Solution of mid-term 1 problems

1402

■ مسئله اول : مثالی از یک تابع توزیع احتمال $P(x,y)$ ارائه دهید که برای بعضی از مقادیر متغیرها داشته باشیم: $P(x \mid y) \leq P(x)$ و برای بعضی دیگر داشته باشیم $P(x \mid y) \geq P(x)$. برای مثالی که ارایه می کنید، مقادیر زیر را حساب کنید:

$$H(X), \qquad H(X|Y), \qquad I(X:Y). \tag{۱}$$

We construct the following simple example. Let $P(x,y)$ be defined as follows:

$x \backslash y$	0	1
0	α	β
1	β	$1-\alpha-2\beta$

We want $P(x|y) \leq P(x)$ for some pairs &

$P(x|y) > P(x)$ for some others.

This means that $\begin{cases} P(x,y) \leq P(x)P(y) & \text{for some pairs.} \\ P(x,y) > P(x)P(y) & \text{\& for some others.} \end{cases}$

Let $\begin{cases} P(0,0) \leq P_x(0)P_y(0) \\ P(1,1) < P_x(1)P_y(1) \end{cases}$ & $\begin{cases} P(0,1) \geq P_x(0)P_y(1) \\ P(1,0) > P_x(1)P_y(0) \end{cases}$

We have: $P_x(0) = \alpha+\beta$ $\quad P_y(0) = \alpha+\beta$ $\quad P(0,0)=\alpha \quad P(0,1)=\beta$

$P_x(1) = 1-\alpha-\beta$ $\quad P_y(1) = 1-\alpha-\beta$ $\quad P(1,0)=\beta \quad P(1,1)=1-\alpha-\beta$

We want: $\begin{cases} \alpha \leq (\alpha+\beta)^2 & ① \\ 1-\alpha-\beta \leq (1-\alpha-\beta)^2 & ② \end{cases}$ & $\begin{cases} (\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta) > \beta. & ③ \\ (\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta) > \beta. \end{cases}$

From 3 $\rightarrow$ $\beta < \alpha+\beta-(\alpha+\beta)^2 \rightarrow (\alpha+\beta)^2 < \alpha$ (4)

(1) & (4) $\rightarrow$ $\alpha = (\alpha+\beta)^2 \rightarrow \alpha^2 + (2\beta-1)\alpha + \beta^2 = 0 \rightarrow$

$\alpha = \dfrac{1-2\beta \pm \sqrt{(1-2\beta)^2 - 4\beta^2}}{2}$ For α to be real $\rightarrow (1-2\beta)^2 - 4\beta^2 > 0$

$\rightarrow 1-4\beta > 0 \rightarrow \beta \le 1/4 \rightarrow$ let $\boxed{\beta = \frac{1}{8} \rightarrow \alpha = \frac{3}{8} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}$

Calculation of $H(X)$, $H(Y)$ and $H(X,Y)$ is straightforward.

■ مسئله دوم: تمرین: فرض کنید که یک متن از حروف زیر با احتمالات نوشته شده تشکیل شده است. یک کد بهینه برای این حروف بنویسید به نحوی که هم طول متوسط پایین باشد و هم رشته ای صفر و یک ها به صورت یکتا به حروف نگاشته شود.

$$P(A) = \frac{1}{128} \quad P(B) = \frac{1}{128} \quad P(C) = \frac{1}{64} \quad P(D) = \frac{1}{32}$$
$$P(E) = \frac{1}{16} \quad P(F) = \frac{1}{8} \quad P(G) = \frac{1}{4} \quad P(H) = \frac{1}{2} \qquad (۲)$$

$\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7 \rightarrow$

$H \rightarrow 0$ $\qquad D \rightarrow 11110$

$G \rightarrow 10$ $\qquad C \rightarrow 111110$

$F \rightarrow 110$ $\qquad B \rightarrow 1111110$

$E \rightarrow 1110$ $\qquad A \rightarrow 1111111$

■ مسئله سوم: در کد هامینگ که با مشخصات $[7,4,3]$ تعیین می شود نرخ مخابره اطلاعات و هم چنین احتمال خطا را تعیین کنید.

the Hamming code has the following generator matrix:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

It codes 3 bits into 7 bits. So it's rate is $R = \frac{3}{7}$.

