

معیارهای فاصله و نزدیکی در اطلاعات کوانتومی

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲۶ مهر ۱۳۹۸

۱ مقدمه

در درس مقدماتی مکانیک کوانتومی شباهت بین دو حالت کوانتومی خالص مثل $|\phi\rangle$ و $|\psi\rangle$ را با اندازه ضرب داخلی آنها یعنی $|\langle\phi|\psi\rangle|$ می‌سنجیم. هم‌چنین فاصله بین دو بردار حالت را نیز با فاصله هیلبرت - اشمیت آنها یعنی $||\phi\rangle - |\psi\rangle||$ می‌سنجیم. سوالی که با آن مواجه هستیم آن است که این شباهت و یا فاصله چه معنای آزمایشی ای دارند؟ به هر حال هر آنچه که از یک حالت کوانتومی بدست می‌آید، نتایج احتمالاتی ای است که در اندازه‌گیری‌های مختلف بدست می‌آید. حال اگر دو حالت کوانتومی به هم نزدیک باشند، چه رابطه‌ای بین آمار بدست آمده از آنها در اندازه‌گیری‌های مختلف وجود دارد؟ این سوال ما را به سوال مهم‌تری هدایت می‌کند و آن اینکه فاصله یا شباهت بین دو توزیع احتمال کلاسیک چگونه تعریف می‌شود و چه معنای آزمایشی یا عملیاتی^۱ دارد؟ هم‌چنین از آنجا که حالت‌های کوانتومی معمولاً خالص نیستند می‌بایست بتوانیم به سوالات فوق برای حالت‌های آمیخته نیز پاسخ بدهیم. این‌ها سوالاتی هستند که در این درس سعی می‌کنیم پاسخی برای آنها بیابیم.

^۱Operational Meaning

۲ فاصله های مختلف برای توزیع های کلاسیک احتمال

فرض کنید که p و q دو تابع توزیع احتمال روی یک متغیر تصادفی باشند. برای سادگی متغیر تصادفی را گسسته می گیریم. در این صورت فاصله این دو تابع توزیع به شکل زیر تعریف می شود:

$$D(p, q) = \frac{1}{2} \sum_x |p_x - q_x|. \quad (۱)$$

که در آن جمع روی تمام مقادیر متغیر تصادفی است. فضای نمونه متغیر تصادفی یعنی همه مقادیر ممکن را که متغیر تصادفی می تواند اختیار کند با X نشان می دهیم. هرگاه متغیر تصادفی مقادیر پیوسته به خود بگیرد، رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$D(p, q) = \frac{1}{2} \int dx |p(x) - q(x)|. \quad (۲)$$

رابطه ای که به این ترتیب تعریف شده است واقعا یک متریک یا فاصله را بین توابع توزیع احتمال تعریف می کند.

■ تمرین: نشان دهید که فاصله $Dl(p, q)$ دارای خواص زیر است:

$$\begin{aligned} 0 &\leq D(p, q) \leq 1, \\ D(p, q) &= 0 \leftrightarrow p = q, \\ D(p, q) &= D(q, p), \\ D(p, q) &\leq D(p, r) + D(r, q). \end{aligned} \quad (۳)$$

■ تمرین: یک مهره تاس را در نظر بگیرید. دو تابع توزیع مثال بزنید که فاصله آنها برابر با یک باشد.

این تعریف از فاصله چه خصوصییتی دارد؟ چه مزیتی بر تعاریف متعدد دیگری که می توانستیم جایگزین آن کنیم دارد؟ مثلا می توانیم فاصله را به صورت $D'(p, q) := \sum_x (P_x - q_x)^2$ تعریف کنیم. یا می توانستیم ضریب $1/2$ را به کار نبریم. در این جا می خواهیم نشان دهیم که این تعریف یک معنای فیزیکی و شهودی خیلی خوب دارد. یک زیر مجموعه از مقادیر متغیر تصادفی مثل

