

مبانی ریاضی مکانیک کوانتومی

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۱۰ اسفند ۱۳۹۶

۱ مقدمه

در این درس با ریاضیات مورد نیاز برای فهم چارچوب نظری مکانیک کوانتومی آشنا می شویم. نخست فضاهای برداری با بعد محدود را بررسی می کنیم و سپس به فضاهای برداری بی نهایت بعدی خواهیم پرداخت که این قسمت در ضمیمه ها نوشته شده است زیرا فهمیدن آن برای درک بقیه فصل ها ضروری نیست. بنابراین خواننده می تواند از خواندن ضمیمه ها صرف نظر کند.

۲ فضای برداری

مجموعه V را یک فضای برداری روی میدان اعداد F می گوئیم هرگاه دو عمل زیر تعریف شده

$$+ : V \times V \longrightarrow V \quad \text{و} \quad \cdot : F \times V \longrightarrow V \quad (1)$$

و دارای خاصیت های زیر باشند:

$$A1 : \quad x + y = y + x$$

$$A2 : \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$A3 : \quad \exists 0 \in V \mid \quad 0 + x = x$$

$$A4 : \quad \forall x \in V \quad \exists -x \in V \mid \quad -x + x = 0,$$

$$M1 : \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$M2 : \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$M3 : \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$M4 : \quad 1x = x. \tag{۲}$$

بسته به این که F میدان اعداد حقیقی R یا میدان اعداد مختلط C باشد، فضای برداری V را فضای برداری حقیقی یا مختلط می گوییم.

مثال ها: مجموعه های زیر هرکدام یک فضای برداری هستند.

۱ - R^n یا مجموعه n تایی های مرتب حقیقی،

۲ - C^n یا مجموعه n تایی مرتب مختلط،

۳ - $M_{m \times n}(F)$ یا مجموعه ماتریس های $m \times n$ که درایه های آن عناصر یک میدان F هستند،

۴ - $P_n([a, b])$ یا مجموعه چندجمله های حقیقی مرتبه n از متغیر x که درفاصله $[a, b]$ تعریف شده اند ،

۵ - $C^k[a, b]$ یا مجموعه توابع حقیقی یا مختلط k بار مشتق پذیر درفاصله $[a, b]$.

از این به بعد منحصرأ با فضاهای برداری مختلط کار می کنیم.

تعریف: هرگاه V یک فضای برداری و $W \subset V$ زیرمجموعه ای از آن باشد، آنگاه W را یک زیرفضای V می گوییم اگر W نسبت به جمع

بردارها و ضرب اعداد در بردارها بسته باشد.

۳ ضرب داخلی و اندازه

تعریف: در یک فضای برداری V یک عمل دوتایی $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow C$ را یک ضرب داخلی می نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned}\langle x, y + \alpha z \rangle &= \langle x, y \rangle + \alpha \langle x, z \rangle \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle^* \\ \langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle = 0 &\longrightarrow x = 0.\end{aligned}\tag{۳}$$

مثالهایی از ضرب داخلی:

الف - در C^n :

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i^* y_i\tag{۴}$$

ب - در $M_{n,m}$

$$\langle A, B \rangle := tr(AB^\dagger)\tag{۵}$$

ج - در $C^k[a, b]$.

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f^*(x)g(x)dx.\tag{۶}$$

فضایی را که به یک ضرب داخلی مجهز شده باشد یک فضای برداری ضرب داخلی یا *Inner product space* می گوئیم.

قضیه کوشی-شوارتز: در یک فضای ضرب داخلی داریم:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle. \quad (7)$$

اثبات: بردار $v := \alpha x + y$ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned} f(\alpha, \alpha^*) := \langle v, v \rangle &\geq 0 \longrightarrow \langle \alpha x + y, \alpha x + y \rangle \geq 0 \\ \longrightarrow |\alpha|^2 \langle x, x \rangle + \alpha^* \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle &\geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

هرگاه کمینه تابع f را پیدا کنیم به نامساوی کوشی شوارتز می‌رسیم.

اندازه یک بردار:

در فضای ضرب داخلی می‌توان اندازه یک بردار را به شکل زیر تعریف کرد:

$$|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}. \quad (9)$$

باتوجه به نامساوی کوشی شوارتز می‌توان نوشت:

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|. \quad (10)$$

مثال‌هایی از اندازه یک بردار:

الف - C^n :

$$|x|^2 := \sum_{i=1}^n x_i^* x_i \quad (11)$$

ب - در $M_{n,m}$

$$|A|^2 := tr(AA^\dagger) \quad (12)$$

ج - در $C^k[a, b]$.

$$|f| := \int_a^b f^*(x)f(x)dx. \quad (13)$$

از نامساوی کوشی شوارتز دو نتیجه مهم حاصل می شود. یکی تعریف زاویه بین دو بردار به صورت

$$\cos \phi := \frac{|\langle x, y \rangle|}{|x||y|} \quad (14)$$

و دیگری نامساوی مثلث:

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (15)$$

فضای نرْم دار یا اندازه دار: یک فضای برداری V که در آن نگاشت $\| \cdot \| : V \rightarrow R$ تعریف شده باشد را فضای اندازه دار یا *Normed Space* می گوئیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$\begin{aligned} \|v\| &\geq 0 \quad \forall v \\ \|v\| &= 0 \rightarrow v = 0 \\ \|\alpha v\| &= |\alpha| \|v\| \\ \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\|. \end{aligned} \quad (16)$$

هر فضای ضرب داخلی با همان اندازه ای که از روی ضرب داخلی تعریف می شود یک فضای اندازه دار است، ولی یک فضای اندازه دار الزاماً یک فضای ضرب داخلی نیست. به عبارت دیگر یک اندازه لزوماً از روی یک ضرب داخلی تعریف نشده است. به عنوان مثال در فضای توابع $C[a, b]$ نگاشت $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ یک اندازه است که از روی یک ضرب داخلی تعریف نشده است.

۴ پایه

پایه بهنجار $\{e_i, i = 1, \dots, N\}$ را برای فضای V در نظر می گیریم. بهنجار بودن به معنای آن است که $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. هر بردار $x \in V$ را می توان برحسب این بردارهای پایه بسط داد و نوشت:

$$x = \sum_{i=1}^N x_i e_i. \quad (17)$$

بدیهی است که

$$x_i = \langle e_i, x \rangle. \quad (18)$$

روش گرام اشمیت *Gram - Schmidt* برای ساختن پایه بهنجار

در یک فضای ضرب داخلی، از یک پایه دلخواه مثل $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ می توان به روش زیر که به روش گرام اشمیت موسوم است یک پایه

بهنجار ساخت:

قراری دهیم:

$$e_1 := \frac{v_1}{|v_1|}, \quad e_2 := \frac{v_2 - \langle e_1, v_2 \rangle e_1}{|v_2 - \langle e_1, v_2 \rangle e_1|}, \quad e_3 := \frac{v_3 - \langle e_1, v_3 \rangle e_1 - \langle e_2, v_3 \rangle e_2}{|v_3 - \langle e_1, v_3 \rangle e_1 - \langle e_2, v_3 \rangle e_2|}, \dots \quad (19)$$

خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که پایه جدید بهنجار است. تعبیر هندسی روش بالا نیز روشن و ساده است.

مثالهایی از پایه های بهنجار:

الف - در R^n و C^n :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

ب - در $M_{\mu \times n}(C), M_{m \times n}(R)$:

$$E_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1 \dots n, \quad (21)$$

که در آن E_{ij} ماتریسی است که درایه (i, j) آن برابر با ۱ و بقیه درایه های آن برابر با صفر است.

ج - در $C^k[a, b]$ ، مجموعه $\{e_n(x), f_n(x), n = 0 \dots \infty\}$ با تعریف

$$e_n(x) := \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)x, \quad f_n := \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)x. \quad (22)$$

د - در $P_n[a, b]$ ، می توان یک پایه مثل $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ در نظر گرفت و آن را با فرایند گرام-اشمیت بهنجار کرد. تکمیل این تمرین را به خواننده واگذار می کنیم.

در فضای محدود بعد وقتی که یک پایه انتخاب کردیم، می توانیم در آن پایه مولفه های بردار x را به صورت یک ماتریس ستونی به شکل

زیر بنویسیم:

$$x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \end{pmatrix}. \quad (23)$$

در این حالت مولفه های بردارهای پایه به صورت زیر خواهند بود:

$$e_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_N \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

هرگاه به جای پایه $\{e_i\}$ پایه $\{e'_i\}$ را در نظر بگیریم که در آن $e'_i = S_{ii}e_i$ آنگاه خواهیم داشت

$$x'_i = \langle e'_i, x \rangle = \langle S_{ii}e_i, x \rangle = S_{ii}x_i, \quad (25)$$

و یا به صورت فشرده تر:

$$x' = xS. \quad (26)$$

از آنجا که پایه های $\{e_i\}$ و $\{e'_i\}$ هر دو بهنجار هستند براحتی نتیجه می گیریم که ماتریس تبدیل پایه S در شرط زیر صدق می کند:

$$S^\dagger S = I \quad (27)$$

چنین ماتریس هایی را ماتریس های یکانی می گوئیم.

بدنیست در اینجا به یک تعریف دیگر اشاره کنیم. هرگاه ماتریسی بالحقاقی خود برابر باشد، آن ماتریس را خودالقا یا *Self – Adjoint* یا هرمیتی می گوئیم.

