انتگرال مسیر در مکانیک کوانتومی و نظریه میدان کوانتومی

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۱۹ آذر ۱۳۹۴

۱ مقدمه

روش انتگرال مسیر که نخستین بار در مکانیک کوانتومی فرمول بندی شد، در سالهای بعد به تدریج اهمیت و کارآیی خود را در نظریه میدان ، چه در فرمول بندی آن و چه در محاسبات تکنیکی غیر اختلالی اش، و هم چنین در فیزیک ماده چگال نشان داد. در این درس و درس آینده ما به اختصار به معرفی این فرمول بندی و بعضی از جنبه های محاسباتی و فنی آن می پردازیم. فرض این است که خواننده این درس با مقدمات انتگرال مسیر در مکانیک کوانتومی آشناست. بنابراین مرور ما از انتگرال مسیر خلاصه خواهد بود. نخست نشان می دهیم که چگونه دامنه گذار از یک حالت کوانتومی به یک حالت کوانتومی دیگر را می توان به صورت انتگرال کنش کلاسیک روی همه مسیرهای ممکن نوشت. سپس این ارتباط را به نظریه میدان تعمیم می دهیم. دست آخر نشان می دهیم که چگونه انتگرال مسیر حلقه ارتباط بین مکانیک آماری و مکانیک کوانتومی نیز هست.

۲ صورت بندی انتگرال مسیر برای مکانیک کوانتومی

فرض کنید که یک ذره تحت اثر هامیلتونی H قرار دارد. درلحظه t این ذره درست درمکان q قرار دارد و حالت آن $|q\rangle$ است. می خواهیم بدانیم که درزمان t' دامنه احتمال این که ذره در نقطه q' باشد چقدراست. درصورت بندی مکانیک کوانتومی می دانیم که این دامنه برابر است با:

$$\langle q'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|q\rangle \tag{۱}$$

دانستن این کمیت معادل با این است که دینامیک کوانتومی را به طور کامل مشخص کنیم. در واقع احتمال گذار از یک حالت دلخواه $|\psi\rangle$ به یک حالت دلخواه دیگر $|\psi'\rangle$ به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}\langle\psi'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|\psi\rangle &= \int dq'dq\langle\psi'|q'\rangle\langle q'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|q\rangle\langle q\psi\rangle \\ &= \int dq'dq\psi'^*(q')\langle q'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|q\rangle\psi(q).\end{aligned} \tag{۲}$$

قبل از ادامه ، نخست قرار دارهای خود را مشخص می کنیم:

$$q_N := q', \quad q_0 := q, \quad t_N := t', \quad t_0 := t, \quad t'-t := N\epsilon, \quad t_k := t_0 + k\epsilon \tag{۳}$$

حال می توانیم بنویسیم:

$$\langle q'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|q\rangle = \langle q_N|e^{-\frac{i}{\hbar}NH\epsilon}|q_0\rangle = \int dq_1dq_2\cdots dq_{N-1}\langle q_N|e^{-\frac{i}{\hbar}H\epsilon}|q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}|e^{-\frac{i}{\hbar}H\epsilon}|q_{N-2}\rangle\cdots\langle q_1|e^{-\frac{i}{\hbar}H\epsilon}|q_0\rangle \tag{۴}$$

حال یکی از عناصر ماتریسی را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned}&\langle q_k|e^{-\frac{i}{\hbar}H\epsilon}|q_{k-1}\rangle \approx \langle q_k|1-\frac{i}{\hbar}H\epsilon|q_{k-1}\rangle \\ =\;& \delta(q_k-q_{k-1}) - \frac{i\epsilon}{\hbar}\langle q_k|H|q_{k-1}\rangle = \delta(q_k-q_{k-1})(1-\frac{i\epsilon}{\hbar}V(q_k)) - \frac{i\epsilon}{\hbar}\langle q_k|\frac{p^2}{2m}|q_{k-1}\rangle \\ =\;& \delta(q_k-q_{k-1})(1-\frac{i\epsilon}{\hbar}V(q_k)) - \frac{i\epsilon}{\hbar}\int\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}p(q_k-q_{k-1})} \\ =\;& \int\frac{dp}{2\pi\hbar}(1-\frac{i\epsilon}{\hbar}(V(q_k)+\frac{p^2}{2m}))e^{\frac{i}{\hbar}p(q_k-q_{k-1})} \\ \approx\;& \int\frac{dp}{2\pi\hbar}e^{\frac{-i\epsilon}{\hbar}(V(q_k)+\frac{p^2}{2m})+\frac{i}{\hbar}p(q_k-q_{k-1})}\end{aligned} \tag{۵}$$

درعبارت آخری روی p انتگرال می گیریم و از رابطه

$$\int dp e^{i\frac{1}{2}\alpha p^2+i\beta p}=\sqrt{\frac{2\pi}{i\alpha}}e^{\frac{i\beta^2}{\alpha}} \tag{۶}$$

استفاده می کنیم و بدست می آوریم:

$$\langle q_k|e^{-\frac{i}{\hbar}H\epsilon}|q_{k-1}\rangle=Ce^{\frac{i\epsilon}{\hbar}\left(\frac{m}{2}(\frac{q_k-q_{k-1}}{\epsilon})^2-V(q_k)\right)} \tag{۷}$$

که درآن $C=\sqrt{\frac{m}{2\pi\epsilon i\hbar}}$. دقت کنید که C یک عدد ثابت است که بستگی به ثابت های ϵ $\hbar$ و m و نظایر آن دارد ولی به متغیرهای دینامیکی و زمان هاو نوع پتانسیل بستگی ندارد.

با قراردادن 5 در رابطه 1 و گرفتن حد $N\longrightarrow\infty,\quad \epsilon\longrightarrow 0, N\epsilon=t'-t$ درمی یابیم که:

$$\langle q'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|q\rangle=\int Dq\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'}L(q(\tau),\dot{q}(\tau),\tau)dt} \tag{۸}$$

که درآن شرط روی تمام مسیر های با شرایط مرزی $q(t)=q,\quad q(t')=q'$ انتگرال گرفته می شود. دراین عبارت منظور از Dq عبارت زیر است :

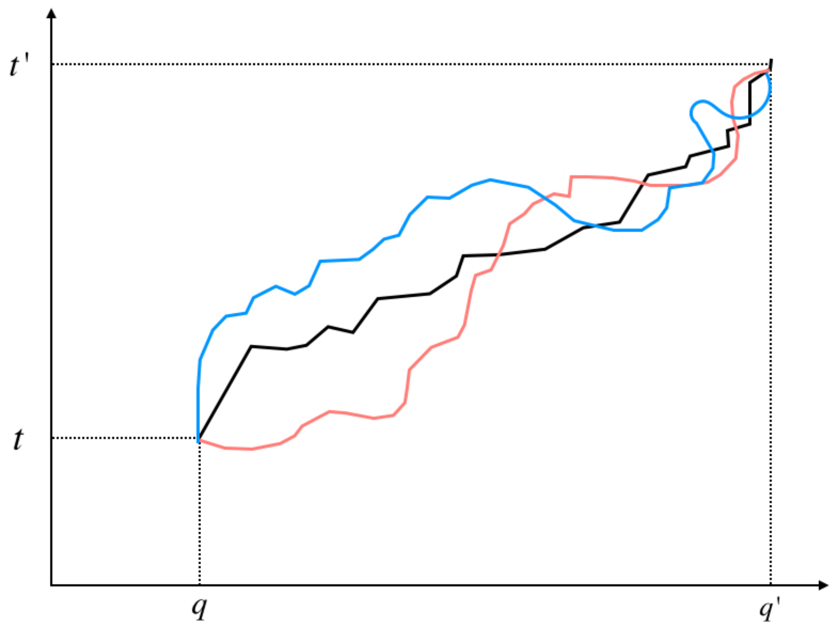
$$Dq=\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}C^N\prod_{i=1}^{N}dq_i \tag{۹}$$

باید دقت کنیم که این انتگرال روی تمام مسیرهایی گرفته می شود که ابتدا و انتهای آنها در دو نقطه مشخص از مختصات ثابت هستند. این قید روی اندازه انتگرال یعنی عبارت (۸۲) منعکس می شود. اگر قرار دهیم $t'=t$ با توجه به اینکه تحت این شرایط کنش برابر با صفر می شود، از رابطه ی (۸) بدست می آوریم:

$$\delta(q-q')=\int Dq. \tag{۱۰}$$

حاصل نهایی این محاسبه یک نگاه جدید به پدیده های مکانیک کوانتومی است و آن این که یک ذره کوانتومی که برای راحتی آن را الکترون می نامیم، برای رفتن از یک نقطه مثل q به یک نقطه دیگر مثل q' همه مسیرهای ممکن را ممکن است طی کند و هر مسیری مثل $q(t)$ را با دامنه احتمال $e^{i\frac{1}{\hbar}S[q]}$ می کند و دامنه احتمال نهایی مجموع تمامی این احتمالات است. تمام این مسیرها نیز نقطه ابتدا و انتهایشان ثابت و به ترتیب برابر با q و q' است. شکل (۱).) در فرمالیزم انتگرال مسیر می توانیم احتمال گذار از هر حالت دلخواه به هر حالت دلخواه دیگری را محاسبه کنیم. نتیجه این است که:

$$\langle\psi'|e^{-iH(t'-t)}|\psi\rangle=\int Dq\psi'(q')^*\psi(q)e^{i\int_t^{t'}L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau} \tag{۱۱}$$



شکل ۱: در فرمالیزم انتگرال مسیر ذره تمام مسیرهای قابل تصور بین دو نقطه را هرکدام با یک دامنه احتمال معین، می پیماید.

که در آن انتگرال روی تمام مسیرهایی گرفته می شود که در لحظه t شروع شده و در لحظه t' ختم می شوند ولی ابتدا و انتهای این مسیر هر نقطه ای می تواند باشد، شکل (۲) .

بدیهی است که آنچه که در تا کنون گفته ایم به راحتی به حرکت یک ذره در سه بعد یا حرکت هر سیستمی (هر چقدر هم پیچیده) که آنالوگ کلاسیکی داشته باشد تعمیم پیدا می کند. می توانیم با تعریف حالت های زیر

$$|q,t\rangle := e^{-i\frac{1}{\hbar}Ht}|q\rangle \quad (۱۲)$$

که در واقع حالت هایی هستند که معمولا در تصویر هایزنبرگ تعریف می شوند رابطه اصلی انتگرال مسیر را به صورت زیر

بنویسیم:

$$\langle q',t'|q,t\rangle \equiv \langle q'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|q\rangle = \int Dq\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} L(q(\tau),\dot{q}(\tau),\tau)dt} \tag{۱۳}$$

در این صورت واضح است که شرط زیر برقرار است:

$$\langle q'',t''|q,t\rangle = \int dq' \langle q'',t''|q',t'\rangle\langle q',t'|q,t\rangle. \tag{۱۴}$$

- تمرین: کمیتِ $\langle q',t'|q,t\rangle$ انتشارگر ذره [۱] خوانده می شود. انتشارگر را برای ذره آزاد در یک بعد به دو روش محاسبه کنید: روش اول: از طریق محاسبه عملگر هامیلتونی و روش دوم: از طریق انتگرال مسیر.