$S \subset X$ را در نظر بگیرید. در نظریه احتمالات اصطلاحا به S یک واقعه یا *Event* می گوئیم. از خود می پرسیم که p احتمال وقوع S را چقدر پیش بینی می کند و q این احتمال وقوع را چقدر پیش بینی می کند و تفاوت پیش بینی های آنها چقدر است؟ به یاد داشته باشیم که

$$p(S) = \sum_{x \in S} p_x, \quad q(S) = \sum_{x \in S} q_x. \quad (4)$$

برای بعضی از حوادث (یعنی زیر مجموعه های X) ممکن است پیش بینی آنها یکسان باشد یعنی $p(S) = q(S)$. از روی این نوع حوادث نمی توان در باره تفاوت این دو تابع توزیع احتمال قضاوت کرد. می توان گفت به طور میانگین پیش بینی آنها چقدر تفاوت دارد و یا این که بیشترین تفاوت آنها چقدر است؟ یعنی اینکه آن حادثه ای را در نظر بگیریم که پیش بینی این دو تابع توزیع احتمال برای آن حادثه بیشترین اختلاف را داشته باشد. تعریفی که در بالا ارائه شده است مبتنی بر این معیار دوم است. این امر در قضیه زیر بیان می شود:

■ قضیه: فاصله دو تابع توزیع در رابطه زیر صدق می کند:

$$D(p, q) = \max_{S \subset X} |p(S) - q(S)|, \quad (5)$$

که در آن

$$|P(S) - q(S)| = \left| \sum_{x \in S} (p_x - q_x) \right| \quad (6)$$

تفاوت پیش بینی p و q برای حادثه S است.

در واقع این نامساوی بیان می کند که حداقل یک زیر مجموعه خاص مثل S^* نیز وجود دارد به قسمی که

$$D(p, q) = |p(S^*) - q(S^*)|, \quad (7)$$

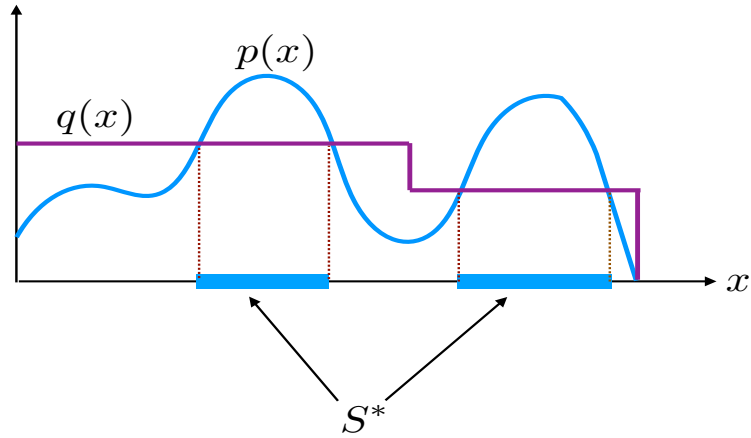
و معنای قضیه بالا این است که

$$D(p, q) \geq |p(S) - q(S)| \quad \forall S \subset X. \quad (8)$$

■ اثبات: برای این که این موضوع را ثابت کنیم، ابتدا باید رابطه ۸ را ثابت کنیم و سپس نشان دهیم که یک زیر مجموعه خاص مثل S^* و

جود دارد به نحوی که رابطه ۷ برقرار می شود. برای اثبات رابطه ۸ قرار می دهیم:

$$|p(S) - q(S)| = \left| \sum_{x \in S} (p_x - q_x) \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{x \in S} (p_x - q_x) \right| + \frac{1}{2} \left| \sum_{x \in S} (p_x - q_x) \right|. \quad (9)$$



شکل ۱: قسمت پررنگ محدوده ای را نشان می دهد که در آن یکی از توابع توزیع از دیگری بزرگتر است. این ناحیه همان ناحیه ای است که اندازه گیری احتمال آن به بهترین نحوی تفاوت دو تابع توزیع را نشان می دهد.

اما دقت می کنیم که بنا براین که هر دو تابع توزیع احتمال بهنجار هستند، یعنی با توجه به اینکه

$$\sum_{x \in S} p_x + \sum_{x \in X-S} p_x = 1, \quad \sum_{x \in S} q_x + \sum_{x \in X-S} q_x = 1, \quad (10)$$

نتیجه می گیریم که

$$\sum_{x \in S} (p_x - q_x) = \sum_{x \in X-S} (q_x - p_x). \quad (11)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |p(S) - q(S)| &= \frac{1}{2} \left| \sum_{x \in S} (p_x - q_x) \right| + \frac{1}{2} \left| \sum_{x \in X-S} (p_x - q_x) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{x \in S} |(p_x - q_x)| + \frac{1}{2} \sum_{x \in X-S} |(p_x - q_x)| = \sum_{x \in X} |p_x - q_x| = D(p, q). \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن در خط دوم از نامساوی مثلث برای اعداد، یعنی $|a+b| \leq |a| + |b|$ استفاده کرده ایم. به این ترتیب نامساوی ۸ را نشان دادیم. حال باید نشان دهیم که واقعا یک مجموعه خاص یا به اصطلاح یک پیشامد خاص مثل S^* وجود دارد که به ازای آن رابطه ۷ برقرار می شود. مجموعه S^* را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$S^* := \{x \in X, p_x \geq q_x\}. \quad (۱۳)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$X - S^* = \{x \in X, p_x < q_x\}. \quad (۱۴)$$