۵ فضای کامل، باناخ و هیلبرت

دنباله کوشی: در یک فضای برداری دنباله ای از بردارها مثل $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ در نظر می گیریم. این دنباله یک دنباله کوشی نامیده می شود

هرگاه فاصله بین بردارها به تدریج کم شود. به عبارت دقیقتر هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عددی مثل N یافت شود به قسمی که

$$\forall m, n > N \longrightarrow |x_n - x_m| \leq \epsilon. \quad (28)$$

در یک فضای برداری حد یک دنباله کوشی لزوماً در خود فضا قرار ندارد. به عنوان مثال هرگاه میدان اعداد گویا را به عنوان یک فضای برداری روی خودش در نظر بگیریم دنباله $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ اگرچه یک دنباله کوشی است، ولی حد آن در داخل میدان اعداد گویا قرار ندارد. با افزودن اعداد گنگ به اعداد گویا میدان اعداد حقیقی بدست می آید که کامل است یعنی حد دنباله های کوشی را در خود دارد.

فضای برداری کامل: یک فضای برداری را فضای برداری کامل می گوئیم هرگاه حد دنباله های کوشی را در خود داشته باشد.

فضای باناخ: یک فضای برداری نرم دار را که کامل باشد فضای باناخ می نامیم.

فضای هیلبرت: یک فضای ضرب داخلی را که کامل باشد فضای هیلبرت می نامیم. از آنجا که میدان اعداد حقیقی و مختلط کامل هستند، می توان ثابت کرد که هر فضای محدود بعدی که روی این میدان ها ساخته می شود نیز کامل بوده و بنابراین یک فضای هیلبرت است.

مثال: فضای توابع حقیقی $C[-1, 1]$ را با ضرب داخلی استاندارد $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^2 f(x)g(x)dx$ در نظر می گیریم. در این فضا دنباله توابع زیر را تعریف می کنیم:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{2}(nx + 1) & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \end{cases} \quad (29)$$

خواننده می تواند براحتی نشان دهد که این دنباله یک دنباله کوشی است. اما حد این دنباله تابع ناپیوسته پله است که در فضای $C[-1, 1]$ قرار ندارد. بنابراین $C[-1, 1]$ یک فضای هیلبرت نیست.

فضای $L_w^2[a, b]$: فضای توابع مختلط با ضرب داخلی $\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f^*(x) g(x) dx$ که در آن w یک تابع دلخواه مثبت است با شرط $\|f\| < \infty$ یک فضای هیلبرت است. برای اثبات این قضیه و قضیه زیر، خواننده می بایست به کتاب های آنالیز یا آنالیز تابعی مراجعه کند.

قضیه: هر فضای هیلبرت با فضایی مثل $L_w^2[a, b]$ یکسان است.

۶ تبدیلات خطی

در یک فضای برداری V ، نگاشت $\hat{T} : V \rightarrow V$ را یک تبدیل خطی یا عملگر خطی *Linear operator* می گوئیم هرگاه دارای خاصیت زیر باشد:

$$\hat{T}(x + \alpha y) = \hat{T}(x) + \alpha \hat{T}(y) \quad \forall \alpha \in F, \quad x, y \in V. \quad (30)$$

بدلیل خطی بودن، یک عملگر خطی تنها با اثرش روی بردارهای پایه مشخص می شود. می نویسیم:

$$\hat{T}e_i = \sum_{j=1}^N T_{ji} e_j \quad (31)$$

ماتریس T با درایه های T_{mn} را ماتریس مربوط به تبدیل خطی \hat{T} در پایه $\{e_i\}$ می گوئیم. هرگاه پایه فوق بهنجار باشد می توانیم بنویسیم

$$\langle e_j, \hat{T}e_i \rangle = T_{ji}. \quad (32)$$

اثر تبدیل خطی \hat{T} روی یک بردار x عبارت خواهد بود از:

$$\hat{T}x = \hat{T}x_i e_i = x_i (\hat{T}e_i) = x_i T_{ji} e_j = (T_{ji} x_i) e_j = (Tx)_j e_j \quad (33)$$

بنابراین اثر تبدیل خطی \hat{T} روی x آن است که ماتریس تبدیل خطی T از چپ در ماتریس ستونی x ضرب می شود.

هرگاه پایه را عوض کنیم ماتریس تبدیل خطی نیز عوض خواهد شد. اگر به جای پایه $\{e_i\}$ پایه $\{e'_i\}$ را در نظر بگیریم که در آن $e'_i = S_{li} e_l$

آنگاه خواهیم داشت

$$T'_{ij} = \langle e'_i, \hat{T}e'_j \rangle = \langle S_{li} e_l, \hat{T} S_{mj} e_m \rangle = S_{li}^* T_{lm} S_{mj}, \quad (34)$$

که به صورت فشرده زیرقابل بازنویسی است:

$$T' = S^\dagger T S, \quad (35)$$

که در آن S^\dagger با الحاقی ماتریس S خوانده می شود و چنین تعریف می شود:

$$S^\dagger = (S^*)^T, \quad \text{یا} \quad S_{ij}^\dagger = (S^*)_{ji}. \quad (36)$$

هرگاه \hat{A} و \hat{B} دو تبدیل خطی دلخواه روی V و α عددی دلخواه متعلق به میدان F باشد، آنگاه $\alpha\hat{A} + \hat{B}$ نیز یک تبدیل خطی روی V است. بنابراین مجموعه تبدیلات خطی روی V تشکیل یک فضای برداری می دهد که آن را با $End(V)$ نمایش می دهیم. هم چنین ضرب دو تبدیل خطی با تعریف

$$(\hat{A}\hat{B})x := \hat{A}(\hat{B}x) \quad (37)$$

نیز یک تبدیل خطی است. بنابراین $End(V)$ نه تنها یک فضای برداری است بلکه یک جبر است به این معنا که یک فضای برداری است که در آن یک عمل ضرب شرکت پذیر $(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$ تعریف شده است. این جبر جابجایی نیست ($\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$) اما یکه دار یا یونیتال ($Unital$) است به این معنا که در آن عنصری که وجود دارد (در اینجا عملگر همانی) با خاصیت زیر $\hat{A}\hat{I} = \hat{I}\hat{A} = \hat{A}$ است. دیدیم که به یک عملگر خطی می توان یک ماتریس نسبت داد. وقتی که پایه فضا را معین می کنیم بین فضای تبدیلات خطی یعنی $End(V)$ و فضای ماتریس های $M_{n \times n}(C)$ یک یکسانی بوجود می آید. بنابراین می توان از یک تبدیل خطی و یا ماتریس آن بسته به راحتی سخن گفت. می توان با تعریف زیر، فضای تبدیلات خطی روی V را به یک فضای ضرب داخلی تبدیل کرد:

$$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = tr(\hat{A}\hat{B}^\dagger) \quad (38)$$

خواننده می تواند نشان دهد که این تعریف مستقل از پایه ای است که برای فضای برداری در نظر می گیریم.

مثال هایی از تبدیلات خطی:

الف - در F^n ، هر تبدیل به صورت $x \rightarrow x' = Ax$ که در آن $A \in M_{n \times n}(F)$.

ب - در $M_{m \times n}(F)$ ، هر تبدیلی که $x \in M_{m \times n}(F)$ را به صورت زیر تبدیل می کند

$$x \rightarrow x' = AxB^T, \quad (39)$$

که در آن $A \in M_{m,m}(F)$ و $B \in M_{n,n}(F)$ می توان ثابت کرد که کلی ترین تبدیل خطی روی چنین فضایی عبارت است از جمعی از تبدیلات فوق به ترتیب زیر:

$$x \rightarrow x' := \sum_i A_i x B_i. \quad (40)$$

ج - در $C^k[a, b]$ ، بالهام از مثال یک می توانیم بگوییم که کلی ترین تبدیل خطی روی چنین فضایی، تبدیلی است که $f \in C^k(a, b)$ را به صورت زیر تبدیل می کند:

$$f(x) \rightarrow f'(x) := \int_a^b K(x, y) f(y) \quad (41)$$

که در آن $K(x, y)$ تابعی است که نسبت به هر دو مختصه خود k بار مشتق پذیر است. این تبدیل را یک تبدیل انتگرال و $K(x, y)$ را هسته آن می خوانند. در بعضی از موارد می توان تبدیل خطی را به صورت یک عملگر دیفرانسیل نیز نوشت: به عنوان مثال در فضای $C^\infty[a, b]$ یعنی فضای توابع بی نهایت مشتق پذیر تبدیلات از نوع

$$f(x) \rightarrow \frac{d^r}{dx^r} f(x) \quad \text{یا} \quad f(x) \rightarrow x^r f(x) \quad (42)$$

و هر ترکیب خطی از آنها یک عملگر خطی است مثل تبدیل زیر:

$$f(x) \rightarrow (x^2 \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} + 1) f(x). \quad (43)$$

۷ جمع نیمه مستقیم دو زیرفضا

تعریف: هرگاه V یک فضای برداری و U و W دوزیرفضای آن باشند آنگاه $U + W$ را به عنوان مجموعه زیرتعریف می کنیم:

$$U + W := \{u|v = u + w, \quad u \in U, \quad w \in W\}. \quad (44)$$

براحتی معلوم می شود که $U + W$ یک زیرفضای V است.

مثال: قرار می دهیم $V = R^3$ (تمام فضای ۳ بعدی) و $U = \{(x, y, 0)\}$ و $W = \{(0, y, z)\}$ و U و W به ترتیب صفحه xy و yz هستند.

تعریف: فرض کنید که V یک فضای برداری و U و W دو زیرفضای آن باشند به قسمی که

$$V = U + W \quad \text{الف:}$$

ب: تنها بردار مشترک بین U و W بردار صفر باشد.