- تمرین: کمیتِ $\langle q',t'|q,t\rangle$ را برای نوسانگر هارمونیک یک بعدی با فرکانس ω به دو روش حساب کنید. روش اول: از طریق محاسبه عملگر هامیلتونی و روش دوم: از طریق انتگرال مسیر.

حال فرض کنید که می خواهیم عنصر ماترسی زیر را حساب کنیم:

$$\langle q'|e^{-i\frac{1}{\hbar}H(t'-t_1)}\hat{Q}e^{-i\frac{1}{\hbar}H(t_1-t)}|q\rangle. \tag{۱۵}$$

این عبارت به نوعی متوسط عملگر مکان در زمانِ t_1 است وقتی که ذره از حالت $|q\rangle$ در زمان t به حالتِ $|q'\rangle$ در زمان t' می رود. در فرمالیزم انتگرال مسیر این عبارت فرم ساده ای پیدا می کند. داریم:

$$\langle q'|e^{-i\frac{1}{\hbar}H(t'-t_1)}\hat{Q}e^{-i\frac{1}{\hbar}H(t_1-t)}|q\rangle = \langle q',t'|\hat{Q}(t_1)|q,t\rangle \tag{۱۶}$$

که درآن $Q(t)$ عملگر Q درتصویر هایزنبرگ است یعنی :

$$\hat{Q}(t) = e^{iHt}\hat{Q}e^{-iHt} \tag{۱۷}$$

با محاسبات مشابه آنچه که در بالا بیان شد می توان نشان داد:

$$\langle q',t'|\hat{Q}(t_1)|q,t\rangle = \int Dq\ q(t_1)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau} \tag{۱۸}$$

[۱] Propagator

که درآن روی تمام مسیر هایی انتگرال گرفته می شود که شرط مرزی $q(t) = q$ و $q(t') = q'$ را برآورده می کنند. این رابطه در واقع بیان می کند که ذره وقتی که تمام مسیرهای ممکن را از q به q' ، هرکدام با احتمال مخصوص به خود پیموده است، در زمان t_1 به طور متوسط در چه مکانهایی بوده است. به این ترتیب یک متوسط کوانتم مکانیکی نیز به یک متوسط روی تمام مسیرهای کلاسیک مرتبط شده است. علاوه بر متوسط ها می توانیم این رابطه را بین توابع همبستگی نیز برقرار کنیم. به عنوان مثال تابع همبستگی زیر را در نظر بگیرید ($\hbar$ را برابر با یک در نظر گرفته ایم) :

$$\langle q', t'|\hat{Q}(t_2)\hat{Q}(t_1)|q, t\rangle \equiv \langle q'|e^{-i(t'-t_2)H}\hat{Q}e^{-i(t_2-t_1)H}\hat{Q}e^{-i(t_1-t)H}|q\rangle \tag{۱۹}$$

این رابطه بیان می کند که چه مقدار همبستگی بین مکان هایی که ذره در لحظه t_1 اختیار می کند با مکان هایی که در لحظه ی t_2 اختیار می کند و جود دارد؟ این تابع همبستگی را نیز می توانیم به روش انتگرال مسیر حساب کنیم. نتیجه عبارت است از:

$$\langle q', t'|\hat{Q}(t_2)\hat{Q}(t_1)|q, t\rangle = \int Dq\ q(t_2)\ q(t_1)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau} \tag{۲۰}$$

که درآن روی تمام مسیر هایی انتگرال گرفته می شود که شرط مرزی $q(t) = q$ و $q(t') = q'$ را برآورده می کنند.

در عبارت فوق به یک نکته باید دقت کنیم.

کل عبارت (۱۹) با این فرض اولیه حساب شده که $t_2 \geq t_1$ است. بنابراین عبارتِ (۲۰) را یا می بایست به صورت زیر نوشت:

$$\langle q', t'|\hat{Q}(t_2)\hat{Q}(t_1)|q, t\rangle = \int Dq\ q(t_2)\ q(t_1)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau} \qquad t_2 \geq t_1 \tag{۲۱}$$

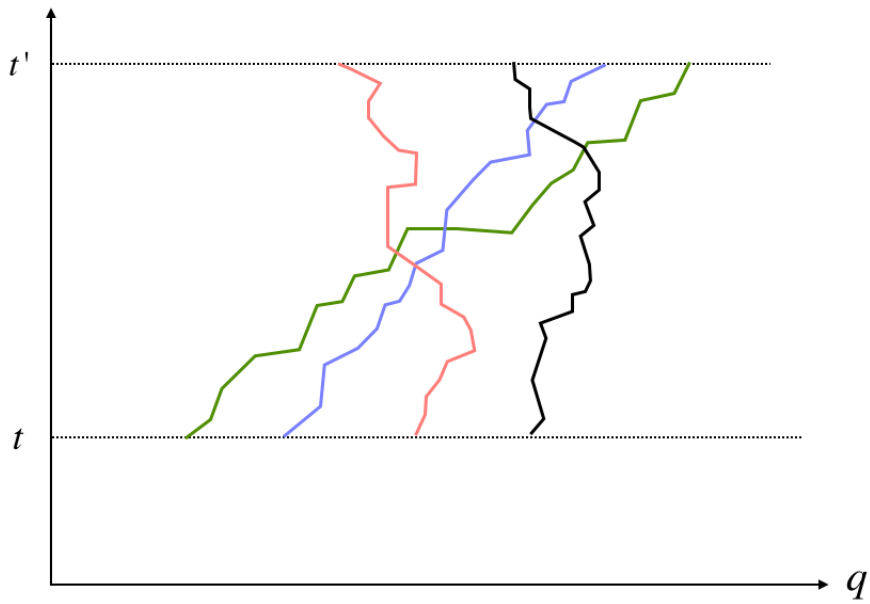
و یا اینکه به صورت زیر:

$$\langle q', t'|T\left(\hat{Q}(t_2)\hat{Q}(t_1)\right)|q, t\rangle = \int Dq\ q(t_2)\ q(t_1)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau} \tag{۲۲}$$

که در آن معنای $T\left(\hat{Q}(t_2)\hat{Q}(t_1)\right)$ که Time Ordered Product خوانده می شود این است که عملگرها به ترتیب زمانی از بزرگ به کوچک (از سمت چپ) مرتب شده اند. این صورت دوم در نوشته ها معمول تر است. این رابطه به راحتی به توابع همبستگی دلخواه تعمیم داده می شود: یعنی

$$\langle q', t'|T(\hat{Q}(t_n)\cdots\hat{Q}(t_2)\hat{Q}(t_1))|q, t\rangle = \int Dq\ q(t_n)\cdots\ q(t_2)q(t_1)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau} \tag{۲۳}$$

به همین ترتیب توابع همبستگی چند نقطه ای نیز تعریف شده و در فرمالیزم انتگرال مسیر نمایش داده می شوند.



شکل ۲: در رابطه ی ۳۱ روی تمام مختصات ابتدا و انتها هم انتگرال گرفته می شود.

■ تمرین: با استفاده از روش انتگرال مسیر انتشار گر زیر را برای یک نوسانگر هارمونیک آزاد حساب کنید:

$$\langle 0|e^{-i\frac{t}{\hbar}H}|0\rangle$$

که در آن $\langle 0|$ حالت پایه نوسانگر است. درستی پاسخ خود را با استفاده از روش کانونیک (اپراتوری) تحقیق کنید.

■ تمرین: با استفاده از روش کانونیک (اپراتوری) کمیت های زیر را برای یک ذره آزاد در یک بعد محاسبه کنید:

$$\langle q',t'|\hat{Q}(t_1)|q,t\rangle, \qquad \langle q',t'|T\left[\hat{Q}(t_2)\hat{Q}(t_1)\right]|q,t\rangle. \tag{۲۴}$$

۱.۲ امتداد تحلیلی

رابطه اصلی انتگرال مسیر با وجودی که از نظر مفهمومی و فیزیکی معنای روشنی دارد، از نظر ریاضی چندان خوش تعریف نیست زیرا علاوه بر خوش تعریف نبودن انتگرال روی تمام مسیرهای ممکن، تابع زیر انتگرال نیز یک فاز خالص است که همگرایی انتگرال را بیش از پیش با دشواری روبرو می کند. کاری که می توان کرد چیزی است که به امتداد تحلیلی [۲] معروف است. فرض می کنیم که از ابتدا می خواسته ایم کمیتِ $\langle q'|e^{-H(t_2-t_1)}|q\rangle$ را به صورت انتگرال مسیر بنویسیم. هرگاه این عبارت را به همان شیوه ای که در اثبات رابطه اصلی انتگرال مسیر طی کردیم بسط دهیم و جملات را جمع و جور کنیم به یک انتگرال می رسیم که تابع زیر انتگرال دیگر یک فاز خالص نیست. بجای این که کار محاسبه را از اول انجام دهیم که کمی وقت گیر است می توانیم یک راه معادل و میان بر انتخاب کنیم و آن این که در هر دو طرف رابطه ی (۸) تبدیل $t \longrightarrow -i\tau$ را انجام دهیم. در طرف چپ این کار همان جمله ی $\langle q'|e^{-H(\tau_2-\tau_1)}|q\rangle$ را تولید می کند. برای اینکه تغییرات در طرف راست را بفهمیم باید ببینیم که عبارت لاگرانژی و کنش چگونه تغییر می کنند. تحت این تغییرات داریم :

$$L(q,\dot{q}) \equiv m(\frac{dq}{d\tau})^2 - V(q) \longrightarrow -m(\frac{dq}{d\tau})^2 - V(q) \tag{۲۵}$$

و

$$\frac{i}{\hbar}\int_{\tau_1}^{\tau_2} L(q,\dot{q})dt\tau \longrightarrow \frac{-1}{\hbar}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[m(\frac{dq}{d\tau})^2 + V(q)\right]d\tau \tag{۲۶}$$

بنابراین رابطه انتگرال مسیر به صورت زیر در می آید:

$$\langle q'|e^{-H(\tau_2-\tau_1)}|q\rangle = \int Dq e^{\frac{-1}{\hbar}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[m(\frac{dq}{d\tau})^2+V(q)\right]} \tag{۲۷}$$

حال در طرف راست تابع زیر انتگرال دیگر یک فاز نیست بلکه به صورت یک تابع نمایی با نمای منفی در آمده است. این رابطه آن چیزی است که به نام انتگرال مسیر اقلیدسی [۳] خوانده می شود.