حال با توجه به روابط قبلی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D(p, q) &= \frac{1}{2} \sum_{x \in X} |p_x - q_x| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in S^*} |p_x - q_x| + \frac{1}{2} \sum_{x \in X - S^*} |p_x - q_x| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in S^*} (p_x - q_x) + \frac{1}{2} \sum_{x \in X - S^*} (q_x - p_x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in S^*} (p_x - q_x) + \frac{1}{2} \sum_{x \in S^*} (p_x - q_x) \\ &= \sum_{x \in S^*} (p_x - q_x) = \left| \sum_{x \in S^*} (p_x - q_x) \right| = |p(S^*) - q(S^*)|. \end{aligned} \quad (۱۵)$$

■ تمرین: دو تاس مختلف با توابع توزیع زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \{P_1 = \frac{2}{12}, P_2 = \frac{1}{12}, P_3 = \frac{3}{12}, P_4 = \frac{1}{12}, P_5 = \frac{3}{12}, P_6 = \frac{2}{12}\} \\ \{Q_1 = \frac{1}{12}, Q_2 = \frac{5}{12}, Q_3 = \frac{3}{2}, Q_4 = \frac{1}{12}, Q_5 = \frac{1}{12}, Q_6 = \frac{1}{12}\} \end{aligned} \quad (۱۶)$$

الف: فاصله این دو تابع توزیع را حساب کنید.

ب: مجموعه S^* را برای این دو تابع توزیع بدست آورید.

پ: برای کدام مجموعه ها این دو تابع توزیع غیرقابل تمیز هستند؟

۱.۲ خواص فاصله بین توابع توزیع

در این بخش خواص فاصله بین دو تابع توزیع را مطالعه می کنیم. مهمترین خاصیتی که این فاصله دارد خاصیت تحدب قوی آن است. نخست به تعریف تابع محدب توجه می کنیم:

■ تعریف: تابع حقیقی و یک متغیره f محدب^۲ نامیده می شود اگر به ازای هر دو مقدار x_1 و x_2 در دامنه تعریف خود، دارای خاصیت زیر باشد:

$$f(x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \quad (۱۷)$$

یک تابع محدب در شکل ۲۶ نشان داده شده است.

■ تابع حقیقی و یک متغیره f مقعر^۳ نامیده می شود اگر به ازای هر دو مقدار x_1 و x_2 در دامنه تعریف خود، دارای خاصیت زیر باشد:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \quad (۱۸)$$

یک تابع مقعر در شکل ۳ نشان داده شده است.

■ تمرین: نشان دهید که یک تابع مقعر به ازای هر مجموعه از مقادیر x_1 تا x_n در رابطه زیر صدق می کند:

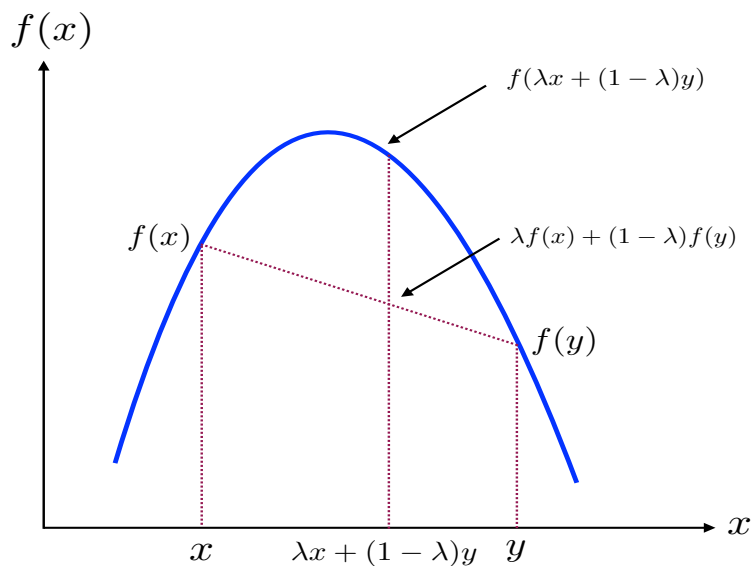
$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) \leq \sum_i \lambda_i f(x_i), \quad (۱۹)$$

که در آن λ_i ها اعداد مثبتی هستند که مجموع آنها برابر با یک است. رابطه مشابهی برای توابع محدب نیز برقرار است. پس از این تعریف ها می توانیم خاصیت مهم زیر را در باره فاصله بین دو تابع توزیع بیان کنیم.