در این صورت V جمع نیمه مستقیم U و W (*Semi-direct Sum*) می گوئیم و می نویسیم

$$V = U \oplus W. \quad (45)$$

هرگاه خواننده در مثال قبلی شکل زیرفضاهای U و W را رسم کند خواهد دید که V جمع مستقیم U و W نیست.

قضیه: $V = U \oplus W$ اگر و فقط اگر هر بردار $v \in V$ را بتوان به شکل یکتایی به صورت $u + w$ نوشت که در آن $u \in U$ و $w \in W$.

اثبات جهت اول: داریم $V = U \oplus W$. حال فرض کنید که v را به دو صورت زیر تجزیه کرده ایم

$$v = u + w, \quad v = u' + w'. \quad (46)$$

نتیجه می گیریم که

$$u - u' = w' - w. \quad (47)$$

از آنجا که بنابر فرض، تنها بردار مشترک بین U و W صفر است نتیجه می گیریم $u - u' = 0$ و $w' - w = 0$. بنابراین نتیجه می گیریم که تجزیه v بر حسب u و w یکتاست.

اثبات جهت دوم: فرض می کنیم که تجزیه v یکتاست. حال باید نشان دهیم که تنها برداری که بین U و W مشترک است همان بردار صفر است. بردار x را برداری می گیریم که بین U و W مشترک است. این بردار می توان به دو صورت زیر نوشت:

$$x = (0 \in V) + (x \in W), \quad \text{و} \quad x = (x \in V) + (0 \in W). \quad (48)$$

چون بنابر فرض تجزیه هر برداری یکتاست نتیجه می گیریم که $x = 0 \in V$ و $x = 0 \in W$. بنابراین تنها بردار مشترک بین U و W صفر است.

قضیه: اگر $V = U \oplus W$ ، آنگاه $\dim V = \dim U + \dim W$.

اثبات: پایه $\{e_1, \dots, e_m\}$ را برای U و پایه $\{e_{m+1}, \dots, e_{m+n}\}$ را برای W در نظر می‌گیریم. از آنجا که هر بردار $v \in V$ را می‌توان به طور یکتا به صورت $v = u + w$ تجزیه کرد خواهیم داشت

$$v = u + w = \sum_{i=1}^m u_i e_i + \sum_{j=m+1}^{m+n} w_j e_j. \quad (49)$$

بنابراین $\{e_1, e_2, \dots, e_{m+n}\}$ یک پایه برای V تشکیل می‌دهد و در نتیجه $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$.

تعریف: فرض کنید که $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$. در این صورت هر بردار $v \in V$ به صورت یکتای $v = v_1 + v_2 + \dots + v_r$ تجزیه می‌شود. P_j را عملگری تعریف کنید که کارزیرانجام می‌دهد:

$$P_j v = v_j. \quad (50)$$

در این صورت P_j را عملگر تصویر روی زیرفضای V_j می‌خوانیم.

قضیه: عملگرهای تصویر خاصیت‌های زیر را دارند:

$$\begin{aligned} P_j P_k &= \delta_{jk} P_j \\ \sum_{j=1}^r P_j &= I \end{aligned} \quad (51)$$

اثبات خاصیت اول ساده است. برای تساوی دوم قرار می‌دهیم

$$v = \sum_{j=1}^r v_j = \sum_{j=1}^r P_j v \quad (52)$$

چون این رابطه برای هر بردار v صحیح است، خاصیت دوم را نتیجه می‌گیریم.

قضیه: هرگاه V یک فضای ضرب داخلی باشد و $V = \bigoplus_{j=1}^r V_j$ که در آن V_j ها برهم عمود هستند، آنگاه عملگرهای P_j هرمیتی هستند.

اثبات: به ازای هر بردار v و w داریم

$$\langle v, P_j w \rangle = \langle v, w_j \rangle \quad (53)$$

اما به خاطر عمود بودن زیرفضاها برهم طرف راست برابراست با $\langle v_j, w_j \rangle$ و یا $\langle P_j v, w_j \rangle$ و یا $\langle P_j v, w \rangle$. بنابراین P_j هرمیتی است.

۸ مسئله ویژه مقدار

عملگر $\hat{T} : V \rightarrow V$ را در نظر می گیریم. مسئله ویژه مقدار عبارت است از یافتن بردارهای غیرصفری است که تحت اثر \hat{T} به مضربی از خود تبدیل شوند، یعنی

$$Tx = \lambda x \quad (54)$$

بردار x غیر صفر خواهد بود هرگاه ماتریس $T - \lambda I$ وارون پذیر نباشد یعنی اینکه

$$\det(T - \lambda I) = 0. \quad (55)$$

این معادله یک معادله درجه N است که درحوزه اعداد مختلط حتماً N تا جواب دارد که آنها را با $\{\lambda_i, i = 1, \dots, N\}$ نشان می دهیم و آن هارا ویژه مقدارهای تبدیل \hat{T} می گوئیم. این جواب ها لزوماً همه باهم متفاوت نیستند.

بردار مربوط به λ_i را که در معادله $Tv_i = \lambda_i v_i$ صدق می کند ویژه بردار مربوط به آن ویژه مقدار می گوئیم.

هرگاه که یک ویژه مقدار مثل λ_i, g_i بار تکرار شود گوئیم درجه واگنی آن g_i است.

هرگاه x و y ویژه بردار مربوط به λ باشند بدیهی است که هر ترکیب خطی آنها نیز ویژه بردار مربوط به λ است. بنابراین مجموعه بردارهای متعلق به یک ویژه مقدار تشکیل یک زیرفضای دهند که آن را ویژه فضای مربوط به آن ویژه مقدار می گویند.

۹ عملگرهای هرمیتی، یکانی و بهنجار

تعریف: در یک فضای ضرب داخلی، الحاقی یا *Adjoint* یک عملگر T عملگری مثل \hat{T}^\dagger است که در شرط زیر صدق کند:

$$\langle v, \hat{T}w \rangle = \langle \hat{T}^\dagger v, w \rangle \quad \forall v, w \in V. \quad (56)$$

با استفاده از این تعریف می توان براحتی خواص زیر اثبات کرد:

الف : الحاقی یک عملگر خطی خود یک عملگر خطی است.

ب :

$$\begin{aligned}(cA + B)^\dagger &= c^*A^\dagger + B^\dagger \quad \forall c \in C, \text{ و } A, B \\ (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger \\ (A^\dagger)^\dagger &= A.\end{aligned}\tag{57}$$

عملگر هرمیتی: در یک فضای ضرب داخلی عملگر هرمیتی به عملگری گفته می شود که در شرط $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$ صدق کند.

عملگر پاد هرمیتی به عملگری گفته می شود که در شرط $\hat{T}^\dagger = -\hat{T}$ صدق کند.

مثال: در فضای $C^\infty[a, b]$ عملگر $D := \frac{\partial}{\partial x}$ را در نظر می گیریم. این عملگر در زیر فضایی که از توابع تناوبی تشکیل می شود (باش شرط $f(a) = f(b)$) پاد هرمیتی است. در نتیجه عملگر $P := -iD$ در این زیر فضا هرمیتی خواهد بود.

عملگر یکانی: در یک فضای ضرب داخلی، عملگری یکانی U به عملگری گفته می شود که ضرب داخلی بردارها را حفظ کند، یعنی

$$\langle \hat{U}v, \hat{U}w \rangle = \langle v, w \rangle.\tag{58}$$

چنین عملگری در شرط $UU^\dagger = U^\dagger U = I$ صدق می کند.

قضیه: عملگری U یکانی است اگر و فقط اگر اندازه همه بردارها را حفظ کند.

اثبات: اگر U یکانی باشد با استفاده از 58 معلوم می شود که اندازه بردارها را حفظ می کند. حال فرض کنید که U اندازه همه بردارها را حفظ کند. به ازای هر دو بردار دلخواه x, y می دانیم که

$$\|Ux\| = \|x\|, \quad \|Uy\| = \|y\|, \quad \|U(x+y)\| = \|x+y\|, \quad \|U(x+iy)\| = \|x+iy\|.\tag{59}$$

از این روابط نتیجه می گیریم که $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$.

خواننده می تواند ثابت کند که ماتریس مربوط به یک عملگر هرمیتی یا یکانی، ماتریس هرمیتی یا یکانی است.

عملگر بهنجاری نرمال: عملگر نرمال عملگری است که بالحاقی خود جابجاشود. طبیعی است که یک عملگر هرمیتی ویکانی نرمال است.

قضیه: عملگر A بهنجار است اگر و فقط اگر به ازای هر بردار x داشته باشیم

$$\|Ax\| = \|A^\dagger x\|. \quad (60)$$

اثبات: اثبات جهت اول: اگر A بهنجار باشد داریم $AA^\dagger = A^\dagger A$. بنابراین

$$\langle Ax, Ax \rangle = \langle A^\dagger Ax, x \rangle = \langle AA^\dagger x, x \rangle = \langle A^\dagger x, A^\dagger x \rangle. \quad (61)$$

اثبات جهت دوم: از تساوی (60) برای برای $x, y, x + iy$ و $x + y$ که در آن x و y دوبردار دلخواه هستند نتیجه می گیریم

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^\dagger x, A^\dagger y \rangle, \quad \forall x, y. \quad (62)$$

در نتیجه

$$\langle A^\dagger Ax, y \rangle = \langle AA^\dagger x, y \rangle, \quad (63)$$

و یا

$$\langle (A^\dagger A - A^\dagger A)x, y \rangle = 0. \quad (64)$$

چون x و y دلخواه هستند نتیجه می گیریم که $A^\dagger A = AA^\dagger$ و بنابراین A یک عملگر بهنجار است.