وقتی که دو طرف را بدون نگرانی از واگرایی انتگرال ها محاسبه کردیم آنگاه می توانیم در طرفین رابطه دوباره امتداد تحلیلی دهیم و در پایان در هر دو طرف تبدیل $\tau \longrightarrow it$ را به کار ببریم. به این ترتیب می توانیم انتگرال مسیر واقعی یعنی در فضا زمان

[۲] Analytic Continuation

[۳] Euclidean Path Integral

مینکووسکی را به عنوان حد انتگرال مسیر اقلیدسی بنویسیم:

$$\langle q'|e^{-iH(t_2-t_1)}|q\rangle = \left[\int Dqe^{\frac{-1}{\hbar}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[m(\frac{dq}{d\tau})^2+V(q)\right]d\tau}\right]_{\tau\longrightarrow it} \quad (۲۸)$$

از این به بعد ما کار خود را در بسیاری از موارد با انتگرال مسیر اقلیدسی پیش می بریم و در پشت ذهن مان این مطلب را می دانیم که در پایان می توانیم انتگرال مسیر را به صورت مینکووسکی برگردانیم.

---

۳ حالت پایه و توابع همبستگی روی آن

حال فرض کنید که می خواهیم احتمال گذار را از حالت $|q\rangle$ در زمان $-\infty$ به حالت $\langle q'|$ در زمان $+\infty$ پیدا کنیم. از رابطه (۵۹) بدست می آوریم

$$\lim_{\tau_2-\tau_1\longrightarrow\infty}\langle q'|e^{-H(\tau_2-\tau_1)}|q\rangle = \int Dqe^{\frac{-1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\left[m(\frac{dq}{d\tau})^2+V(q)\right]} \quad (۲۹)$$

اما در طرف چپ می توانیم یک پایه کامل از ویژه حالت های هامیلتونی را به صورت $\sum_n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ قرار دهیم که در آن $H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ و $|\psi_0\rangle$ حالت پایه است. انرژی حالت پایه را نیز مساوی با صفر اختیار می کنیم. در این صورت در حد بالا تنها سهم حالت پایه باقی می ماند و بدست می آوریم:

$$\langle q'|\psi_0\rangle\langle\psi_0|q\rangle = \int Dqe^{\frac{-1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\left[m(\frac{dq}{d\tau})^2+V(q)\right]} \quad (۳۰)$$

و یا

$$\psi_0(q')\psi_0^*(q) = \int Dqe^{\frac{-1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\left[m(\frac{dq}{d\tau})^2+V(q)\right]} \quad (۳۱)$$

به این ترتیب انتگرال مسیر از زمان منهای بی نهایت تا زمان بی نهایت از نقطه q تا q' عبارتی را بدست می دهد که مستقیما به تابع موج حالت پایه مربوط است. حال سعی می کنیم که متوسط یک عملگر یا مشاهده پذیر را حساب کنیم. از رابطه (۱۸) به شکل اقلیدسی اش می توانیم بنویسیم:

$$\langle q'|e^{-Ht'}\hat{Q}(t_1)e^{Ht}|q\rangle = \int Dq\ q(t_1)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-t}^{t'}\left[m(\frac{dq}{d\tau})^2+V(q)\right]d\tau} \tag{۳۲}$$

در حد

$t' \longrightarrow +\infty$ و $t \longrightarrow -\infty$ می نویسیم:

$$\lim_{t\longrightarrow-\infty,\ t'\longrightarrow\infty}\langle q'|e^{-Ht'}\hat{Q}(t_1)e^{Ht}|q,t\rangle = \int Dq\ q(t_1)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\left[m(\frac{dq}{d\tau})^2+V(q)\right]d\tau} \tag{۳۳}$$

و پس از قرار دادن یک دسته از ویژه پایه های هامیلتونی در عنصر ماتریسی سمت چپ و گرفتن حد

$$\psi_0(q')\psi_0{}^*(q)\langle\psi_0|\hat{Q}(t_1)|\psi_0\rangle = \int Dq\ q(t_1)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\left[m(\frac{dq}{d\tau})^2+V(q)\right]d\tau}. \tag{۳۴}$$

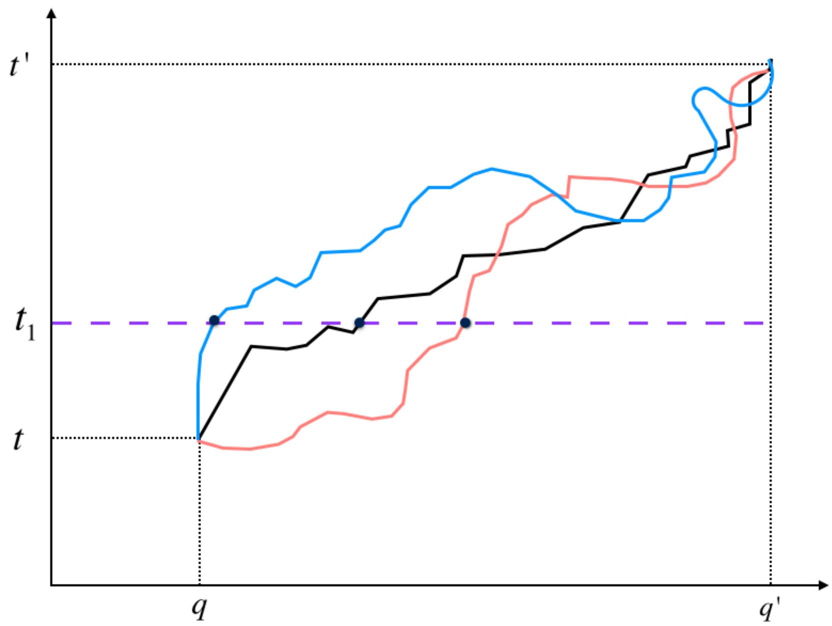
با تقسیم (۳۴) بر (۵۹) و امتداد تحلیلی به انتگرال مسیر مینکووسکی به نتیجه زیبای زیر می رسیم:

$$\langle\psi_0|\hat{Q}(t_1)|\psi_0\rangle = \frac{\int Dqq(t_1)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau}}{\int Dq\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau}} \tag{۳۵}$$

در این جا باید صبر کنیم و معنای این رابطه را بفهمیم. در این رابطه دیگر انتشار یک ذره از یک نقطه q به نقطه ی q' مطرح نیست، آنچه که مطرح است حالت پایه است و بس. طرف چپ ارزش انتظاری یک عملگر Q در زمان t است که روی حالت پایه حساب شده است.

طرف چپ عنصر ماتریسی یک عملگر در مکانیک کوانتومی است و حال انکه طرف راست هیچ چیز کوانتومی در برندارد و تنها نشان دهنده انتگرال روی مسیرهاست. از این ها مهم تر این است که در طرف راست اندازه $Dq = \lim_{\epsilon\longrightarrow 0} C^N\prod_{i=1}^N dq_i$ در انتگرال مسیر که نگران مقدار آن بودیم در صورت و مخرج هر دو وجود دارد و حذف می شود. با دنبال کردن محاسباتی که در مورد تابع همبستگی بالا انجام دادیم می توان قانع شد که این رابطه به توابع همبستگی مرتبه بالاتر نیز تعمیم پیدا می کند.

$$\langle\psi_0|T(\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2)\cdots\hat{Q}(t_n))|\psi_0\rangle = \frac{\int Dq\ q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau}}{\int Dq\ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}L(q(\tau),\dot{q}(\tau))d\tau}} \tag{۳۶}$$



شکل ۳: در عبارت ۳۵ متوسط مختصه ی پیموده شده در زمان t_1 محاسبه می شود.

این عبارت که آن را تابع هم بستگی n نقطه ای [۴] می نامیم، میزان همبستگی مشاهده پذیر Q را در زمان های مختلف روی حالت پایه نشان می دهد. در ادامه از عبارت ِ $\langle T\left[\hat{q}(t_n)\hat{q}(t_{n-1})\cdots\hat{q}(t_1)\right]\rangle$ بجای $\langle\psi_0|T\left[\hat{Q}(t_n)\hat{Q}(t_{n-1})\cdots\hat{Q}(t_1)\right]|\psi_0\rangle$ استفاده می کنیم یعنی تعریف می کنیم که :

$$\langle T\left[\hat{q}(t_n)\hat{q}(t_{n-1})\cdots\hat{q}(t_1)\right]\rangle := \langle\psi_0|T\left[\hat{Q}(t_n)\hat{Q}(t_{n-1})\cdots\hat{Q}(t_1)\right]|\psi_0\rangle. \tag{۳۷}$$

در مکانیک کوانتومی ما کمتر با این نوع کمیت ها یعنی توابع همبستگی چندنقطه ای سر و کار داریم. اما در درس های آینده خواهیم دید که این نوع کمیت ها مهمترین کمیت ها در نظریه میدان هستند. دانستن آنها به معنای داشتن دانش کامل در باره

[۴] n-point correlation function

نظریه میدان است. به کمک آنها می توان هر نوع کمیتی را که ناشی از آزمایشهای زیراتمی و بنیادی ذرات است محاسبه کرد. طبیعی است که محاسبه دقیق آنها کار سختی باشد ولی به هرحال چارچوب های محاسباتی دقیقی برای محاسبه اختلالی و رتبه به رتبه آنها وجود دارد. مهم ترین ابزاری که در این چارچوب محاسباتی به کار می رود بسط اختلالی و قواعد فاینمن است که ما در این درس با نمونه ی ساده ای از آن آشنا خواهیم شد.

۴ تابع پارش

حال سوال اصلی پیش روی ما این است که این توابع همبستگی را چگونه محاسبه می کنیم. مسلماً کار خوبی نیست که برای هر تابع هم بستگی یک روش محاسبه مستقل ارائه دهیم. بنابراین بجای محاسبه تک تک توابع همبستگی، مولد [۵] تمام توابع همبستگی را پیدا می کنیم. این مولد را تابع پارش [۶] می نامیم و آن را با $Z[J]$ نمایش می دهیم . خواهیم داشت :

$$Z[J] := \frac{\int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}(L+j(\tau)q(\tau))d\tau}}{\int Dq e^{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty}Ld\tau}} \tag{۳۸}$$

این تابع پارش دارای خاصیت زیر است:

$$Z[J=0]=1 \tag{۳۹}$$

بازهم تاکید می کنیم که درتعریف تابع پارش هم درصورت و هم درمخرج اندازه انتگرال Dq به یکسان وجود دارد و بنابراین ثابت C که دررابطه (82) بکاررفت و ممکن است در حد $\epsilon \longrightarrow \infty$ خوش تعریف نباشد اهمیت خود را از دست می دهد و ما نمی بایست نگران خوش تعریف نبودن اندازه این ثابت باشیم.

