text{Tr}(P_1 P_2)}. \quad (1)$$

■ *** دو حالت خالص $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ در نظر بگیرید. این دو حالت با احتمالات یکسان تولید شده و به دست ما می رسند و هدف ما این است که بدون ابهام تشخیص دهیم که کدام حالت به دست ما رسیده است. نشان دهید که احتمال موفقیت همواره به صورت زیر محدود می شود:

$$P_{success} \leq 1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|. \quad (2)$$

■ نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E} : L(H_A) \longrightarrow L(H_A) \otimes L(H_B), \quad \mathcal{E}(\rho) = \rho \otimes \xi \quad (3)$$

که در آن ξ یک حالت معین در فضای هیلبرت H_B است. آیا این نگاشت یک نگاشت کاملاً مثبت و رد نگهداراست؟ اگر چنین است عملگرهای کراوس مربوط به آن کدام است؟

■ *** الف: فرض کنید که X یک ماتریس $d \times d$ مثبت باشد (یعنی $X \geq 0$). هم چنین فرض کنید که Y یک ماتریس $d \times d'$ باشد. نشان دهید که $XY^\dagger XY$ یک ماتریس مثبت است.

ب: نشان دهید که اگر ماتریس های مثبت X و Y با هم جابجا شوند، آنگاه ماتریس

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

نیز یک ماتریس مثبت است.

■ *** با ذکر یک مثال نشان دهید X و Y دو ماتریس مثبت باشند، ماتریس $X + Y$ الزاما مثبت نیست.

■ با انتخاب یک پایه متعامد و یک فضای عملگرهای خطی مثل E_r می توانیم یک کانال را به صورت زیر نیز بنویسیم:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_n A_n \rho A_n^\dagger = \sum_{r,s} \chi_{r,s} E_r \rho E_s^\dagger. \quad (۴)$$

این نوع نمایش کانال را نمایش χ ^۱ می خوانند. نشان دهید که نمایش χ در یک پایه خاص بر خلاف نمایش کراوس یکتاست.

■ نشان دهید که برای یک کانال کوانتومی، ماتریس χ یک ماتریس مثبت است و رد آن برابر با یک است.

■ *** آنتروپی فانو^۲ به صورت زیر یعنی منهای لگاریتم خلوص یک حالت تعریف می شود:

$$F(\rho) := -\log \text{Tr}(\rho^2). \quad (۵)$$

الف: مقدار می نیمم و ماکزیمم این کمیت را حساب کنید و آن را با مقادیر مربوطه برای آنتروپی فون نیومان مقایسه کنید.

ب: نشان دهید که

$$S(\rho) \geq F(\rho). \quad (۶)$$

^۱ χ -representation
^۲ Fano Entropy

■ *** الف: تحت چه شرایطی انتروپی نسبی بین دو حالت یعنی $S(\rho \parallel \sigma)$ به بی نهایت می رسد؟

ب: اگر $S(\rho \parallel \sigma)$ بی نهایت باشد، آیا می توان نتیجه گرفت که $S(\sigma \parallel \rho)$ هم بی نهایت است؟

■ *** از نامساوی کلاین استفاده کنید و نشان دهید که انتروپی نسبی کوانتومی یک کمیت مثبت است.

■ ترکیب زیر را از انتروپی های فون نویمان در نظر بگیرید:

$$S_p = S[p\sigma + (1-p)\rho] - pS(\sigma) - (1-p)S(\rho) \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (7)$$

الف: نشان دهید که $S_p \geq 0$.

ب: مشتق S_p را در نقاط $p=0$ و $p=1$ را حساب کنید و آنها را با $S(\sigma \parallel \rho)$ و $S(\rho \parallel \sigma)$ مقایسه کنید.

■ *** حالت ورنر را به صورت $W_p = (1-p)|\psi^-\rangle_{AB}\langle\psi^-| + \frac{p}{4}I_{AB}$ در نظر بگیرید. برای کدام مقدار p تساوی های زیر برقرار می شود؟

$$S(A, B) = S(A) + S(B)$$

$$S(A, B) = |S(A) - S(B)|. \quad (8)$$

■ آلیس آزمایشی از حالت ها را با احتمالات داده شده در زیر برای باب می فرستد:

$$\mathcal{E} = \{|0\rangle\langle 0|(\frac{1}{2}), |+\rangle\langle +|(\frac{1}{2})\}. \quad (9)$$

باب یک اندازه گیری متعامد و دو حالت با تصویرگرهای $P_+ = |n, +\rangle\langle n, +|$ و $P_- = |n, -\rangle\langle n, -|$ روی حالت های دریافتی انجام می دهد. میزان اطلاعات قابل حصول برای باب را به عنوان تابعی از جهت n بدست آورید. به ازای کدام جهت این اطلاعات بیشینه می شود. این اطلاعات را با کمیت هول و مقایسه کنید؟

■ *** حالت زیر را در که بخش مربوط به کمیت هول و ساختم در نظر بگیرید. $\{E_y\}$ اندازه گیری باب را مشخص می کنند.

$$\rho'_{ABC} = \sum_{x,y} p_x |x\rangle\langle x| \otimes \sqrt{E_y} \rho_x \sqrt{E_y} \otimes |y\rangle\langle y|. \quad (10)$$

نشان دهید که انتروپی نسبی $S(\rho'_{ABC} \parallel \rho_A \otimes \rho'_{BC})$ همان اطلاعات متقابل آلیس و باب است.