قضیه: فرض کنید که A یک عملگر بهنجار است. در این صورت اگر $Ax = \lambda x$ آنگاه $A^\dagger x = \lambda^* x$.

اثبات: اگر A بهنجار باشد آنگاه $A - \lambda I$ نیز بهنجار است. حال از قضیه قبل استفاده می کنیم:

$$\|(A - \lambda I)x\| = 0 \rightarrow \|(A - \lambda I)^\dagger x\| = 0 \rightarrow \|(A^\dagger - \lambda^* I)x\| = 0 \rightarrow A^\dagger x = \lambda^* x. \quad (65)$$

از این قضیه دو نتیجه ساده بدست می آید:

نتیجه اول: ویژه مقادیر یک عملگر هرمیتی حقیقی هستند.

نتیجه دوم؛ ویژه مقادیر یک عملگریکانی فازخالص هستند.

قضیه: ویژه بردارهای یک عملگر نرمال که متناظراً ویژه مقادیرهای متمایز هستند برهم عمودند.

اثبات: فرض کنیم $Ax = \lambda x$ و $Ay = \mu y$. در این صورت

$$\langle x, \mu y \rangle = \langle x, Ay \rangle = \langle A^\dagger x, y \rangle = \langle \lambda^* x, y \rangle, \quad (66)$$

و از آنجا

$$\rightarrow (\mu - \lambda) \langle x, y \rangle = 0 \rightarrow \langle x, y \rangle = 0. \quad (67)$$

۱۰ تجزیه طیفی

قضیه: در یک فضای محدود بعد ویژه بردارهای یک عملگر بهنجار یک پایه برای فضا تشکیل می دهند.

با انتخاب یک پایه برای فضای توان اثبات خیلی ساده تری نسبت به آنچه که در کلاس گفته شد از این قضیه بدست داد. عملگر نرمال A روی فضای V را در نظر می گیریم. می دانیم که هر عملگر حتماً یک ویژه مقدار و یک ویژه بردار دارد. این ویژه مقدار و ویژه بردار مربوطه را با λ_1 و e_1 نشان می دهیم:

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1. \quad (68)$$

پایه ای برای فضا انتخاب می کنیم که e_1 اولین عضو آن باشد. در این صورت ماتریس عملگر A به شکل زیر درمی آید:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{n-1} \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix} \quad (69)$$

که در آن A_{n-1} یک ماتریس $n-1$ بعدی و b_{n-1} یک بردار سطری $n-1$ بعدی است. اما از قضیه های قبل می دانیم که اگر $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ آنگاه $A^\dagger e_1 = \lambda_1^* e_1$. در این جا از بهنجاری بودن عملگر A استفاده کرده ایم. بنابراین ماتریس A^\dagger نیز می بایست به فرم بالامثلثی باشد و در نتیجه می بایست $b_{n-1} = 0$. پس A به شکل بلوکه قطری زیر درمی آید:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (70)$$

حال A_{n-1} به نوبه خود یک عملگر نرمال است و حداقل یک ویژه مقدارویک ویژه بردار دارد. همین استدلال را در مورد آن تکرار می کنیم و می بینیم که در پایه ای که اولین و دومین عنصر آن e_1 و e_2 هستند ماتریس عملگر A به شکل زیر درمی آید:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (71)$$

با تکرار این عمل می بینیم که در پایه ویژه بردارهای A یعنی پایه $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ، A به طور کامل قطری می شود.

این موضوع برای عملگرهای ماتریس های نابهنجار صادق نیست. به عنوان مثال، ماتریس زیر را در نظر می گیریم

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0. \quad (72)$$

ویژه مقدارهای این ماتریس هردو برابر یک هستند. اما تنها یک ویژه بردار برای این ماتریس وجود دارد که به شکل $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ است. بنابراین ویژه بردارهای این ماتریس نمی توانند یک پایه برای فضا تشکیل دهند.

۱.۱۰ قطری کردن

دیدیم که یک عملگر نرمال در پایه ویژه بردارهای خود قطری است. این امر به این معناست که یک تبدیل یکانی وجود دارد که ماتریس عملگر A را قطری می کند. برای پیدا کردن فرم صریح این تبدیل یکانی به ترتیب زیر عمل می کنیم. ویژه مقدارها و ویژه بردارهای A را پیدایمی کنیم:

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (73)$$

می دانیم که ویژه بردارهای متناظر با ویژه مقادیرهای متمایز برهم عمود هستند. ویژه بردارهای مربوط به یک ویژه مقدارواگن را نیز با روش گرام اشمیت برهم عمود می کنیم. در نتیجه این ویژه بردارها در شرایط $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ صدق می کنند. اگر e_i ها را به صورت بردارهای ستونی در نظر بگیریم، e_i^\dagger ها به صورت بردارهای سطری در خواهند آمد و رابطه بهنجار بودن آنها به شکل زیر بیان می شود $e_i^\dagger e_j = \delta_{ij}$. حال ماتریس S را به شکل زیر می نویسیم:

$$S = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \quad (74)$$

که در آن e_i ها به عنوان بردارهای ستونی در S قرار گرفته اند. در نتیجه خواهیم داشت

$$S^\dagger = \begin{pmatrix} e_1^\dagger \\ e_2^\dagger \\ \cdot \\ \cdot \\ e_N^\dagger \end{pmatrix}. \quad (75)$$

بدلیل شرط $e_i^\dagger e_j = \delta_{ij}$ نتیجه می گیریم که

$$S^\dagger S = \begin{pmatrix} e_1^\dagger \\ e_2^\dagger \\ \cdot \\ \cdot \\ e_N^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} = I, \quad (76)$$

یعنی S یکانی است.

از آنجا که $Ae_i = \lambda_i e_i$ ، بدست می آوریم

$$AS = A \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e_1 & \lambda_2 e_2 & \cdots & \lambda_n e_n \end{pmatrix} \quad (77)$$

و در نتیجه

$$S^\dagger AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (78)$$

بنابراین A بایک تبدیل یکانی قطری شده است.

قضیه: دو عملگر نرمال A و B بایکدیگر جابجایی شوند اگر و فقط اگر بتوان برای آنها یک مجموعه کامل از ویژه بردارهای مشترک یافت. این قضیه را به شکل دیگری نیز می توان بیان کرد و آن اینکه اگر دو عملگر نرمال بایکدیگر جابجاشوند حتماً می توان پایه ای یافت که در آن هر دو عملگر قطری باشند. باید تاکید کنیم که این خاصیت برای هر پایه دلخواهی برقرار نیست و قضیه تنهایی گوید که می توان پایه ای یافت که در آن این خاصیت برقرار باشد.

این قضیه هم از نظر مفهومی و هم از نظر کاربردی اهمیت زیادی در مکانیک کوانتومی دارد و خواننده می بایست به دقت اثبات آنرا فرا بگیرد. اثبات: فرض کنیم که A و B دو عملگر باشند که یک مجموعه ویژه بردار مشترک مثل $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ داشته باشند. از آنجا که این دو عملگر هرمیتی هستند این مجموعه را می توان به عنوان پایه فضانتخاب کرد. در این پایه داریم

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad Be_i = \mu_i e_i \quad (79)$$

که از آن نتیجه می گیریم

$$ABe_i = BAe_i \longrightarrow AB = BA \longrightarrow [A, B] = 0. \quad (80)$$

برعکس فرض کنیم که $[A, B] = 0$.

ویژه بردارهای عملگر A را پیدا می کنیم. واگنی ویژه مقدار λ_i را g_i می نامیم. در پایه ویژه بردارهایش، A شکل زیر را پیدای کند.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{g_1 \times g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{g_k \times g_k} \end{pmatrix} \quad (81)$$

حال به ترتیب زیر عمل می کنیم: به ازای هر e_i

$$A(Be_i) = B(Ae_i) = B(\lambda_i e_i) = \lambda_i (Be_i), \quad (82)$$

که در آن از جابجاشدن A و B استفاده کرده ایم. رابطه فوق نشان می دهد که بردار Be_i نیز یک ویژه بردار عملگر A با ویژه مقدار λ_i است. بنابراین Be_i نیز برحسب بردارهای پایه ویژه فضای λ_i قابل بسط است. این امر به این معناست که در این پایه (همان پایه ای که A در آن قطری است) عملگر B به شکل زیر است:

$$B = \begin{pmatrix} B_{1g_1 \times g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{kg_k \times g_k} \end{pmatrix}. \quad (83)$$

به عبارت دیگر در پایه فوق عملگر A قطری و عملگر B بلوکه قطری شده است. حال می توان با تبدیل

$$S = \begin{pmatrix} S_{1g_1 \times g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & S_{kg_k \times g_k} \end{pmatrix}. \quad (84)$$

که در آن S_i قطری کننده ماتریس B_i است کل ماتریس B را قطری کرد. این تبدیل قطری بودن A را دست نمی زند زیرا $S_i^\dagger S_i = I_i$. پایه جدید پایه ای است که در آن هر دو عملگر قطری هستند.