■ قضیه: فاصله دو تابع توزیع یک تابع مقعر است به این معنا که اگر q ، p_1 و p_2 توابع توزیع باشند آنگاه

$$D(\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2, q) \leq \lambda D(p_1, q) + (1 - \lambda)D(p_2, q). \quad (۲۰)$$

Convex^۲
Concave^۳



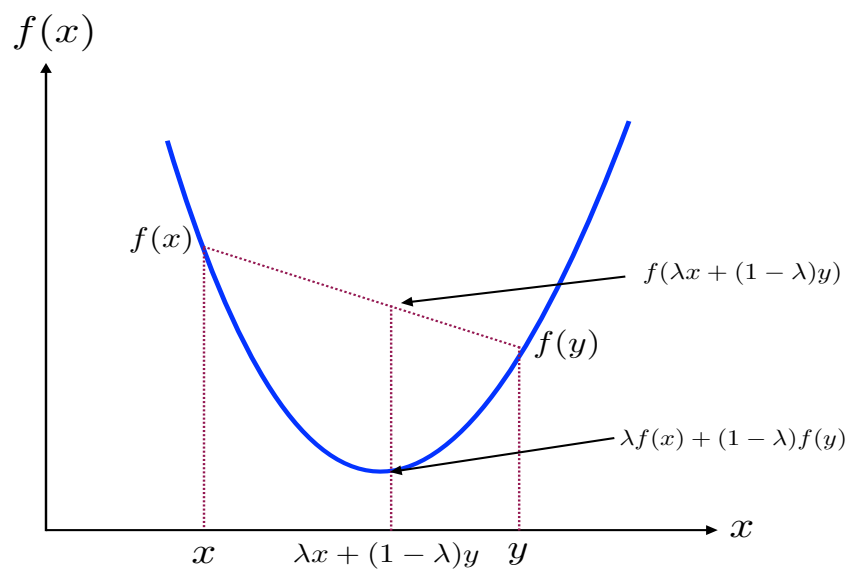
شکل ۲: خاصیت یک تابع محدب این است که اگر متغیرهایش را با هم مخلوط کنیم به سمت بیشینه تابع می رویم. بنابراین اگر تابعی از ماتریس های چگالی داشته باشیم که محدب باشد، مطمئن هستیم که بیشینه این تابع یک حالت کاملاً آمیخته و کمینه آن یک حالت کاملاً خالص است. بهتراست که معنای قضیه را به زبان فارسی بنویسیم. این رابطه می گوید که مخلوط کردن توابع توزیع احتمال فاصله آن ها را از یک دیگر کم می کند و آن ها را به هم شبیه تر می کند.

■ اثبات: با استفاده از تعریف فاصله می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}
 D(\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2, q) &= \frac{1}{2} \sum_x |\lambda p_{1,x} + (1 - \lambda)p_{2,x} - q_x| \\
 &= \frac{1}{2} \sum_x |\lambda p_{1,x} + (1 - \lambda)p_{2,x} - (\lambda + (1 - \lambda))q_x| \\
 &= \frac{1}{2} \sum_x |\lambda(p_{1,x} - q_x) + (1 - \lambda)(p_{2,x} - q_x)|.
 \end{aligned} \tag{۲۱}$$

حال در طرف راست آخرین رابطه از نامساوی مثلث استفاده می کنیم که بر مبنای آن به ازای هر دو عدد دلخواه

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \tag{۲۲}$$



شکل ۳: خاصیت یک تابع مقعرین است که اگر متغیرهایش را با هم مخلوط کنیم به سمت کمینه تابع می رویم. بنابراین اگر تابعی از ماتریس های چگالی داشته باشیم که مقعر باشد باشد، مطمئن هستیم که بیشینه این تابع یک حالت کاملاً خالص و کمینه آن یک حالت کاملاً آمیخته است.