توابع همبستگی با مشتق گیری از تابع پارش بدست می آیند. با یک بار مشتق گیری تابعی نسبت به $j(t_1)$ و سپس مساوی قراردادن تابع j با صفر بدست می آوریم:

[۵] Generating Function

[۶] Partition Function

$$\langle \hat{q}(t_1) \rangle = (\frac{\hbar}{i}) \frac{\delta Z[j]}{\delta j(t_1)} \mid_{J=0} \quad (۴۰)$$

و با دو بار مشتق گیری

$$\langle \hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2) \rangle = (\frac{\hbar}{i})^2 \frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(t_1)\delta j(t_2)} \mid_{J=0} \quad (۴۱)$$

و همین طور برای توابع همبستگی مرتبه بالاتر.

$$\langle [\hat{q}(t_n)\hat{q}(t_{n-1})\cdots \hat{q}(t_1)] \rangle \equiv \langle \psi_0 | \left[\hat{Q}(t_n)\hat{Q}(t_{n-1})\cdots \hat{Q}(t_1) \right] | \psi_0 \rangle = (\frac{\hbar}{i})^n \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(t_n)\delta j(t_{n-1})\cdots \delta j(t_1)} |_{J=0} \quad (۴۲)$$

به این ترتیب تابع پارش به مهمترین کمیت در مکانیک کوانتومی و بعداً چنانچه در بخش بعدی خواهیم دید، به مهم ترین کمیت در نظریه میدان تبدیل می شود. محاسبه این تابع به معنای حل نظریه میدان است. طبیعی است که انتظار داشته باشیم این تابع را برای میدان های آزاد بتوان به طور دقیق و به شکل بسته حساب کرد. اما برای میدان های با برهم کنش می بایست از روش های اختلالی و نظایر آن استفاده کرد.

■ تمرین: فرض کنید که تابع پارش به صورت زیر است:

$$Z[j] = Ce^{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} j(t)a(t-t')j(t')^2 dtdt'}.$$

کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle q(t) \rangle, \qquad \langle q(t_2)q(t_1) \rangle, \qquad \langle q(t_3)q(t_2)q(t_1)q(t_4) \rangle. \quad (۴۳)$$

■ تمرین: تابع پارش را برای یک نوسانگر هارمونیک از دو روش حساب کنید: اول از روش کانونیک و دوم از روش انتگرال مسیر.

۵ رابطه مکانیک آماری و مکانیک کوانتومی

فرمالیزم انتگرال مسیر این امکان را فراهم می کند که یک ارتباط ساده و مشخص بین مکانیک آماری و مکانیک کوانتومی ایجاد کنیم. در مکانیک آماری کمیت اصلی تابع پارش است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$Z(\beta) = tr(e^{-\beta H}) = \int dq \langle q|e^{-\beta H}|q\rangle. \tag{۴۴}$$

بنابر این آنچه که در مکانیک آماری به آن احتیاج داریم محاسبه عناصر ماتریسی $\langle q'|e^{-\beta H}|q\rangle$ است. اما این گونه عناصر ماتریسی را ما قبلا به روش انتگرال مسیر محاسبه کرده ایم . در واقع یافته ایم که

$$\langle q'|e^{-iTH}|q\rangle = \int Dq e^{i\int_0^T L(q(t),\dot{q}(t))dt} \tag{۴۵}$$

پس کافی است که در این عبارت تغییر زیر را انجام دهیم:

$$T \longrightarrow -i\beta, \qquad t \longrightarrow -i\tau \tag{۴۶}$$

و در نتیجه به دست می آوریم:

$$\langle q'|e^{-\beta H}|q\rangle = \int Dq e^{\int_0^\beta L(q(\tau),i\dot{q}(\tau))d\tau}. \tag{۴۷}$$

در عبارت بالا جمع روی تمام مسیرهایی است که از q شروع و به q' ختم می شوند. از آنجا که در تابع پارش به عناصر ماتریسی $\langle q|e^{-\beta H}|q\rangle$ نیاز داریم عبارت نهایی تابع پارش به شکل زیر در می آید:

$$Z(\beta) = \int_{q(0)=q(\beta)} Dq e^{\int_0^\beta L(q(\tau),i\dot{q}(\tau))d\tau}. \tag{۴۸}$$

یعنی در طرف راست انتگرال روی تمام مسیرهایی است که نقطه ابتدا و انتهایشان با هم یکی است و روی این نقطه نیز انتگرال گرفته می شود. حال باید ببینیم که در طرف راست روی چه کمیتی انتگرال می گیریم: اگر با یک سیستم با یک درجه آزادی و با هامیلتونی $H = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q)$ سروکار داریم در این صورت خواهیم داشت:

$$L(q(\tau), i\dot{q}(\tau)) = -\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) = -H \tag{۴۹}$$

و در نتیجه

$$Z(\beta) = \int_{q(0)=q(\beta)} Dq e^{-\int_0^\beta \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2+V(q)\right)}. \tag{۵۰}$$

۶ مکانیک کوانتومی و رفتار شبه کلاسیک

یکی از مزایای مهم فرمالیزم انتگرال مسیر این است که می توان رفتار نیمه کلاسیک [۷] سیستم ها بخوبی در آن دید. در واقع در این فرمالیزم می توانیم بفهمیم که چگونه اجسامی که کنش آنها بسیار بزرگ تر از $\hbar$ است، از میان تمام مسیرها تنها مسیر کلاسیک را طی می کنند. هم چنین می توان فهمید که چگونه برای اجرامی که کنش آنها از مرتبه $\hbar$ و بزرگ تر است مسیرهای نزدیک مسیر کلاسیک نیز سهمی ایفا می کنند و چگونه می توان سهم تمام این مسیرهای نیمه کلاسیک را جمع زد و حساب کرد. مقدمه این موضوعات این است که چیزی به نام تقریب نقطه زینی را در ریاضیات و در محاسبه انتگرال ها بفهمیم.

۱.۶ تقریب نقطه زینی

برای فهم تقریب نقطه زینی [۸] نخست به یک مثال ساده یک متغیره نگاه می کنیم. فرض کنید که هدف ما محاسبه انتگرال زیر است.

$$J = \int dx e^{-Nf(x)} \quad (۵۱)$$

که در آن $f(x)$ یک تابع یک حقیقی و مثبت است. در این صورت در حد N های بزرگ تابع $e^{-Nf(x)}$ بشدت کوچک می شود و تنها نقاطی در انتگرال سهم پیدا می کنند که در نزدیکی می نیمم های تابع $f(x)$ باشند. برای سادگی فرض کنید که تابع $f(x)$ تنها در یک نقطه مثل x_0 می نیمم می شود. در این صورت داریم

$$f'(x_0) = 0 \quad , \quad f''(x_0) > 0.$$

[۷] Semiclassical

[۸] Saddle Point Approximation

در نتیجه تابع $f(x)$ را حول x_0 بسط می دهیم و می نویسیم $f(x)\approx f(x_0)+\frac{1}{2}f"(x_0)\eta^2$. بنابراین با صرف نظر کردن از سهم جملات مرتبه بالاتر در انتگرال می توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} J\equiv\int dx\ e^{-Nf(x)}\approx &= \int dy\ e^{-N(f(x_0)+\frac{1}{2}f"(x_0)y^2)}=e^{Nf(x_0)}\int dy\ e^{-\frac{1}{2}f"(x_0)y^2} \\ &\approx e^{-N(f(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{f"(x_0)}}. \end{aligned} \quad (۵۲)$$

این رابطه به انتگرال های چند متغیره نیز تعمیم پیدا می کند. به این معنا که:

$$J\equiv\int dQ\ e^{-Nf(Q)}\approx=\int dY\ e^{-N(f(Q_0)+\frac{1}{2}Y^TAY)} \quad (۵۳)$$

که در آن A ماتریس مثبت با درایه های زیر است:

$$A_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_j}\ |_{Q=Q_0}\ . \quad (۵۴)$$

■ تمرین: اگر Q_0 یک نقطه می نیمم نسبی تابع f باشد، نشان دهید که ماتریس A یک ماتریس مثبت است.

انتگرال گاووسی را به راحتی می توان محاسبه کرد و بدست می آوریم:

$$J\equiv\int dQ\ e^{-Nf(Q)}\approx e^{-N(f(Q_0)}\sqrt{\frac{(2\pi)^N}{det(A)}} \quad (۵۵)$$

روش تقریب نقطه زینی را برای انتگرال های تابعی و انتگرال مسیر نیز می توان به کار برد. در واقع اگر تعداد متغیرها را به بی نهایت میل بدهیم و آن ها را به هم پیوسته کنیم آنگاه روابط بالا تبدیل می شوند به:

$$q_i\longrightarrow x(t),\quad y_i\longrightarrow y(t),\quad f(x)\longrightarrow F[x],\quad A_{ij}\longrightarrow A(t,t'),\quad Y^TAY\longrightarrow\int dtdt'y(t)A(t,t')y(t'), \quad (۵۶)$$

و

$$A_{ij}=\frac{\partial^2 f(Q)}{\partial q_i\partial q_j}\ |_{Q=Q_0}\quad\longrightarrow\quad A(t,t')=\frac{\delta^2 F[x]}{\delta x(t)\delta x(t')}\ |_{x(t)=x_0(t)} \quad (۵۷)$$

در نتیجه برای انتگرال های تابعی بدست می آوریم

$$J \equiv \int Dx\ e^{-NF[x]} \approx \begin{aligned} &= \int Dy\ e^{-N(F[x_0]+\frac{1}{2}dt\ dt' y(t)A(t,t')y(t'))} \\ &= Ce^{-N(F[x_0]}\frac{1}{\sqrt{det(A)}}. \end{aligned} \tag{۵۸}$$

■ تمرین: انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$\int e^{-N(x^2+y^2+xy+x^4+y^4)}$$

این انتگرال را در حد N های خیلی بزرگ تقریب بزنید.

