Solution of Mid-term 2 problems

1402

■ مسئله اول: در فضای d بعدی ، حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\rho = \frac{\lambda}{2}(|\psi\rangle\langle\psi| + |\phi\rangle\langle\phi|) + \frac{1-\lambda}{d} I_d, \tag{۱}$$

که در آن $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ دو حالت غیرمتعامد هستند. آنتروپی فون نویمان برای حالت ρ را برحسب بعدِ d ، پارامترِ λ و زاویه بین بردارهای $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ حساب کنید. و صحت نامساوی زیر رادر مورد آن تحقیق کنید:

$$\left(\frac{\lambda}{2}S(\rho_1) + \frac{\lambda}{2}S(\rho_2) + (1-\lambda)S(\frac{I_d}{d})\right) \leq S(\rho). \tag{۲}$$

- without loss of generality we can take the basis vectors $|0\rangle$ and $|1\rangle$ such that:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

$$|\varphi\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|0\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad \longrightarrow \langle\varphi|\psi\rangle = \sin\theta$$

$$\rightarrow \rho = \frac{\lambda}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sin\theta \\ \sin\theta & 1 \end{bmatrix} + \frac{1-\lambda}{d} I_d = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{d} & \frac{\lambda}{2}\sin\theta \\ \frac{\lambda}{2}\sin\theta & \frac{\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{d} \end{bmatrix} \oplus \frac{1-\lambda}{d} I_{d-2}$$

the eigenvalues of the two dimensional matrix are:

$$\lambda_\pm = \frac{1-\lambda}{d} + \frac{\lambda}{2}(1 \pm \sin\theta)$$

there are also $(d-2)$ eigenvalues equal to: $\lambda = \frac{1-\lambda}{d}$

so $\rightarrow$ $$\boxed{S(\rho) = -(d-2)\frac{1-\lambda}{d}\log\frac{1-\lambda}{d} - \lambda_+\log\lambda_+ - \lambda_-\log\lambda_-} \quad (1)$$

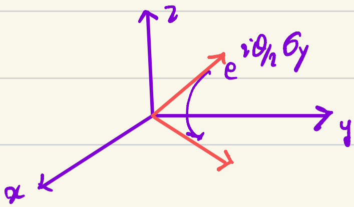
■ مسئله **دوم** : یک کانال پاوولی متقارن به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1 - 2P_0 - P_1)\,\rho + P_0 X\rho X + P_1 Y\rho Y + P_0 Z\rho Z, \qquad (۳)$$

که در آن X, Y, Z ماتریس های پاوولی هستند. از میان تمام حالت های خالص ورودی ، حالتی را پیدا کنید که آنتروپی حالت خروجی این کانال را کمینه کند.

Since $P_x = P_z$, we have rotation symmetry in the x-z plane $\rightarrow$

this channel has covariance: $\mathcal{E}(U\rho U^\dagger) = U\mathcal{E}(\rho)U^\dagger$ for $U = e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_y}$.



so if $|\psi\rangle$ is the minimum output entropy (MOE) state $\rightarrow$ $e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_y}|\psi\rangle$ is also an MOE state. $\rightarrow$ Equivalently, we can choose U so that $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ always lies in the x-y plane. $\rightarrow$ $\rho = \frac{1}{2}(1 + x\sigma_x + y\sigma_y)$ where $x^2 + y^2 = 1$ (since the state is pure). $\rightarrow$

So $\rightarrow$ $\mathcal{E}(\rho) = (1 - 2P_0 - P_1)\rho + P_0(X\rho X + Z\rho Z) + P_1 Y\rho Y$ this corresponds to the bloch vectors:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{2}(1 + \vec{r}\cdot\vec{\sigma})$ where $\vec{r} = (1 - 2P_0 - P_1)\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + P_0 \begin{bmatrix} 0 \\ -2y \\ 0 \end{bmatrix} + P_1 \begin{bmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \vec{r} = \begin{vmatrix} (1-2P_0-2P_1)x \\ (1-4P_0)y \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow |\vec{r}| = (1-2P_0-2P_1)^2 x^2 + (1-4P_0)^2 y^2$$

$$= (1-2P_0-2P_1)^2 x^2 + (1-4P_0)^2 (1-x^2)$$

$$\rightarrow |\vec{r}| = (1-4P_0)^2 + \left[(1-2P_0-2P_1)^2 - (1-4P_0)^2 \right] x^2$$

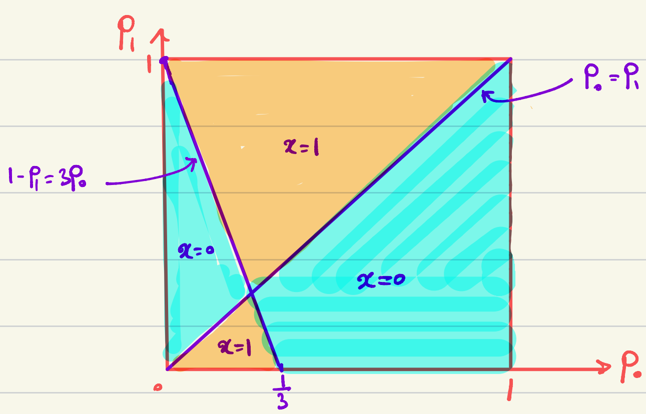
A minimum output entropy state has a maximum $|\vec{r}|$. so if

$$\text{if} \begin{cases} (1-2P_0-2P_1)^2 > (1-4P_0)^2 \longrightarrow x=1 \longrightarrow |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (1-2P_0-2P_1)^2 \leq (1-4P_0)^2 \longrightarrow x=0 \longrightarrow |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