۲.۱۰ نمادگذاری دیراک

یک فضای برداری N بعدی با پایه بهنجار $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ در نظر می‌گیریم. هر بردار $v \in V$ بسطی از بردارهای پایه به شکل زیر است:

$$v = \sum_{i=1}^N v_i e_i \quad (۸۵)$$

ضرب داخلی این بردار در خودش به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^N v_i^* v_i. \quad (۸۶)$$

می‌توان به ازای هرچنین برداری یک بردار سطر $\langle v|$ و یک بردار ستونی $|v\rangle$ به شکل زیر تعریف کرد:

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \quad (۸۷)$$

و

$$\langle v| = \left(v_1^*, v_2^*, \dots, v_N^* \right). \quad (۸۸)$$

بردار $|v\rangle$ را یک بردار *ket* و بردار $\langle v|$ را یک بردار *Bra* نام می‌نهم. حال به این نکته توجه می‌کنیم که این دو بردار را می‌توانیم در یکدیگر ضرب کنیم:

$$\langle v|v\rangle = \sum_{i=1}^N v_i^* v_i = \langle v, v \rangle. \quad (۸۹)$$

طرف راست یک ضرب داخلی است ولی طرف چپ ضرب دو ماتریس است. خوبی نمادگذاری دیراک آن است که انواع عملیاتی را که مامی خواهیم روی بردارها انجام دهیم به عملیاتی از نوع ضرب ماتریس هاتقلیل می‌دهد.

بردارهای پایه e_1, \dots, e_N نیز نمایش کت و برای زیر را پیدامی کنند:

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad |N\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (90)$$

$$\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \langle 2| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \langle N| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (91)$$

بنابراین داریم :

$$|v\rangle := \sum_{i=1}^n v_i |i\rangle. \quad (92)$$

$$\langle v| := \sum_{i=1}^n v_i^* \langle i|. \quad (93)$$

ازاین به بعد تمام بردارها را به صورت کت و برا نمایش می دهیم و از نوشتن بردارها به صورت $v = \sum_{i=1}^n e_i$ صرف نظر می کنیم. می توان یک بردار برا مثل $\langle v|$ و یک بردار کت مثل $|w\rangle$ را به صورت درهم ضرب کرد و یک عدد بدست آورد که به آن براکت می گوییم

$$\langle v|w\rangle := \sum_{i=1}^n v_i^* w_i, \quad (94)$$

که درواقع همان ضرب داخلی بین دو بردار w و v است. این براکت دارای خاصیت های زیراست:

$$\begin{aligned} \langle v|w + w'\rangle &= \langle v|w\rangle + \langle v|w'\rangle \\ \langle v|cw\rangle &= c\langle v|w\rangle \\ \langle cv|w\rangle &= c^*\langle v|w\rangle \\ \langle v|v\rangle &\geq 0 \\ \langle v|v\rangle &= 0 \longrightarrow |v\rangle = \langle v| = 0 \end{aligned} \quad (95)$$

براحتی می توان دید که:

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^N v_i |i\rangle, \langle i|v\rangle = v_i. \quad (96)$$

می توان یک بردار کت مثل $|v\rangle$ و یک بردار برا مثل $\langle w|$ را به صورت درهم ضرب کرد و یک ماتریس بدست آورد:

$$|v\rangle\langle w| := \begin{pmatrix} v_1 w_1^* & v_1 w_2^* & v_1 w_3^* & \cdots & v_1 w_n^* \\ v_2 w_1^* & v_2 w_2^* & v_2 w_3^* & \cdots & v_2 w_n^* \\ v_3 w_1^* & v_3 w_2^* & v_3 w_3^* & \cdots & v_3 w_n^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_n w_1^* & v_n w_2^* & v_n w_3^* & \cdots & v_n w_n^* \end{pmatrix} \quad (97)$$

واضح است که :

$$\begin{aligned} |v\rangle\langle w + w'| &= |v\rangle\langle w| + |v\rangle\langle w'| \\ |v\rangle\langle cw| &= c^* |v\rangle\langle w| \\ |cv\rangle\langle w| &= c |v\rangle\langle w|. \end{aligned} \quad (98)$$

مهمترین روابطی که در مورد بردارهای کت و برا می بایست به یاد داشته باشیم و دائماً از آنها استفاده کنیم روابط زیر است:

$$\begin{aligned} \langle i|j\rangle &= \delta_{ij} \\ \sum_i |i\rangle\langle i| &= I \end{aligned} \quad (99)$$

نمایش دیراک این حسن بسیار مهم را دارد که بسیاری از روابط دیگر نظیر آنچه را که در بخش های پیشین دیدیم به استفاده ساده ای از این دو رابطه تقلیل پیدا می کنند. به عنوان مثال می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} |v\rangle &= I|v\rangle = \sum_{i=1}^N |i\rangle\langle i|v\rangle = \sum_{i=1}^N v_i |i\rangle, \\ T &= \sum_j |j\rangle\langle j|T \sum_i |i\rangle\langle i| = \sum_{i,j} T_{ji} |j\rangle\langle i|, \\ \langle i|AB|j\rangle &= \sum_k \langle i|A|k\rangle\langle k|B|j\rangle \end{aligned} \quad (100)$$

رابطه اول بسط یک بردار برحسب بردارهای پایه را بیان می کند، رابطه دوم بسط یک عملگر را برحسب عملگرهای پایه $|i\rangle\langle j|$ بیان می کند و بالاخره رابطه آخر در واقع بیان می کند که ماتریس حاصلضرب دو تبدیل خطی برابر است با حاصل ضرب ماتریس های آن دو تبدیل خطی.

هرگاه پایه فضای برداری را عوض کنیم مولفه های یک بردار عوض می شوند. نحوه عوض شدن به ترتیب زیر است:

$$v'_i := \langle i'|v\rangle = \sum_{j=1}^n \langle i'|j\rangle \langle j|v\rangle \longrightarrow v'_i = \sum_{j=1}^n S_{ij} v_j \quad (101)$$

یا به صورت ماتریسی :

$$v' := Sv \quad (102)$$

که در آن ماتریس مربعی S با درایه های $\langle i'|j\rangle := S_{ij}$ ماتریس تبدیل پایه است.

هم چنین تحت تغییر پایه درایه های یک تبدیل خطی نیز عوض می شوند. به شکل زیر:

$$\langle i'|T|j'\rangle = \sum_{i,j} \langle i'|i\rangle \langle i|T|j\rangle \langle j|j'\rangle \longrightarrow T' := STS^{-1}. \quad (103)$$

۱۱ نگاشت بین فضای کت ها و فضای براها

بین فضای کت ها و فضای براها می توان نگاشتی به شکل زیر تعریف کرد:

$$\dagger : |v\rangle \longrightarrow \langle v|, \quad \dagger : \langle v| \longrightarrow |v\rangle. \quad (104)$$

براحتی دیده می شود که این نگاشت که نگاشت الحاقی نامیده می شود خواص زیر را دارد:

$$\begin{aligned} |cv\rangle^\dagger &= c^* \langle v| \\ |v+w\rangle^\dagger &= \langle v+w| \\ (|v\rangle^\dagger)^\dagger &= |v\rangle \end{aligned} \quad (105)$$

با توجه به اینکه عملگر الحاقی هم روی کت ها و هم روی براها اثر می کند می توان آن را روی تبدیل های خطی نیز اعمال کرد به این معنا که:

$$\dagger(A) = \dagger \left(\sum_{i,j} A_{ij} |i\rangle \langle j| \right) = \sum_{i,j} A_{ij}^* |j\rangle \langle i| \quad (106)$$

در نتیجه هرگاه به عملگرها به شکل ماتریس نگاه کنیم خواهیم داشت :

$$A^\dagger = (A^*)^T \quad (107)$$

که در آن نماد T به معنای ترانپوز ماتریس است.

با استفاده از این تعریف می توان براحتی نشان داد که :

$$|w\rangle = T|v\rangle \longrightarrow \langle w| = \langle v|T^\dagger \quad (108)$$

و با استفاده از رابطه اخیر می توان صحت روابط زیر را در مورد عملگرها و الحاقی آنها تحقیق کرد:

$$\begin{aligned} (AB)^\dagger &= B^\dagger A^\dagger, \\ (cA)^\dagger &= c^* A^\dagger, \\ ((A)^\dagger)^\dagger &= A \\ (A+B)^\dagger &= A^\dagger + B^\dagger. \end{aligned} \quad (109)$$

عملگرهای تصویرگر:

فضای برداری V و یک زیرفضای آن مثل W در نظر می گیریم. برای W یک پایه مثل $\{|i\rangle, i = 1, \dots, m\}$ در نظر می گیریم. در این صورت عملگر

$$P_W := \sum_{i=1}^m |i\rangle \langle i| \quad (110)$$

عملگر تصویرروی V خوانده می شود. این عملگر بردارهای فضا را بروی W تصویری کند. این عملگر هرمیتی است و در شرط $P^2 = P$ صدق می کند.

عملگر مثبت: عملگر T را مثبت می‌گوییم هرگاه

$$\langle v|T|v \rangle \geq 0 \quad \forall v. \quad (111)$$

واضح است که یک عملگر مثبت حتماً دارای ویژه مقادیر بزرگتر یا مساوی با صفر است. هرگاه چنین عملگری بهنجار باشد دارای یک تجزیه طیفی است. یعنی:

$$T = \sum_i \lambda_i P_i, \quad (112)$$

در این صورت می‌توان جذراین عملگر را به صورت زیر تعریف کرد:

$$T^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^k \lambda_i^{\frac{1}{2}} P_i. \quad (113)$$

توابع عملگرهای نرمال:

در مکانیک کوانتومی اغلب نیاز داریم که توابعی از عملگرهای هرمیتی را تعریف کنیم. فرض کنید که T یک عملگر دلخواه و $f: C \rightarrow C$ تابعی با بسط زیر باشد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \quad (114)$$

در این صورت تابع $f(T)$ نیز با همین بسط تعریف می‌شود.

$$f(T) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n T^n. \quad (115)$$

قضیه: اگر T یک عملگر بهنجار باشد تابع $f(T)$ همواره یک چند جمله‌ای خواهد بود.