۲.۶ رفتار نیمه کلاسیک

فرمالیزم انتگرال مسیر به ما می گوید که یک ذره برای رفتن از یک نقطه به نقطه دیگر تمام مسیرهای ممکن را هر کدام با یک دامنه احتمال ممکن طی می کند. اما می دانیم که ذرات ماکروسکوپی (مثل یک ذره گرد و غبار و یا خیلی کوچکتر از آن ولی خیلی بزرگ تر از الکترون ها) چنین رفتار نمی کنند و تنها یک مسیر یعنی همان مسیر کلاسیک را که با معادله نیوتن یا لاگرانژ داده می شود طی می کنند. سوال این است که این دو تصویر چگونه با هم سازگا ر است. برای این که این رفتار حدی را بفهمیم کافی است که پارامتر $\hbar$ را به سمت صفر میل دهیم زیرا در حد کلاسیک کنش یک ذره نسبت به این پارامتر خیلی خیلی بزرگ است ، بنابراین حدهای گفته شده در بالا را می توانیم براحتی مطالعه کنیم. برای محاسبه دقیق می بایست از فرم انتگرال مسیر اقلیدسی استفاده کنیم. داریم:

$$\langle q'|e^{-H(\tau_2-\tau_1)}|q\rangle = \int Dq\ e^{\frac{-1}{\hbar}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[m(\frac{dq}{d\tau})^2+V(q)\right]d\tau} \tag{۵۹}$$

وقتی که $\hbar$ به سمت صفر میل می کند و نمای تابع زیر انتگرال به شدت بزرگ می شود می توانیم از تقریب نقطه زینی استفاده کنیم. در زیر این تقریب را به طور خلاصه شرح می دهیم.

۷ انتگرال مسیر در نظریه میدان

آنچه که تاکنون یافته ایم مربوط به صورتبندی انتگرال مسیر برای مکانیک کوانتومی است. این صورتبندی براحتی به نظریه میدان های کوانتومی تعمیم داده می شود. برای این کار نخست می بایست این فرمول بندی را به چند ذره با متغیرهای مکان $q_1(t), \cdots q_n(t) \cdots q_N(t)$ تعمیم دهیم و سپس تعداد متغیر هارا به سمت بی نهایت میل دهیم و تغییرات زیر را انجام دهیم:

$$n \longrightarrow x, \quad q_n(t) \longrightarrow \phi(x,t). \tag{۶۰}$$

تحت این شرایط رابطه اصلی انتگرال مسیر در مکانیک کوانتومی که یک بار دیگر آن را در زیر می نویسیم:

$$\langle q'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|q\rangle = \int Dq \ e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} L(q(\tau),\dot{q}(\tau),\tau)dt} \tag{۶۱}$$

به رابطه زیر تبدیل می شود:

$$\langle \phi'|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}|\phi\rangle = \int D\phi \ e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'} L[\phi(x,\tau),\partial_t\phi(x,t)]dt} = \int D\phi \ e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t'}\int dx\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)dt}. \tag{۶۲}$$

هم چنین رابطه (۳۱) بعد از گسترش به انتگرال مسیر مینکوسکی به رابطه زیر تبدیل می شود:

$$\Psi_0[\phi]\Psi_0^*[\phi] = \int D\phi e^{\frac{-i}{\hbar}S[\phi]} \tag{۶۳}$$

که در آن Ψ تابعی حالت پایه برای میدان است . روابط مربوط به توابع همبستگی نیز به روابط زیر تبدیل می شوند:

$$\langle\Psi_0|T\left[\hat{\phi}(x_n,t_n)\hat{\phi}(x_{n-1},t_{n-1})\cdots\hat{\phi}(x_1,t_1)\right]|\Psi_0\rangle = \frac{\int D\phi \ \phi(x_n,t_n)\phi(x_{n-1},t_{n-1})\cdots\phi(x_1,t_1) \ e^{\frac{i}{\hbar}S}}{\int D\phi \ e^{\frac{i}{\hbar}S}}. \tag{۶۴}$$

در این جا D بعد کل فضا_زمان است. به همین ترتیب تابع پارش نظریه میدان نیز به صورت زیر نوشته می شود:

$$Z[J] = \frac{\int D\phi e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi]+\frac{i}{\hbar}\int J(x)\phi(x)dx^D}}{\int D\phi e^{i\hbar S[\phi]}} \tag{۶۵}$$

باتوجه به رابطه بالا می توان $Z[J]$ را به صورت زیر نیز نوشت:

$$Z[J] = \langle e^{\frac{i}{\hbar}\int J(x)\phi(x)d^Dx}\rangle \equiv \langle\Psi_0|T(e^{\frac{i}{\hbar}\int J(x)\hat{\phi}(x)d^Dx})|\Psi_0\rangle. \tag{۶۶}$$

توابع همبستگی به ترتیب زیر بدست خواهند آمد:

$$\langle\phi(x_n)\phi(x_{n-1})\cdots\phi(x_1)\rangle \equiv \langle 0|\hat{\phi}(x_n)\hat{\phi}(x_{n-1})\cdots\hat{\phi}(x_1)|0\rangle = (\frac{\hbar}{i})^n \frac{\delta^n Z[j]}{\delta j(x_n)\delta j(x_{n-1})\cdots\delta j(x_1)}|_{J=0} \qquad (۶۷)$$

بنابراین تابع پارش اساسی ترین کمیتی است که می بایست درنظریه میدان کوانتومی محاسبه شود. با دانستن این تابع می توان تمام توابع همبستگی را حساب کرد. دردرس آینده خواهیم دید که محاسبه دقیق این تابع برای میدان های کوانتومی آزاد امکان پذیر است اما برای میدان های کوانتومی برهم کنش دارکه درآنها برهم کنش ضعیف است، تنها می توان این تابع را به صورت اختلالی و بر حسب یک پارامتر کوچک که به شدت برهم کنش مربوط است بسط داد . در ادامه یاد خواهیم گرفت که چگونه تابع پارش را می توان با روش های اختلالی محاسبه کرد.

---

۸ محاسبه اختلالی تابع پارش

دیدیم که مهمترین کمیتی که می بایست در نظریه میدان کوانتومی محاسبه شود تابع پارش است که به صورت

$$Z[J] = \frac{\int D\phi e^{i\hbar S[\phi]+\frac{i}{\hbar}\int J(x)\phi(x)dx^D}}{\int D\phi e^{i\hbar S[\phi]}} \qquad (۶۸)$$

برای یک کنش دلخواه محاسبه دقیق این تابع پارش تقریباً غیر ممکن است. بنابراین می بایست روشی را بکار برد که بتوان این تابع پارش را با تقریب و به صورت یک بسط اختلالی برحسب یک پارامتر کوچک حساب کرد. دراین بخش این روش را یاد خواهیم گرفت. برای آنکه از پیچیدگی های غیر ضروری که مانع فهمیدن هسته اساسی این روش می شود پرهیز کنیم این روش اختلال را در چارچوب یک مثال ساده یاد خواهیم گرفت که درعین سادگی همه خواص حالت های پیچیده تری را که بعداً با آنها سروکار خواهیم داشت دربردارد. اهمیت این مثال ساده در آن است که همانطور که تا کنون دیده ایم، هر کنش آزاد چه در مکانیک کوانتومی و چه در نظریه میدان های کوانتومی برحسب متغیرهای دینامیکی اش یک عبارت درجه دو [۹] است.

[۹] Quadratic Expression

همانطور که برای کنش آزاد می توان معادلات حرکت را به سادگی حل کرد، تابع پارش این کنش ها را نیز می توان به راحتی حل کرد. این راحتی ناشی از آن است که محاسبه انتگرال مسیر برای این مدل ها منجر به محاسبه انتگرال های گاووسی می شود و چنین انتگرال هایی را به سادگی و به صورت بسته می توان حل کرد. افزودن جملات برهم کنشی یعنی جملاتی که از مرتبه بالاتر از دو هستند باعث غیرقابل حل شدن معادلات حرکت از یک طرف و غیرقابل محاسبه شدن تابع پارش از طرف دیگر می شوند. طبیعی است که منظور ما از قابل حل بودن ، حل دقیق و بسته است. بنابراین چنین انتگرال مسیرهایی را می بایست با استفاده از بسط اختلالی حل کرد. بنابراین مسئله اصلی این است که بفهمیم چگونه این روش بسط اختلالی برای ساده ترین حالت ممکن انجام می شود. بعد از آنکه تمام جوانب این مسئله را در این حالت ساده فهمیدیم می توانیم براحتی یافته های خود را به مکانیک کوانتومی و سپس به میدان های کوانتومی تعمیم دهیم. مسئله تنها افزودن یا پیوسته کردن متغیرهای دینامیکی است و نه چیزی بیشتر از آن. بنابراین بخش بعدی تنها در بر دارنده مطالبی در باره انتگرال های گاووسی است و یک بحث کاملا ریاضی است و در خارج از حوزه مکانیک کوانتومی و انتگرال مسیر نیز کاربرد دارد. به طور کلی هر جا که با انتگرال های گاووسی و محاسبه آنها سر و کار داریم می توانیم از این مطالب استفاده کنیم.

۹ انتگرال های گاووسی ـ قضیه ویک

می دانیم که انتگرال های زیر که درآنها a یک عدد مثبت است به سادگی قابل محاسبه هستند:

$$\int dq e^{-\frac{1}{2}aq^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \qquad \int dq e^{-\frac{1}{2}aq^2+jq} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{j^2}{2a}} \tag{۶۹}$$

با ضرب کردن تعداد N تا از این انتگرال ها برای مقادیر مختلف پارامترها می توان روابط زیر را بدست آورد:

$$\begin{aligned} &\int DQ e^{-\frac{1}{2}(a_1 {q_1}^2 + a_2 {q_2}^2 + \cdots a_N {q_N}^2)} = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{a_1 a_2 \cdots a_N}} \\ &\int DQ e^{-\frac{1}{2}(a_1 {q_1}^2 + a_2 {q_2}^2 + \cdots a_N {q_N}^2) + j_1 q_1 + j_2 q_2 + \cdots j_N q_N} = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{a_1 a_2 \cdots a_N}} e^{\frac{j_1^2}{2a_1} + \frac{j_2^2}{2a_2} + \cdots \frac{j_N^2}{2a_N}} \end{aligned} \tag{۷۰}$$

که درآن $a_1, a_2, \cdots a_N$ همه مثبت هستند و $DQ = dq_1 dq_2 \cdots dq_N$. اگر ماتریس قطری $A = diag(a_1, a_2, \cdots a_N)$ را تعریف کنیم می توانیم روابط (۷۰) را به صورت فشرده زیر بنویسیم:

$$\int DQ e^{-\frac{1}{2}Q^t A Q} = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{detA}} \qquad \int DQ e^{-\frac{1}{2}(Q^t A Q) + J^t Q} = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{detA}} e^{\frac{1}{2}J^t A^{-1} J} \tag{۷۱}$$