It corrects one bit of error, since it has distance $d=3$. If the probability of one bit flip $= p \rightarrow$ probability of correctable errors $= 7p(1-p)^6$

probability of no-error $= (1-p)^7 \rightarrow$

$\rightarrow$ probability of non-correctable error $= 1 - 7p(1-p)^6 - (1-p)^7$

$= 1-(1-p)^6[7p+1-p] = 1-(1-p)^6(1+6p)$. If for example

$p = 0.1 \rightarrow \boxed{P_{error} = 0.147}$

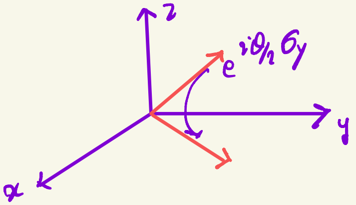
■ مسئله چهارم : یک کانال پاوولی متقارن به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-2P_0-P_1)\,\rho + P_0 X\rho X + P_1 Y\rho Y + P_0 Z\rho Z, \qquad (۳)$$

که در آن X, Y, Z ماتریس های پاوولی هستند. از میان تمام حالت های خالص ورودی ، حالتی را پیدا کنید که آنتروپی حالت خروجی این کانال را کمینه کند.

Since $P_x = P_z$, we have rotation symmetry in the x-z plane $\rightarrow$

this channel has covariance: $\mathcal{E}(U\rho U^\dagger) = U\mathcal{E}(\rho)U^\dagger$ for $U = e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_y}$.



so if $|\psi\rangle$ is the minimum output entropy (MOE) state $\rightarrow$ $e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_y}|\psi\rangle$ is also an

MOE state. $\rightarrow$ Equivalently, we can choose U so that $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

always lies in the x-y plane. $\rightarrow$ $\rho = \frac{1}{2}(1 + x\sigma_x + y\sigma_y)$ where

$x^2 + y^2 = 1$ (since the state is pure). $\rightarrow$

So $\rightarrow$ $\mathcal{E}(\rho) = (1-2P_0-P_1)\rho + P_0(X\rho X + Z\rho Z) + P_1 Y\rho Y$ this corresponds to

the bloch vectors: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{2}(1 + \vec{r}.\vec{\sigma})$ where $\vec{r} = (1-2P_0-P_1)\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + P_0 \begin{bmatrix} 0 \\ -2y \\ 0 \end{bmatrix} + P_1 \begin{bmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \vec{r} = \begin{bmatrix} (1-2P_0-2P_1)x \\ (1-4P_0)y \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow |\vec{r}| = (1-2P_0-2P_1)^2 x^2 + (1-4P_0)^2 y^2$$

$$= (1-2P_0-2P_1)^2 x^2 + (1-4P_0)^2(1-x^2)$$

$$\rightarrow |\vec{r}| = (1-4P_0)^2 + \left[(1-2P_0-2P_1)^2 - (1-4P_0)^2\right] x^2$$

A minimum output entropy state has a maximum $|\vec{r}|$. So if

$$\text{if} \begin{cases} (1-2P_0-2P_1)^2 > (1-4P_0)^2 \longrightarrow x=1 \longrightarrow |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (1-2P_0-2P_1)^2 \leq (1-4P_0)^2 \longrightarrow x=0 \longrightarrow |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

We can simplify (visualize) the conditions as follows:

if $x^2 = y^2 \longrightarrow \quad x = \pm y \longrightarrow$ so let us find the curves:

$$1 - 2p_0 - 2p_1 = \pm(1 - 4p_0) \longrightarrow \begin{cases} 1 - 2p_0 - 2p_1 = 1 - 4p_0 \\ 1 - 2p_0 - 2p_1 = 4p_0 - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} p_1 = p_0 \\ 1 - p_1 = 3p_0 \end{cases}$$