اثبات: چون T بهنجار است داریم

$$T = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i, \quad (116)$$

و از آنجا

$$T^n = \sum_{i=1}^k \lambda_i^n P_i \quad (117)$$

حال می توانیم عملگرهای تصویرگر P_i را برحسب T و توان های آن بنویسیم. فرض کنید که $P_j = g_j(T)$. در این صورت خواهیم داشت

$$P_j := g_j(T) = g_j\left(\sum_i \lambda_i P_i\right) = \sum_i g_j(\lambda_i) P_i \quad (118)$$

که از آن نتیجه می گیریم $g_j(\lambda_i) = \delta_{ij}$. بنابراین هر تابع $g_j(x)$ می بایست چنان باشد که به ازای $x = \lambda_j$ مقدار آن برابر با ۱ و به ازای $x \neq \lambda_j$ مقدار آن برابر با صفر باشد. چنین تابعی فرم زیر را دارد:

$$g_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \quad (119)$$

در نتیجه

$$P_j \equiv g_j(T) = \prod_{k \neq j} \frac{T - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}. \quad (120)$$

این رابطه نشان می دهد که هر عملگر تصویرگر چیزی نیست جز یک چند جمله ای برحسب T و در نتیجه تابع $f(T)$ نیز چیزی جز یک چند جمله ای برحسب T نخواهد بود.

۱.۱۱ تجزیه قطبی یک عملگر Polar Decomposition

بین اعداد مختلط و عملگرها تناظر جالبی وجود دارد به این معنا که اگر یک عدد مختلط z را متناظر با یک ماتریس یا عملگر دلخواه مختلط بگیریم، آنگاه یک عدد حقیقی متناظر با یک عملگر هرمیتی، یک عدد موهومی خالص متناظر با یک عملگر پاد هرمیتی و یک عدد مثبت متناظر با یک عملگر مثبت است. هم چنین یک عدد مختلط که یک فاز خالص است متناظر با یک عملگر یکانی است. این تناظر را می توان به بیش از این نیز گسترش داد و آن اینکه همچنان که یک عدد مختلط را می توان در مختصات قطبی به شکل $z = re^{i\theta}$ یک عملگر دلخواه را نیز می توان به صورت قطبی تجزیه کرد. قضیه زیر این موضوع را بیان می کند:

قضیه: تجزیه قطبی Polar Decomposition اگر A یک عملگر دلخواه روی یک فضای برداری V باشد، آنگاه می توان نوشت

$$A = UJ \quad (121)$$

که در آن J عملگر مثبت و U یک عملگر یکانی است که در رابطه

$$UU^\dagger = I$$

صدق می کند. توجه به این نکته مهم است که عملگر A و عملگر U الزاماً مربعی نیستند و هم چنین رابطه $U^\dagger U = I$ الزاماً برقرار نیست. مثالی که در زیر ارائه خواهیم کرد این موضوع را روشن خواهد کرد.

اثبات: می دانیم که عملگر $J := \sqrt{A^\dagger A}$ یک عملگر مثبت و بهنجار است. بنابراین می توان درپایه ای آن را قطری کرد، یعنی

$$J|i\rangle = \lambda_i|i\rangle, \quad \lambda_i \geq 0. \quad (122)$$

برای ویژه بردارهایی که ویژه مقدار λ_i مخالف صفر است قرار می دهیم:

$$|e_i\rangle := \frac{A|i\rangle}{\lambda_i}. \quad (123)$$

این بردارها یک مجموعه بردار متعامد یکه تشکیل می دهند، زیرا:

$$\langle e_i|e_j\rangle = \frac{1}{\lambda_i\lambda_j} \langle i|A^\dagger A|j\rangle = \frac{1}{\lambda_i\lambda_j} \langle i|J^2|j\rangle = \delta_{ij}. \quad (124)$$

حال عملگر زیر را می سازیم:

$$U := \sum_i |e_i\rangle\langle i|. \quad (125)$$

حال نشان می دهیم که اثر عملگر UJ و A روی پایه $\{|i\rangle\}$ یکسان است. اگر $\lambda_i = 0$ آنگاه

$$UJ|i\rangle = 0 \quad A|i\rangle = 0. \quad (126)$$

این که چرا $A|i\rangle = 0$ از این ناشی می شود که اندازه این بردار یعنی $\langle i|A^\dagger A|i\rangle$ برابر با صفر است. اگر هم $\lambda_i \neq 0$ ، آنگاه

$$UJ|i\rangle = U\lambda_i|i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle, \quad A|i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle. \quad (127)$$

بنابراین این دو عملگر باهم مساوی هستند و در نتیجه $A = UJ$.

مثال: عملگر زیر را در نظر می گیریم:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

بدست می آوریم:

$$J^2 = A^\dagger A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ویژه مقدارها و ویژه بردارهای این عملگر عبارتند از:

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0, \quad (128)$$

عبارتند از:

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (129)$$

در نتیجه بدست می آوریم:

$$J = \sqrt{J^2} = \sqrt{3}|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -3 + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ -3 + \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 3 + \sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (130)$$

هم چنین داریم:

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}A|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |e_2\rangle = A|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (131)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$U = |e_1\rangle\langle 1| + |e_2\rangle\langle 2| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 2 & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 2 & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (132)$$

حال خواننده می تواند نشان دهد که واقعا

$$A = UJ, \quad UU^\dagger = I_2.$$

که در آن I_2 ماتریس واحد دو بعدی است.

دقت کنید که عدد مختلط z را می توان تنها به یک صورت $z = re^{i\theta} = e^{i\theta}r$ تجزیه قطبی کرد، اما یک ماتریس A را می توان به دو صورت $A = UJ$ و یا $A = VK$ تجزیه قطبی کرد. برای بدست آوردن تجزیه دوم از ماتریس مثبت $K = AA^\dagger$ شروع می کنیم و همان مراحل بالا را تکرار می کنیم.

۲.۱۱ تجزیه مقدار منفرد Singular Value Decomposition

تاکنون دیدیم که عملگرهای بهنجار را می توان قطری کرد. قضیه زیر تعمیمی است که نشان می دهد قطری کردن یک ماتریس یا عملگر دلخواه چگونه انجام می شود.
قضیه: تجزیه منفرد: یک ماتریس مربعی دلخواه A را همواره می توان به صورت $A = UDV$ نوشت که در آن D یک ماتریس قطری است و U و V ماتریس های یکانی هستند.

اثبات: ماتریس A را تجزیه قطبی می کنیم و می نویسیم

$$A = UJ. \quad (۱۳۳)$$

از آنجا که J یک ماتریس مثبت و در نتیجه هرمیتی است می توان آن را قطری کرد و نوشت $J = V^\dagger DV$ که در آن V یک ماتریس یکانی است. بنابراین

$$A = UJ = U(V^\dagger DV) = (UV^\dagger)DV = U'DV \quad (۱۳۴)$$

که در آن U' و V یکانی هستند.

۱۲ ضرب تانسوری فضاها برداری

برای سادگی در این درس ضرب تانسوری دو فضای برداری را به طور مجرد و مستقل از پایه تعریف نمی کنیم. برای چنین تعریفی خواننده می تواند به هر کتاب جبرخطی مراجعه کند.

هرگاه $(A)_{m \times n}$ و $(B)_{p \times q}$ دو ماتریس با ابعاد داده شده باشند می توان ضرب تانسوری آنها را که ماتریسی با ابعاد $(mp \times nq)$ است به شکل زیر تعریف کرد:

$$(A \otimes B)_{ij,kl} := A_{ik} B_{jl} \quad (135)$$

به لحاظ عملی ضرب این دو ماتریس به شکل زیر محاسبه می شود:

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad (136)$$

این ضرب دارای خواص زیراست که خواننده می تواند با استفاده از تعریف صحت آنها را تحقیق کند:

$$\begin{aligned} A \otimes (B + C) &= A \otimes B + A \otimes C \\ A \otimes (\alpha B) &= (\alpha A) \otimes B = \alpha(A \otimes B) \\ (A \otimes B) \otimes C &= A \otimes (B \otimes C) \\ (A \otimes B)(C \otimes D) &= AC \otimes BD \\ (A \otimes B)^\dagger &= A^\dagger \otimes B^\dagger \end{aligned} \quad (137)$$

حال اگر فضای برداری V با بردارهای پایه $\{|i\rangle, i = 1, \dots, n\}$ و فضای برداری W با بردارهای پایه $\{|\mu\rangle, \mu = 1 \dots m\}$ را در نظر بگیریم، می توان ضرب تانسوری بردارهای پایه را مطابق با تعریف بالا بدست آوریم. به این ترتیب mn بردار پایه به شکل $|i\rangle \otimes |\mu\rangle$ بدست می آوریم که آنها را به اختصار با $|i, \mu\rangle$ نمایش می دهیم:

$$|i, \mu\rangle := |i\rangle \otimes |\mu\rangle \quad i = 1 \dots m, \mu = 1 \dots n. \quad (138)$$

این بردارهای جدید یک فضای mn بعدی را جاروب می کنند که آن را ضرب تانسوری فضاها V و W می خوانیم. درحقیقت داریم:

$$V \otimes W := \text{Span}\{|i, \mu\rangle\}. \quad (139)$$

مثال: هرگاه V یک فضای برداری با پایه

$$\{|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

باشد آنگاه $V \otimes V$ یک فضای برداری ۴ بعدی با پایه های زیراست:

$$|0,0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |0,1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1,0\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1,1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (140)$$