حال حتی اگر ماتریس A قطری نیز نباشد (بلکه تنها یک ماتریس مثبت و متقارن باشد) باز هم این روابط صحیح هستند زیر می توان با یک ماتریس متعامد آن را قطری کرد و از روابط (70) استفاده کرد. لازم است ذکر کنیم که یک ماتریس متعامد اندازه انتگرال را تغییر نمی دهد زیرا قدرمطلق دترمینان آن برابر با یک است.
رابطه (70) نقطه شروع ما برای بسط اختلالی است.
فرض کنید که هدف ما محاسبه انتگرال زیر است:

$$Z_0[J] = \frac{\int DQ e^{-\frac{1}{2}(Q^t A Q) + J^t Q}}{e^{-\frac{1}{2}(Q^t A Q)}} \tag{۷۲}$$

این انتگرال را با $Z_0[J]$ نشان داده ایم زیرا شکل آن درست مثل یک تابع پارش است. می توان این تابع پارش را به عنوان یک تابع مولد برای یک توزیع احتمال گاووسی درنظر گرفت . اندیس 0 در Z_0 نشان دهنده آن است که توزیع احتمال مربوطه گاووسی است. این نوع انتگرال همان چیزی است که ما درمحاسبه تابع پارش یک میدان کوانتومی آزاد به آن برمی خوریم. با توجه به روابط بدست آمده این تابع پارش را به طور دقیق می توانیم محاسبه کنیم:

$$Z_0[J] = e^{\frac{1}{2}J^t A^{-1} J} \qquad\qquad Z_0[0] = 1. \tag{۷۳}$$

بامشتق گیری نسبت به J_k می توان توابع همبستگی را برای این توزیع احتمال گاووسی حساب کرد.بسادگی بدست خواهیم آورد:

$$\langle q_k \rangle = 0 \qquad \langle q_i q_j \rangle = (A^{-1})_{ij} =: \Delta_{ij} \tag{۷۴}$$

کمیت Δ_{ij} کمیت بسیاری مهمی است زیرا همه توابع همبستگی بالاتر از ترکیب هایی از این کمیت بدست می آیند. با کمی محاسبه بیشتر می توانیم تابع چهارنقطه ای را بدست بیاوریم :

$$\langle q_i q_j q_k q_l \rangle = \Delta_{ij}\Delta_{kl} + \Delta_{ik}\Delta_{jl} + \Delta_{il}\Delta_{jk} \tag{۷۵}$$

که به معنای آن است که باداشتن تابع دونقطه ای می توان تابع چهارنقطه ای را بدست آورد. تنها کافی است که آن را به صورت مجموع چند جمله بنویسیم که هرکدام از این جملات حاصل ضرب دو تابع دو نقطه ای است که از یک انتخاب از شاخص هابه صورت جفت جفت مثل $(i,j),(k,l)$ بدست می آید. این عمل را ادغام شاخص (i,j) و (k,l) می نامیم. مجموع تمام جملات درواقع مجموع تمام امکاناتی است که برای ادغام شاخص ها داریم . آنچه که برای تابع چهارنقطه ای گفتیم برای تمام توابع $2n$ نقطه ای صحیح است. این خاصیت یک خاصیت اساسی از تابع توزیع گاووسی است و به قضیه ویک $Wick$ معروف است. خواننده خود می تواند با استفاده از فرم تابع پارش گاووسی این قضیه را ثابت کند.

- تمرین: تابع چهار نقطه ای را برای انتگرال گاووسی حساب کنید و درستی قضیه ویک را ثابت کنید.

- مسئله: تابع توزیع احتمال گاووسی زیر را در نظر بگیرید:

$$P(q_1,q_2,q_3)=\frac{1}{Z_0}e^{-\frac{1}{2}(q_1-q_2)^2-(q_2-q_3)^2-\frac{1}{2}(q_1+q_3)^2} \qquad (۷۶)$$

کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle q_1q_2\rangle, \qquad \langle q_2q_3\rangle, \qquad \langle q_1q_2q_3\rangle, \qquad \langle q_1^2q_2q_3\rangle, \qquad \langle q_1^2q_2^2q_3^2\rangle. \qquad (۷۷)$$

حال فرض کنید که تابع پارش ما گاووسی نیست بلکه به صورت زیر است

$$Z[J]=\frac{\int DQe^{-\frac{1}{2}(Q^tAQ)+V(Q)+J^tQ}}{e^{-\frac{1}{2}(Q^tAQ)+V(Q)}} \qquad (۷۸)$$

که درآن $V(Q)$ یک جمله بالاتر از مربعی است . باتوجه به کاربردی که برای این محاسبات درنظریه میدان کوانتمی داریم $V(Q)$ را پتانسیل می نامیم. $Z[J]$ را می توانیم به ترتیب زیر بر حسب متوسط هایی در توزیع احتمال گاووسی بنویسیم. یک بارکه موفق به این کارشدیم می توانیم از قضیه ویک استفاده کنیم و متوسط های مربوطه را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \frac{\int DQe^{-\frac{1}{2}(Q^tAQ)+V(Q)+J^tQ}}{e^{-\frac{1}{2}(Q^tAQ)+V(Q)}}\\
&= \frac{\int DQe^{-\frac{1}{2}(Q^tAQ)+V(Q)+J^tQ}}{e^{-\frac{1}{2}(Q^tAQ)}}\times\frac{\int DQe^{-\frac{1}{2}(Q^tAQ)}}{e^{-\frac{1}{2}(Q^tAQ)+V(Q)}}\\
&= \frac{\langle e^{V(Q)+J^tQ}\rangle_0}{\langle e^{V(Q)}\rangle_0}
\end{aligned} \qquad (۷۹)$$

که درآن شاخص 0 به معنای این است که متوسط ها را با وزن گاووسی حساب کرده ایم. هرگاه پتانسیل یک چند جمله ای برحسب q_k ها باشد می توانیم با بسط $e^{V(Q)}$ برحسب قوای متوالی q_k ها و استفاده از قضیه ویک تابع پارش را تا هر درجه از دقت رتبه به رتبه حساب کنیم.

این روش را می توان برای محاسبه توابع همبستگی نیز به کاربرد.

$$\begin{aligned}
\langle q_i q_j \cdots q_k \rangle &:= \frac{\int DQ q_i q_j \cdots x_k e^{-\frac{1}{2}(Q^t A Q)+V(Q)}}{e^{-\frac{1}{2}(Q^t A Q)+V(Q)}} \\
&= \frac{\int DQ q_i q_j \cdots x_k e^{V(Q)} e^{-\frac{1}{2}(Q^t A Q)}}{e^{-\frac{1}{2}(Q^t A Q)}} \times \frac{\int DQ e^{-\frac{1}{2}(Q^t A Q)}}{e^{-\frac{1}{2}(Q^t A Q)+V(Q)}} \\
&= \frac{\langle q_i q_j \cdots q_k e^{V(Q)} \rangle_0}{\langle e^{V(Q)} \rangle_0}
\end{aligned} \qquad (۸۰)$$

به این ترتیب توانسته ایم تابع چند نقطه ای را در مدل غیر گاووسی برحسب نسبت توابع چند نقطه ای درمدل گاووسی بنویسیم.

۱.۹ پتانسیل q^4

در زیر این روش را برای پتانسیل

$$V(Q) = \frac{g}{4!} \sum_{i=1}^{N} q_k^4$$

به کار می بریم. فرض ما این است که پارامتر g کوچک است و در هر نتیجه ای که بدست می آوریم قوای بالاتر این پارامتر تصحیحات کوچکی نسبت به قوای پایین تر آن هستند. به عنوان مثال تابع دو نقطه ا ی را دراین مدل حساب می کنیم. داریم:

$$\langle q_i q_j \rangle = \frac{\langle q_i q_j e^{\frac{g}{4!} \sum_{k=1} N q_k^4} \rangle_0}{\langle e^{\frac{g}{4!} \sum_{k=1} N q_k^4} \rangle_0} \equiv \frac{B}{C} \qquad (۸۱)$$

که درآن B و C را برای نمایش صورت و مخرج کسر بکار برده ایم. با استفاده از قضیه ویک می توانیم مخرج و صورت را تا مرتبه یک از g حساب کنیم. بدست می آوریم :

$$\begin{aligned} C &= \langle e^{\frac{g}{4!}\sum_{k=1}^{N} q_k^4}\rangle_0 \approx \langle 1+\frac{g}{4!}\sum_{k=1}^{N} q_k^4\rangle_0 = 1+\frac{g}{4!}\sum_{k=1}^{N}\langle q_k^4\rangle_0 \\ &= 1+\sum_{k=1}^{N}\frac{g}{4!}(3\Delta_{kk}^2) = 1+\sum_{k=1}^{N}\frac{g}{8}\Delta_{kk}^2 \end{aligned} \tag{۸۲}$$

$$\begin{aligned} B &= \langle q_iq_je^{\frac{g}{4!}\sum_{k=1}Nq_k^4}\rangle_0 \approx \langle q_iq_j+q_iq_j\frac{g}{4!}\sum_{k=1}^{N} q_k^4\rangle_0 = \Delta_{ij}+\frac{g}{4!}\sum_{k=1}^{N}\langle q_iq_jq_k^4\rangle_0 \\ &= \Delta_{ij}+\sum_{k=1}^{N}\frac{g}{4!}(3\Delta_{kk}^2\Delta_{ij}+12\Delta_{ik}\Delta_{jk}\Delta_{kk}) = \Delta_{ij}+\sum_{k=1}^{N}(\frac{g}{8}\Delta_{ij}\Delta_{kk}^2+\frac{g}{2}\Delta_{ik}\Delta_{jk}\Delta_{kk}) \end{aligned} \tag{۸۳}$$

با استفاده از بسط دو جمله ای برای مخرج و ساده کردن نتیجه نهایتاً بدست می آوریم:

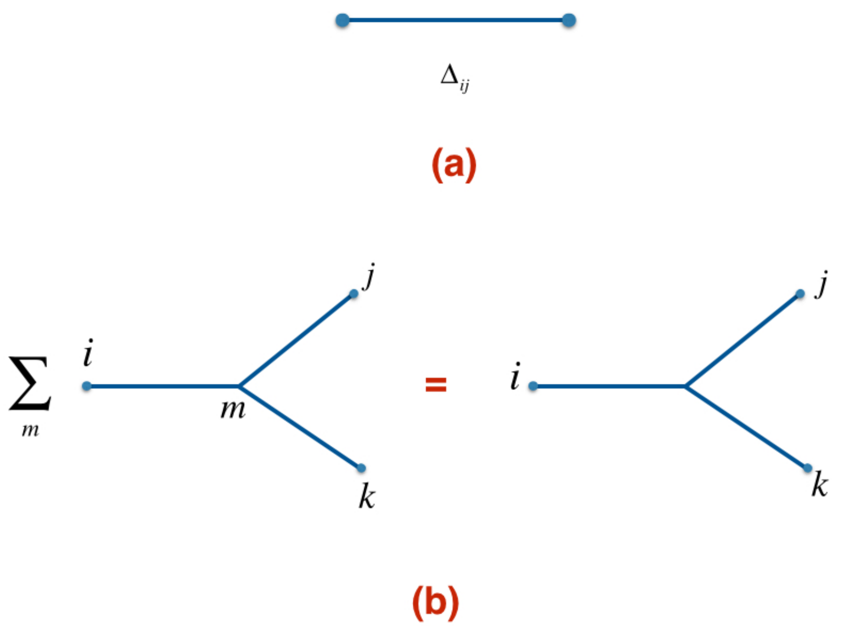
$$\langle q_iq_j\rangle = \Delta_{ij}+\frac{g}{2}\sum_{k=1}^{N}\Delta_{ik}\Delta_{jk}\Delta_{kk}+O(g^2) \tag{۸۴}$$

این نتیجه تا مرتبه g صحیح است.