We can simplify (visualize) the conditions as follows:

if $x^2 = y^2 \rightarrow x = \pm y \rightarrow$ So let us find the curves:

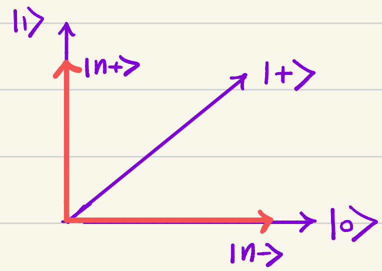
$$1-2P_0-2P_1 = \pm(1-4P_0) \rightarrow \begin{cases} 1-2P_0-2P_1 = 1-4P_0 \\ 1-2P_0-2P_1 = 4P_0-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1 = P_0 \\ 1-P_1 = 3P_0 \end{cases}$$



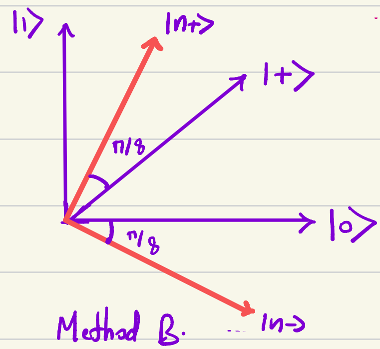
■ مسئله سوم: آلیس آنزامبلی از حالت ها را با احتمالات داده شده در زیر برای باب می فرستد:

$$\mathcal{E} = \{|0\rangle\langle 0|(\frac{1}{2}), \quad ,|+\rangle\langle +|(\frac{1}{2})\}. \qquad (۴)$$

باب یک اندازه گیری متعامد و دو حالته با تصویرگرهای $P_+ = |n,+\rangle\langle n+|$ و $P_- = |n,-\rangle\langle n,-|$ روی حالت های دریافتی انجام می دهد. میزان اطلاعات قابل حصول برای باب را به عنوان تابعی از جهت n بدست آورید. به ازای کدام جهت این اطلاعات بیشینه می شود. تحقیق کنید که آیا این اطلاعات از کمیت هوله و کمتر است؟



Method A



Method B.

By symmetry, we only need to consider two Methods, shown in the above figures

let $X = \{+, 0\}$ for Alice $Y = \{+, 0\}$ for Bob..

In Method A: $\rightarrow$

$$P(y=0|x=0) = \langle n-|0\rangle\langle 0|n-\rangle = 1$$
$$P(y=+|x=0) = \langle n+|0\rangle\langle 0|n+\rangle = 0$$
$$P(y=0|x=+) = \langle n-|+\rangle\langle +|n-\rangle = \frac{1}{2}$$
$$P(y=+|x=+) = \langle n+|+\rangle\langle +|n+\rangle = \frac{1}{2}$$

In Method B $\rightarrow$

$$P(y=0|x=0) = \langle n-|0\rangle\langle 0|n-\rangle = \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$P(y=+|x=0) = \langle n+|0\rangle\langle 0|n+\rangle = \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$P(y=0|x=+) = \langle n-|+\rangle\langle +|n-\rangle = \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$P(y=+|x=+) = \langle n+|+\rangle\langle +|n+\rangle = \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- we now calculate $I(X:Y)$ in both methods and compare them.

we need $p(x|y)$ in both cases.

$$p(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)} = \frac{P(y|x)P(x)}{P(y)} = \frac{P(y|x)}{P(y|0)+P(y|+)}$$

In Method A: $\rightarrow$

$$P(x=0|y=0) = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

$$P(x=0|y=+) = 0$$

$$P(x=+|y=0) = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$$

$$P(x=+|y=+) = 1$$

In Method B: $\rightarrow$

$$P(x=0|y=0) = \cos^2\frac{\pi}{8}$$

$$P(x=0|y=+) = \sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$P(x=+|y=0) = \sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$P(x=+|y=+) = \cos^2\frac{\pi}{8}$$

- We calculate $I(X:Y) = H(X) - H(X|Y) = 1 - H(X|Y)$

In Method A: $H(X|Y) = -\sum_{x,y} P(x,y) \log P(x|y)$

$\rightarrow H(X|Y) = -\left\{ \frac{1}{3} \log \frac{2}{3} + 0 + \frac{1}{6} \log \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log 1 \right\}$

$= \frac{-1}{3} \log \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \log \frac{1}{3} = \frac{-1}{3}[1 - \log 3] - \frac{1}{6}[-\log 3]$

$= \frac{1}{2} \log_2 3 - \frac{1}{3} = 0.459 \rightarrow I(X:Y) = 0.541$

In Method B: $H(X|Y) = -\left\{ \cos^2 \frac{\pi}{8} \log_2 \cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} \log_2 \sin^2 \frac{\pi}{8} \right\}$

$\rightarrow H(X|Y) = -\{ 0.853 \log_2 0.853 + 0.147 \log_2 0.147 \} = 0.602$

$\rightarrow I(X:Y) = 0.398$

So Method A yields more information.

■ مسئله چهارم: یک کد کلاسیک از نوع $[k, n, d] = [2, n, 3]$ بسازید.

we use one of the following bounds:

① Hamming bound: $2^k \times \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \leq 2^n$ in our case $k=2$

or $\rightarrow$ $\boxed{4(1+n) \leq 2^n}$

② Singleton bound $k \leq n-d+1 \rightarrow 2 \leq n-3+1 \rightarrow \boxed{2 \leq n-2}$

the smallest n is: $5 \leq n$. Let us take $n=5$. $\rightarrow$

	x		y
trial and error: $\rightarrow$	0 0	$\rightarrow$	0 0 0 0 0
	0 1	$\rightarrow$	1 1 1 0 0
	1 0	$\rightarrow$	0 0 1 1 1
	1 1	$\rightarrow$	1 1 0 1 1