به ازای هر دو بردار $|v\rangle$ و $|w\rangle$ می توان برداری در فضای $V \otimes W$ به شکل زیر تعریف کرد:

$$|v\rangle \otimes |w\rangle := v_i w_\mu |i, \mu\rangle \quad (141)$$

این بردار را ضرب تانسوری بردارهای $|v\rangle$ و $|w\rangle$ می گوئیم. این ضرب به طور بدیهی از همان خواص پیروی می کند که ضرب ماتریسی، یعنی

$$\begin{aligned} |v\rangle \otimes (|w\rangle + |z\rangle) &= |v\rangle \otimes |w\rangle + |v\rangle \otimes |z\rangle \\ |v\rangle \otimes (\alpha|w\rangle) &= (\alpha|v\rangle) \otimes |w\rangle = \alpha(|v\rangle \otimes |w\rangle) \\ (|v\rangle \otimes |w\rangle) \otimes |z\rangle &= |v\rangle \otimes (|w\rangle \otimes |z\rangle) \\ (|v\rangle \otimes |w\rangle)^\dagger &= \langle v| \otimes \langle w|. \end{aligned} \quad (142)$$

یک بردار دلخواه در فضای $V \otimes W$ را الزاما نمی توان به صورت $|v\rangle \otimes |w\rangle$ نوشت مثل بردار زیر

$$|\psi\rangle := |0,0\rangle + |1,1\rangle \quad (143)$$

که خواننده خود می تواند این امر را نشان دهد. با این وجود هر حالتی را می توان به صورت مجموعی از ضرب تانسوری بردارهای V در بردارهای W نوشت. برای فهم این نکته کافی است دقت کنیم که هر حالت دلخواه در $V \otimes W$ چنین بسطی دارد:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,\mu} \psi_{i,\mu} |i, \mu\rangle \quad (144)$$

که با تعریف $|\phi_i\rangle := \sum_{\mu} \psi_{i,\mu} |\mu\rangle$ می توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$|\psi\rangle = \sum_i |i\rangle \otimes |\phi_i\rangle, \quad (145)$$

و این ادعای فوق را ثابت می کند. هر حالتی را که نتوان به صورت $|v\rangle \otimes |w\rangle$ نوشت یک حالت درهم تنیده می گوئیم. یکی از مسائل مهم در نظریه اطلاعات کوانتومی و درمکانیک کوانتومی که دامنه آن به ریاضیات خالص نیز کشیده شده است مطالعه این حالت های درهم تنیده است.

هرگاه $A : V \rightarrow V$ و $B : W \rightarrow W$ دو عملگر خطی باشند می توان ضرب تانسوری آنها را به شکل زیرروی بردارهای پایه تعریف کرد:

$$(A \otimes B)(|i, \mu\rangle) := (A|i\rangle) \otimes (B|\mu\rangle). \quad (146)$$

برای تعیین عناصر ماتریسی این عملگر به طریق معمول عمل می کنیم:

$$(A \otimes B)_{k\nu, i\mu} := \langle k, \nu | A \otimes B | i, \mu \rangle = \langle k | A | i \rangle \langle \nu | B | \mu \rangle = A_{ki} B_{\nu\mu} \quad (147)$$

که نشان می دهد ماتریس ضرب تانسوری عملگر ها از ضرب تانسوری ماتریس های دو عملگر بدست می آید.

تمرین: نشان دهید که هر عملگر $T : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$ را می توان به صورت مجموعی از عملگرهای $a \otimes b : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$

نوشت.

۱.۱۲ ردود جری

فرض کنید که T عملگری است که روی فضای $V \otimes W$ تعریف شده است. بنابر تمرینی که در بالا حل کردید می توان این عملگر را به صورت

زیر نوشت:

$$T = \sum_i a_i \otimes b_i \quad (148)$$

در این صورت ردّ های جزئی عملگر T به صورت زیر تعریف می شوند:

$$tr_V(T) := \sum_i tr(a_i)b_i, \quad tr_W(T) := \sum_i tr(b_i)a_i. \quad (149)$$

بنابراین عملگری است روی فضای V و $tr_V(T)$ عملگری است روی فضای W .

تمرین: نشان دهید که

$$[tr_V(T)]_{\mu,\nu} := \sum_i T_{i\mu,iv}, \quad [tr_W(T)]_{i,j} := \sum_{\mu} T_{i\mu,j\mu}. \quad (150)$$

هم چنین نشان دهید که $tr(T) = tr_V(tr_W(T))$.

مطالعی که در ضمیمه های این درس آمده است برای فهم بقیه درس محاسبات و اطلاعات کوانتومی ضروری نیستند و خواننده می تواند از خواندن آنها صرف نظر کند.

۱۳ ضمیمه یک: تابع دلتای دیراک

تابع پیوسته زیر را در نظر می گیریم که در آن $0 < \epsilon < 1$.

$$\delta_{\epsilon}(x) := \begin{cases} 0 & x \leq -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} & -\epsilon \leq x \leq \epsilon \\ 0 & \epsilon \leq x \end{cases} \quad (151)$$

این تابع دارای خاصیت های زیر است:

الف:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\epsilon}(x) dx = 1, \quad (152)$$

ب: برای هر تابعی که در فاصله $(-\epsilon, \epsilon)$ متناهی باشد،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\epsilon}(x) f(x) dx = f(0) + O(\epsilon) \quad (153)$$

که در آن $O(\epsilon)$ کمیتی از مرتبه ϵ است.

حد تابع $\delta_{\epsilon}(x)$ را وقتی که $\epsilon \rightarrow 0$ با تابع $\delta(x)$ نشان می دهیم و قرار می دهیم

$$\delta(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(x). \quad (154)$$

و آن را تابع دلتای دیراک می نامیم. به خودی خود $\delta(x)$ یک تابع نیست بلکه می توان به آن به عنوان یک عملگر نگاه کرد که تنها در زیر

یک انتگرال معنادار دارد.

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \quad (155)$$

می توان تابع $\delta(x - b)$ را به طور مشابه تعریف کرد. این تابع دارای خاصیت های زیر است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - b) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - b) f(x) dx = f(b), \quad (156)$$

تابع دلتای دیراک را می توان به عنوان حد دنباله های دیگری از توابع نیز گرفت. در زیر چند تا از این دنباله ها را معرفی می کنیم.

دنباله اول: قرار می دهیم

$$g_{\sigma}(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (157)$$

که نشان دهنده تابعی گاوسی با پهنای σ و ماکزیمم $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ در نقطه $x = 0$ است. سطح زیرمنحنی آن نیز برابر است با ۱. در اینجا داریم

$$\delta(x) := \lim_{\sigma \rightarrow 0} g_{\sigma}(x). \quad (158)$$

دنباله دوم: قرار می دهیم

$$\delta_T(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{ix} dt = \frac{\sin Tx}{\pi x}. \quad (159)$$

داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_T(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} D_T(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = 1. \quad (160)$$

برای این دنباله داریم

$$\delta(x) := \lim_{T \rightarrow \infty} D_T(x). \quad (161)$$

و از آنجا به رابطه بسیار مهم زیر می رسم:

$$\delta(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dt. \quad (162)$$

بعضی دیگر از خواص تابع دلتا به شرح زیر هستند:

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= \delta(x' - x) \\ \int \delta'(x - x') f(x') dx' &= -\frac{df}{dx}(x). \end{aligned} \quad (163)$$

۱۴ ضمیمه دو: توابع دلتا به عنوان پایه ای برای فضای توابع

در این قسمت می خواهیم نشان دهیم که توابع دلتا را می توان به عنوان یک پایه برای فضای توابع در نظر گرفت. فضای توابع $F[0, 1]$ را در نظر می گیریم. هیچ نوع فرض بخصوصی درباره این توابع نظیر پیوستگی یا مشتق پذیری نمی کنیم. این فضایی بی نهایت بعدی است. حال به ازای هر عدد بزرگ N برای این فضا یک پایه در نظر می گیریم که با تقریب خوبی می تواند فضای توابع را جابو کند. سپس حد $N \rightarrow \infty$

را در نظری می گیریم که در آن توابع فضا با دقت توسط پایه تعریف شده نمایش داده می شوند. فاصله $[0, 1]$ را به N قسمت تقسیم می کنیم. به این ترتیب داریم

$$[0, 1] = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_N \quad (164)$$

که در آن

$$\Delta_n := \left[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N} \right] \quad (165)$$

توابع زیر را تعریف می کنیم:

$$e_n(x) := \begin{cases} N & x \in \Delta_n \\ 0 & x \notin \Delta_n \end{cases} \quad (166)$$

سطح زیر این توابع مساوی بایک است. این توابع بر یکدیگر عمودند اما بهنجار نیستند:

$$\langle e_n, e_m \rangle \equiv \int_0^1 e_n^*(x) e_m(x) dx = N \delta_{m,n}. \quad (167)$$

هم چنین این خاصیت را دارند که به ازای هر تابع $f \in F[0, 1]$ داریم:

$$\langle e_n, f \rangle \equiv \int_0^1 e_n^*(x) f(x) dx = N \int_{x \in \Delta_n} f(x) dx =: N \left(\frac{1}{N} f(x_n) \right) = f(x_n), \quad (168)$$

که در آن $x_n \in \Delta_n$ نقطه ای درون Δ_n است که با تقریب خوبی نشان دهنده مقدار تابع در ناحیه Δ_n است، به عبارت دیگر:

$$f(x_n) := \frac{\int_{x \in \Delta_n} f(x) dx}{\frac{1}{N}} \quad (169)$$

حال N را به سمت بی نهایت میل می دهیم. در این حالت اندیس n نیز جای خود را به یک اندیس پیوسته مثل $y := \frac{n}{N}$ می دهد. تابع $e_n(x)$ نیز مطابق با نمایشی که قبلاً در مورد توابع دیراک دیدیم به تابع دلتای دیراک یعنی $\delta(x - y)$ میل می کند، شکل (1)