۱۰ نمودارهای فاینمن

هرکس که یک بار محاسبات بالا را انجام داده باشد بزودی می فهمد که درآن ها نظمی هست که به کمک آن می توان محاسبات گسترده را بصورت خیلی خلاصه تری انجام داد و به نتیجه رسید. این نظم چنان است که به ما اجازه می دهد با کمک نمودارهای ساده و قواعد ساده ای توابع چند نقطه ای را تا هرمرتبه به صورت سیستماتیک بدست بیاوریم.

تمام قواعد فاینمن برای هر پتانسیلی تنها متکی برقضیه ویک و دو قرارداد بنیادی زیر هستند:



شکل ۴: (a) نمایش گرافیکی Δ_{ij} یک پاره خط ساده است با دو نقطه در انتهای آن . (b) وقتی که روی یک شاخص جمع زده می شود، نقطه نماینده آن برداشته می شود.

- قرارداد اول : به هر جمله Δ_{ij} یک پاره خط کوتاه نسبت می دهیم که دو سر آن با دونقطه با برچسب های i و j مشخص شده است. مطابق شکل (۴) .

- قرارداد دوم : هر گاه که دریک عبارت روی یک شاخص مثلاً k جمع زده شد در شکل مربوطه آن شاخص را صراحتا نمی نویسیم زیرا دیگر شاخص بخصوصی مورد نظرنیست و روی تمام شاخص ها جمع زده شده است. این قرارداد درشکل (4) نشان داده شده است:

با توجه به این قرارداد ها و قضیه ویک می توان یک مجموعه قواعد گرافیکی برای محاسبه توابع همبستگی برای هر پتانسیلی بدست آورد. این قواعد گرافیکی قواعد فاینمن خوانده می شوند.اکنون می توانیم فرم این قواعد را برای پتانسیل $\frac{g}{4!}\sum_{i=1}^{N} q_i^4$: بنویسیم. خواننده می تواند برای هر نوع پتانسیلی شکل آنها را با تغییراتی کوچک بدست بیاورد.

- برای محاسبه یک تابع همبستگی به شکل $\langle q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_n}\rangle$ در رتبه k به ترتیب زیر عمل می کنیم .
- الف : تمام دیاگرام هایی که شامل n نقطه خارجی $i_1, i_2, \cdots i_n$ و k تا راس چهارپایی هستند وازنظر توپولوژیک بایکدیگر متفاوتند را رسم می کنیم. دیاگرام هایی که جزء خلاء به خلاء [10] دارند را درنظر نمی گیریم. منظور از دیاگرام خلاء به خلاء دیاگرامی است که نقطه خارجی ندارد. مثلا در شکل (۶) دیاگرامی که مثل عدد هشت لاتین است یک دیاگرام خلاء به خلاء است.
- ب : برای هر دیاگرام یک ضریب ترکیبیاتی که ناشی از نحوه های مختلف ایجاد آن دیاگرام است درنظر می گیریم.
- ج : به هر راس یک ضریب $\frac{g}{4!}$ نسبت می دهیم.
- د : به هرپاره خط که دوسرآن نقاط i, j هستند عبارت Δ_{ij} را نسبت می دهیم.
- ه : برای هردیاگرام تمام فاکتورهایی را که درقسمت های قبلی نسبت داده ایم درهم ضرب می کنیم و روی هر نقطه داخلی مثل j جمع $\sum_{j=1}^{N}$ می زنیم.

با توجه به این قواعد می توان تمام عبارت هایی را که دربخش پیشین بدست آورده ایم بازنویسی کنیم. برای مثال رابطه (75) به صورت نمودار شکل (5) درمی آید:

و یا روابط (83) ، و (84) به ترتیب به صورت نمودارهای شکل های (6) و و (7) درمی آیند:

- مسئله: تابع توزیع احتمال زیر را در نظر بگیرید:

$$P(q_1, q_2) = \frac{1}{Z}e^{-\frac{1}{2}(q_1-q_2)^2+q_1q_2-gq_1^4-gq_2^4} \qquad (۸۵)$$

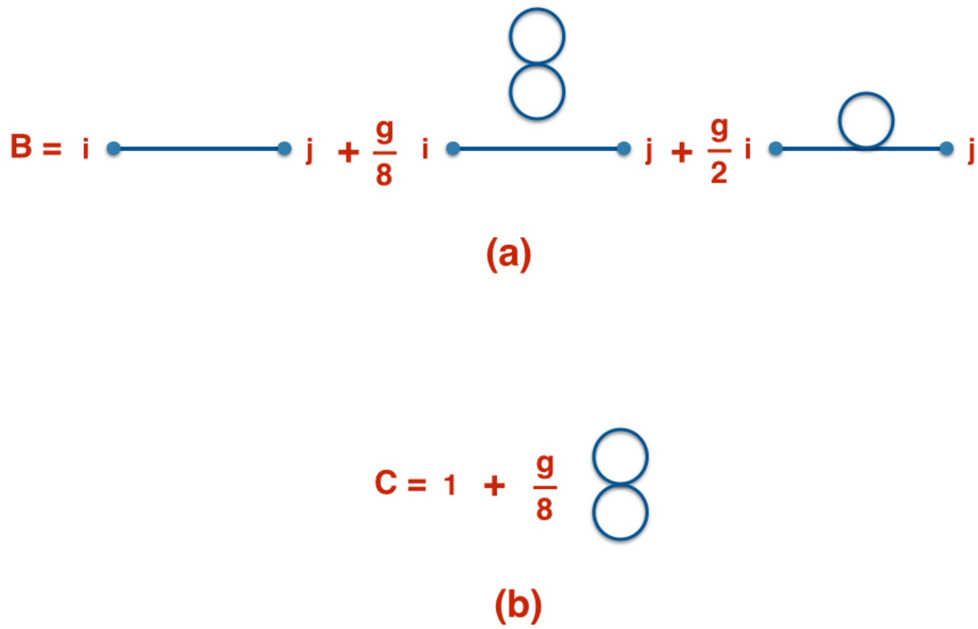
[10] Vacuum to Vacuum Diagram

شکل ۵: تابع چهارنقطه ای $\langle q_i q_j q_k q_l \rangle$ برای توزیع گاووسی بنابرقضیه ویک محاسبه می شود.

الف: کمیت های زیر را تا رتبه یک بر حسب g حساب کنید:

$$\langle q_1 q_2 \rangle, \qquad \langle q_1^2 \rangle, \qquad \langle q_1^2 q_2^2 \rangle. \tag{۸۶}$$

ب: تابع پارش یعنی Z را تا رتبه ۲ بر حسب g حساب کنید.



شکل ۶: (a) معادل گرافیک عبارت B از رابطه ۱۴. (b) معادل گرافیک عبارت C از رابطه ۱۳.

۱.۱۰ یک خاصیت عمومی درنمودارهای فاینمن

دراین قسمت می خواهیم یک خاصیت عمومی نمودارهای فاینمن را ثابت کنیم. نخست باید دیاگرام خلاء به خلاء را تعریف کنیم. این نوع دیاگرام دیاگرامی است که هیچ نوع پای خارجی ندارد. حال خاصیت مورد نظر را درقالب یک قضیه بیان می کنیم.

- قضیه یک : در یک تابع چند نقطه ای مثل $\langle q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} \rangle$ دیاگرام های خلاء به خلاء حذف می شوند.

شکل ۷: معادل گرافیک عبارت BC از رابطه ۱۵.

■ اثبات: می دانیم که

$$\langle q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} \rangle = \frac{\langle q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} e^V \rangle_0}{\langle e^V \rangle_0} \tag{۸۷}$$

که درآن V تابع پتانسیل است. حال صورت کسر را محاسبه می کنیم. داریم

$$\langle q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} e^V \rangle_0 = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \langle q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} V^N \rangle_0 \tag{۸۸}$$

حال عبارت $\langle q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} V^N \rangle_0$ متناظر با دیاگرامی است که درآن n نقطه خارجی معین با نام های $i_1, i_2, \cdots i_n$ به پاهای داخلی ناشی از V ها به انواع و اقسام حالات وصل شده اند . یادآوری می کنیم که هر V بسته به نوع پتانسیل را می توان به صورت یک نقطه بدون شاخص تصور کرد که از آن تعدادی خط یا پا خارج شده است. قراراست که این

پاها به نقاط خارجی و یا پاهای V های دیگر وصل شوند و درآخر سر تنها پاهای خارجی $i_1, i_2, \cdot i_n$ باقی بمانند. حال دقت می کنیم که عبارت های خلاء به خلاء از به هم پیوستن پاهای تعدادی از V ها بدست می آیند. برای آنکه یک دیاگرام خلاء به خلاء درست کنیم می بایست تعدادی مثلاً q تا از این V ها را انتخاب کنیم و پاهای آنها را به هم وصل کنیم. مجموعه تمام دیاگرام های خلاءبه خلاء ای که به این ترتیب بدست می آید را با چیزی نیست جز $\langle V^q \rangle_0$. بقیه V ها آنهایی هستند که به نحوی به یکدیگر و به پاهای خارجی وصل شده اند. مجموعه تمام این نوع دیاگرام ها را با $\langle q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} V^{N-q} \rangle_0'$ نشان می دهیم که درآن علامت « پریم » به معنای آن است که این عبارت ها شامل هیچ نوع دیاگرام های خلاءبه خلاء ای نیستند. حال دقت می کنیم که برای انتخاب q تااز V ها $\frac{N!}{q!(N-q)!}$ تا انتخاب داریم. بنابراین می توانیم عبارت (88) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} \langle q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} e^V \rangle_0 &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{q=0}^{N} \frac{N!}{q!(N-q)!} \langle V^q \rangle_0 \langle q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} V^{N-q} \rangle_0' \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \langle V^q \rangle_0 \langle q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} V^p \rangle_0' \\ &= \langle e^V \rangle_0 \langle q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} e^V \rangle_0' \end{aligned} \tag{۸۹}$$

باتوجه به رابطه (87) بدست می آوریم که

$$\langle q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} \rangle = \langle q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_n} e^V \rangle_0' \tag{۹۰}$$

که درآن علامت « پریم » به معنای آن است که هیچ نوع دیاگرام خلاء به خلاء ای در بسط دیاگرام ها نمی بایست نگاه داشته شود.