نحوه تبدیل کمیت ها در حد $\infty \rightarrow N$ به شکل زیر است.

$$\frac{n}{N} \longrightarrow y$$

شکل ۱: در حد $N \rightarrow \infty$ ، شاخص گسسته $\frac{n}{N}$ به سمت شاخص پیوسته y و تابع $e_n(x)$ به تابع $\delta(x - y)$ میل می کند.

$$e_n(x) \quad \longrightarrow \quad \delta(x - y)$$

$$|e_n\rangle \quad \longrightarrow \quad |y\rangle$$

$$\langle x|e_n\rangle \quad \longrightarrow \quad \langle x|y\rangle$$

$$\langle e_n|e_m\rangle = \delta_{n,m} \quad \longrightarrow \quad \langle y|y'\rangle = \delta(y - y'). \quad (170)$$

تابع e_n را در این حالت به صورت برداری $|y\rangle$ نشان می دهیم که نمایش برای آن به صورت $|y\rangle$ است. رابطه (168) به شکل زیر درمی آید.

$$\langle y|f\rangle = \int_0^1 \delta(y - x)f(x)dx = f(y), \quad (171)$$

هرگاه در این حد $N\delta_{m,n}$ را به عنوان تابع $K(y, y')$ نشان دهیم که در آن $y = \frac{n}{N}$ و $y' = \frac{m}{N}$ هستند، از تساوی

$$\sum_n N\delta_{m,n} \frac{1}{N} = 1 \quad (172)$$

نتیجه می گیریم که

$$\int K(y, y')dy' = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_m N\delta_{m,n} \frac{\Delta y}{\Delta m} = \sum_m N\delta_{m,n} \frac{1}{N} = 1. \quad (173)$$

بنابراین $K(y, y')$ همان تابع دلتای دیراک است و رابطه (167) را می بایست به صورت زیرنوشت:

$$\langle y|y' \rangle = \delta(y - y'). \quad (174)$$

یا

$$\int_0^1 dx \delta(x - y) \delta(x - y') dx = \delta(y - y'). \quad (175)$$

آنچه که می خواهیم در پایان این بخش روی آن تاکید کنیم آن است که یک تابع $f \in F[0, 1]$ را به صورت یک بردارکت $\langle f|$ یا برای $|f\rangle$ نمایش می دهیم. مقدار این تابع یعنی $f(x)$ تصویر آن روی بردار پایه $|x\rangle$ است، یعنی

$$f(x) = \langle x|f \rangle. \quad (176)$$

رابطه (175) نیز به شکل زیر درمی آید:

$$\int_0^1 \langle y|x \rangle \langle x|y' \rangle dx = \langle y|y' \rangle, \quad (177)$$

و یا با برداشتن $|y\rangle$ و $|y'\rangle$ از دو طرف

$$\int_0^1 |x\rangle \langle x| dx = I, \quad (178)$$

که در آن I عملگر همانی است.

باید تاکید کنیم که تنها برای سادگی فاصله $[0, 1]$ را در نظر گرفتیم. این پایه برای فضای توابع $F[a, b]$ و یا $F(-\infty, \infty)$ نیز برقرار است. هم چنین براحتی این روابط به بیشترازی یک بعد نیز تعمیم می یابند.

۱۵ ضمیمه سه: تبدیل فوریه

فضای توابع مختلط در فاصله $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ را در نظر می گیریم. این فضا را با $C[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ نشان می دهیم. ضرب داخلی روی این فضا به شکل

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) g^*(x) dx$$

تعریف شده است. توابع

$$e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{2\pi i n x}{L}}, \quad n \in Z \quad (179)$$

را در نظر می گیریم. این توابع بریکدیگر عمود بوده و نرم همه آنها برابر با واحد است:

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e_n^*(x) e_m(x) dx = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} e^{\frac{2\pi i m x}{L}} dx = \delta_{n,m}. \quad (180)$$

علاوه بر این، هر تابع دلخواه را می توان بر حسب این توابع بسط داد:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x). \quad (181)$$

ضرایب f_n را می توان به ترتیب زیر بدست آورد:

$$f_n = \langle e_n, f \rangle = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e_n^*(x) f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} f(x) dx. \quad (182)$$

بنابراین مجموعه توابع $\{e_n\}$ تشکیل یک پایه برای این فضا می دهند. با جایگزینی (182) در رابطه (181) بدست می آوریم

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e_n^*(y) f(y) dy e_n(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(y)^* e_n(x) \right) f(y) dy \quad (183)$$

مقایسه ای با رابطه (163) نشان می دهد که

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(y)^* e_n(x) = \delta(x - y). \quad (184)$$

این رابطه را رابطه کامل بودن پایه های $\{e_n\}$ می گوئیم.

حال L را به سمت بی نهایت میل می دهیم. در این حالت توابع $e_n(x)$ بخاطر عامل $\frac{2\pi i n}{L}$ بسیار به هم نزدیک می شوند و در نتیجه بهتر است که آنها را با یک شاخص پیوسته یعنی $k := \frac{2\pi n}{L}$ مشخص کنیم. علاوه بر آن اگر به همین شکل در این توابع حد $L \rightarrow \infty$ را اعمال کنیم، به خاطر عامل $\frac{1}{\sqrt{L}}$ این توابع همگی صفر خواهند شد. بنابراین می بایستی توابع پایه جدید را ضمن جایگزینی شاخص گسسته $\frac{2\pi n}{L}$ با شاخص پیوسته k در توابع اولیه در ضرب مشخصی نیز ضرب کنیم. توابع جدید را با $\hat{e}_k(x)$ نشان می دهیم و قرار می دهیم

$$\hat{e}_k(x) := A e_n(x) \quad k := \frac{2\pi n}{L} \quad (185)$$

که در آن ضرب A می بایست تعیین شود. بهترین راه برای این کار توجه به کامل بودن پایه یعنی رابطه (184) است. این رابطه را به صورت

زیرمی توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(y)^* e_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_n(y)^* e_n(x) \frac{\Delta n}{\Delta k} \Delta k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{C^2} \hat{e}_k(y)^* \hat{e}_k(x) \frac{L}{2\pi} \Delta k = \delta(x-y). \end{aligned} \quad (186)$$

این رابطه به مامی گوید که می بایست C را برابر با $\sqrt{\frac{L}{2\pi}}$ بگیریم. باین جایگزینی خواهیم داشت:

$$\hat{e}_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad (187)$$

ورابطه (186) به شکل زیردرمی آید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{e}_k^*(x) \hat{e}_k(y) dk \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-y)} dk = \delta(x-y). \quad (188)$$

باین جایگزینی روابط قبلی یک به یک تغییری کنند. نخست به رابطه (181) نگاه می کنیم: از آنجا که شاخص n جای خود را به یک

شاخص پیوسته $k = \frac{2\pi n}{L}$ داده است این رابطه به صورت زیردرمی آید:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x) \frac{\Delta n}{\Delta k} \Delta k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x) \frac{L}{2\pi} \Delta k = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}(k) \hat{e}_k(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \end{aligned} \quad (189)$$

که در آن $\hat{f}(k) := \sqrt{\frac{L}{2\pi}} f_n$ از رابطه بالا می توانیم با توجه به رابطه (182)، $\hat{f}(k)$ را بر حسب $f(x)$ بدست آورد:

$$\hat{f}(k) \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}} f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx. \quad (190)$$

جفت روابط

$$f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk$$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx. \quad (191)$$

رایک تبدیل فوری در فضای توابع یک متغیره می گویند. این روابطه به صورت زیر به فضای n بعدی تعمیم می یابند.

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik \cdot x} \hat{f}(k) d^n k \\ \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik \cdot x} f(x) d^n x. \end{aligned} \quad (192)$$

۱۶ تمرین ها:

۱ - تجزیه قطبی ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ را بدست آورید.

۲ - تجزیه مقدار منفرد ماتریس $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ را بدست آورید.

۳ - یک ماتریس روی ضرب تانسوری دو فضای دوبعدی به صورت زیر تعریف شده است:

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}. \quad (193)$$

رد های جزئی این عملگر را بدست آورید.

۴ - در یک فضای d بعدی V که بردارهای پایه اش را با $\{|j\rangle, j = 0, 1, \dots, d-1\}$ نشان می دهیم عملگرهای X و Z به صورت زیر

تعریف می شوند:

$$X|j\rangle := |j+1\rangle \pmod{d}, \quad Z|j\rangle := \omega^j|j\rangle \quad (194)$$

که در آن $\omega := e^{\frac{2\pi i}{d}}$.

الف: ویژه بردارهای عملگرهای X ، Z و XZ را بدست آورید.

ب: نشان دهید که $ZX = \omega XZ$.

ج: طیف عملگر $X + X^{-1}$ را بدست آورید.

د: حالت های زیر را در نظر بگیرید:

$$|\phi_{m,n}\rangle := \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_j \omega^{jn} |j, j+m\rangle \quad (195)$$

و نشان دهید که این حالت ها یک پایه متعامد بهنجار برای فضای $V \otimes V$ می سازند. هم چنین نشان دهید که برای همه این حالت ها تساوی

زیر برقرار است:

$$\text{tr}_V(|\phi_{m,n}\rangle\langle\phi_{m,n}|) = \frac{1}{d}I. \quad (196)$$

این حالت ها، حالت های تعمیم یافته بل¹ نامیده می شوند.

¹Generalized Bell States