۱۱ محاسبه اختلالی تابع پارش در نظریه میدان

آنچه را که دربخش های پیشین گفتیم براحتی می توان به متغیرهای پیوسته و یا به میدان ها تعمیم داد. دراینجا خود را محدود به میدان های حقیقی می کنیم زیرا صورتبندی انتگرال مسیر برای متغیرهای فرمیونی چه از نوع گسسته و چه از نوع پیوسته یا

میدانی آن منجر به انتگرال های گراسمان می شود که فعلا خارج از برنامه درسی ماست.
بنابراین تنهاکاری که باید انجام دهیم آن است که با دقت گذار از تعداد محدودی متغیر به تعداد بی نهایت پیوسته از متغیر را انجام دهیم. برای این کار کافی است که تغییرات زیر را اعمال کنیم:

$$
\begin{aligned}
& i \longrightarrow x && j \longrightarrow y, \cdots \\
& q_i \longrightarrow \phi(x), && q_j \longrightarrow \phi(y), \\
& A_{ij} \longrightarrow A(x-y), && \Delta_{ij} \longrightarrow \Delta(x-y), \\
& \sum_i \longrightarrow \int dx. &&
\end{aligned} \tag{۹۱}
$$

در این صورت مجموعه گسسته ی $(q_1, q_2, \cdots q_N)$ به میدان پیوسته ی $\phi(x)$ تبدیل می شود. دقت کنید که شاخص پیوسته x ممکن است که یکی یا چند تا باشد، به عبارت دیگر میدان پیوسته ی ϕ می تواند روی یک فضای یک بعدی یا چندبعدی تعریف شده باشد. این ابعاد می توانند همه فضایی باشند یا اینکه یکی زمانی و بقیه فضایی باشند. به همین دلیل بسته به نوع این شاخص پیوسته می توانیم از تغییر $\sum_i \longrightarrow \int dx$ یا $\sum_i \longrightarrow \int d^D x$ یا $\sum_i \longrightarrow \int^{1+D} x$ استفاده می کنیم. در ا ین صورت تمامی روابطی که قبلا بدست آورده ایم به طور طبیعی و ساده ای به میدان های پیوسته تعمیم می یابند. در زیر این موضوع را با مثالهایی خواهیم دید.

فرض کنید که هدف ما محاسبه انتگرال زیراست :

$$
Z_0[J] = \int D\phi e^{-\frac{1}{2}\int dx \int dy \phi(x) A(x-y) \phi(y) + \int dx J(x)\phi(x)} \tag{۹۲}
$$

دراین صورت با مراجعه به روابط مربوط به انتگرال های گاووسی دربخش اول خواهیم داشت :

$$
Z_0[J] = Ce^{\frac{1}{2}\int dx \int dy J(x) \Delta(x-y) J(y)} \tag{۹۳}
$$

که درآن C یک ثابت است که درتوابع همبستگی دخالت نمی کند و Δ معکوس ماتریس A است یعنی :

$$
\int A(x-y)\Delta(y-z) dy = \delta(x-z) \tag{۹۴}
$$

تحت این شرایط خواهیم داشت :

$$
\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \Delta(x-y) \tag{۹۵}
$$

نکته ۱ :

دقت کنید که عبارت $\int dyA(x-y)\phi(y)$ برحسب ϕ خطی است. بنابراین این عبارت را می توان به صورت یک عملگر خطی بر روی ϕ نوشت:

$$\int dyA(x-y)\phi(y) = D_x\phi(x). \tag{۹۶}$$

به عنوان مثال داریم: $A(x-y)=\delta(x-y)$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} A(x-y) &= \delta(x-y) & \longrightarrow \quad & D_x\phi(x) = \phi(x), \\ A(x-y) &= f(x)\partial_x\delta(x-y) & \longrightarrow \quad & D_x\phi(x) = f(x)\partial_x\phi(x), \\ A(x-y) &= \partial_x^2\delta(x-y) + g(x)\partial_x\delta(x-y) & \longrightarrow \quad & D_x\phi(x) = \partial_x^2\phi(x) + g(x)\partial_x\phi(x). \end{aligned} \tag{۹۷}$$

بنابراین رابطه $\int A(x-y)\Delta(y-z)dy = \delta(x-z)$ به صورت زیر در می آید:

$$D_x\Delta(x-z) = \delta(x-z). \tag{۹۸}$$

این به این معناست که تابع $\Delta(x-z)$ تابع گرین مربوط به عملگر دیفرانسیلی D_x است.

- مثال: کنش یک میدان اسکالر به صورت زیر است:

$$S = \int d^4x \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right). \tag{۹۹}$$

با انتگرال گیری جزء به جزء و استفاده از این شرط مرزی که میدان ها در بی نهایت به سمت صفر میل می کنند می نویسیم:

$$S = -\frac{1}{2}\int d^4x\phi(x)(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi(x). \tag{۱۰۰}$$

تابع پارش آن به صورت زیر خواهد بود:

$$Z[j] = \int D\phi e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\left(\phi\partial_\mu\partial^\mu + m^2\phi\right) + \int d^4xj(x)\phi(x)}. \tag{۱۰۱}$$

تعمیم طبیعی روابط گسسته ای که داشتیم به حالت پیوسته به نتیجه زیر منجر می شود:

$$\frac{Z[j]}{Z(0)} = e^{\frac{1}{2}\int d^4xd^4yj(x)\Delta(x-y)j(y)} \tag{۱۰۲}$$

که در آن

$$i(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Delta(x-y) = \delta(x-y) \qquad (۱۰۳)$$

با رفتن به فضای فوریه می توان این معادله را حل کرد. می نویسیم:

$$\delta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q e^{iq(x-y)}, \qquad \Delta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q \Delta(q) e^{iq(x-y)}, \qquad (۱۰۴)$$

جایگذاری این تبدیل ها در معادله (۱۰۳) به نتیجه زیر می انجامد:

$$i(-q^2 + m^2)\Delta(q) = 1, \qquad (۱۰۵)$$

و در نتیجه

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q \frac{i}{q^2 - m^2} e^{iq(x-y)}, \qquad (۱۰۶)$$

در درس های آینده مفهوم فیزیکی تابع $\Delta(x-y)$ را به طور دقیق تر خواهیم فهمید. اما هم اکنون نیز با توجه به آنچه که خوانده ایم می توانیم ایده ای در باره مفهوم فیزیکی این تابع که به آن انتشار گر [۱۱] می گویند پیدا کنیم. برای این کار به تعریف اولیه $\Delta(x-y)$ دقت می کنیم. داریم

$$\Delta(x-y) = \langle \psi_0 | \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) | \psi_0 \rangle$$

که در آن $|\psi_0\rangle$ حالت پایه هامیلتونی است. منظور از هامیلتونی نیز هامیلتونی میدان آزاد است زیرا هر نوع جمله برهم کنشی را به صورت اختلالی بررسی می کنیم. حالت پایه میدان آزاد نیز چیزی نیست جز حالت خلاء که در آن هیچ ذره ای وجود ندارد. بنابراین به جای نماد $|\psi_0\rangle$ از نماد آشناتر $|0\rangle$ استفاده می کنیم.

در درس های آینده خواهیم دید که می توان $\hat{\phi}(x)$ را به صورتِ $\hat{\phi}^+(x) + \hat{\phi}^-(x)$ نوشت که در آن $\hat{\phi}^+(x)$ عملگر خلق کننده یک ذره در نقطه x و $\hat{\phi}^-(x)$ عمل نابود کننده ی یک ذره در نقطه x است. بنابراین با جایگذاری این عبارت ها در انتشار گر و استفاده از این که $\langle 0|\hat{\phi}^+(x) = 0$ و $\hat{\phi}^-(y)|0\rangle = 0$ درمی یابیم که

$$\Delta(x-y) = \langle 0|\hat{\phi}^-(x)\hat{\phi}^+(y)|0\rangle$$

[۱۱] propagator

اما به یاد داریم که x و y چاربردار فضازمان هستند یعنی اینکه

$$x=(t_2,\mathbf{x}) \qquad\qquad y=(t_1,\mathbf{y})$$

و میدان های بالا نیز به صورت زیر وابسته به زمان هستند:

$$\hat{\phi}^-(x)=e^{iHt_2}\hat{\phi}^-(\mathbf{x})e^{-iHt_2}, \qquad\qquad \hat{\phi}^+(y)=e^{iHt_1}\hat{\phi}^+(\mathbf{y})e^{iHt_1}.$$

بنابراین و با توجه به اینکه برای میدان آزاد $H|0\rangle=0$ به نتیجه زیر می رسیم:

$$\begin{aligned}\Delta(x-y) &= \langle 0|e^{iHt_2}\hat{\phi}^-(\mathbf{x})e^{-iH(t_2-t_1)}\hat{\phi}^+(\mathbf{y})e^{-iHt_1}|0\rangle \\ &= \langle 0|\hat{\phi}^-(\mathbf{x})e^{-iH(t_2-t_1)}\hat{\phi}^+(\mathbf{y})|0\rangle = \langle x|\hat{\phi}^-(\mathbf{x})e^{-iH(t_2-t_1)}|y\rangle. \qquad (۱۰۷)\end{aligned}$$

این عبارت آخری نشان می دهد که $\Delta(x-y)$ در واقع نشان دهنده دامنه احتمال این است که ذره ای که در زمان t_2 در نقطه $\mathbf{y}$ است در زمان t_1 در اثر تحول با هامیلتونی آزاد در لحظه t_2 در نقطه $\mathbf{x}$ پدیدار شود یا به عبارت دیگر در این فاصله زمانی از نقطه $\mathbf{y}$ به نقطه $\mathbf{x}$ انتشار یابد. به همین جهت برای این تابع نام انتشارگر انتخاب شده است. در درسهای آینده بیشتر با این تابع و اهمیت آن آشنا خواهیم شد.