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D(\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2, q) &\leq \lambda \frac{1}{2} \sum_x |p_{1,x} - q_x| + (1 - \lambda) \frac{1}{2} \sum_x |p_{2,x} - q_x| \\ &= \lambda D(p_1, q) + (1 - \lambda) D(p_2, q). \end{aligned} \quad (23)$$

به این ترتیب اثبات قضیه کامل می شود.

حال با استفاده از تمرینی که حل کردید می توانیم بنویسیم:

$$D\left(\sum_i \lambda_i p_i, q\right) \leq \sum_i \lambda_i D(p_i, q). \quad (24)$$

تا کنون خاصیت تقعر فاصله را نسبت به تنها یکی از توابع توزیع نشان داده ایم. ما تابع فاصله دارای یک خاصیت تقعر قوی نیز هست که به صورت زیر بیان می شود:

فرض کنید که p_i و q_i دو رشته تابع توزیع دلخواه روی یک متغیر تصادفی باشند. هم چنین فرض کنید که $\{\lambda_i\}$ و $\{\mu_i\}$ نیز دو رشته اعداد مثبت باشند که مجموع هر کدام به تنهایی برابر با ۱ باشد. دقت کنید که هر کدام از رشته های $\{\lambda_i\} := \lambda$ و $\{\mu_i\} := \mu$ را نیز به صورت یک تابع توزیع گسسته احتمال در نظر گرفت. در این صورت می دانیم که

$$P := \sum_i \lambda_i p_i, \quad Q := \sum_i \mu_i q_i, \quad (25)$$

نیز دو تابع توزیع احتمال خواهند بود. دقت کنید که این دو تابع توزیع هر کدام جمع محدب توابع توزیع p_i و q_i هستند. در این صورت قضیه زیر برقرار است:

■ قضیه:

$$D\left(\sum_i \lambda_i p_i, \sum_i \mu_i q_i\right) \leq D(\lambda, \mu) + \sum_i \lambda_i D(p_i, q_i). \quad (26)$$

که در آن $D(\lambda, \mu)$ فاصله تابع توزیع λ و μ است.

برای اثبات این قضیه کافی است که تمرین زیر را حل کنید.

■ تمرین: فرض کنید که $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ و $\mu_1 + \mu_2 = 1$ و این اعداد همگی مثبت هستند. حال نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$D(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2, \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2) \leq D(\lambda, \mu) + \mu_1 D(p_1, q_1) + \mu_2 D(p_2, q_2) \quad (27)$$

راهنمایی: طرف چپ را با استفاده از تعریف بسط دهید و سپس به جملات داخل بسط عبارت مناسبی را اضافه و کم کنید.

به چند حالت خاص از این قضیه کلی توجه می کنیم:

■ نتیجه یک: در رابطه ۲۶ فرض کنید که $q_i = q$ و $\lambda_i = \mu_i$. در این صورت خواهیم داشت:

$$D\left(\sum_i \lambda_i p_i, q\right) \leq \sum_i \lambda_i D(p_i, q). \quad (28)$$

که معنایش این است که فاصله نسبت به هر کدام از آرگومان هایش خاصیت تحدب دارد.

■ نتیجه دو: در رابطه ۲۶ فرض کنید که $\lambda_i = \mu_i$. در این صورت خواهیم داشت:

$$D\left(\sum_i \lambda_i p_i, \sum_i \lambda_i q_i\right) \leq \sum_i \lambda_i D(p_i, q_i). \quad (29)$$

۳ شباهت دو تابع توزیع احتمال

حال به معرفی شباهت دو تابع توزیع احتمال می پردازیم که به صورت زیر تعریف می شود:

$$F(p, q) := \sum_x \sqrt{p_x q_x} \quad (30)$$

که برای متغیرهای تصادفی پیوسته به شکل زیر در می آید:

$$F(p, q) := \int dx \sqrt{p(x)q(x)}. \quad (31)$$

شباهت دو تابع توزیع احتمال خاصیت های زیر را دارد:

$$F(p, q) = F(q, p),$$

$$F(p, q) = 1 \Leftrightarrow p = q,$$

$$0 \leq F(p, q) \leq 1. \quad (32)$$

■ **تمرین :** خواص بالا را ثابت کنید. (راهنمایی: از نامساوی کوشی-شوارتز برای دو بردار مناسب استفاده کنید.)

■ **تمرین :** شباهت دو تابع توزیع گاوسی یک متغیره را که هرکدام با یک مقدار میانگین و انحراف معیار مخصوص به خود مشخص می شوند محاسبه کنید.

۱.۳ خواص تحدب برای تابع شباهت

در بخش قبلی ثابت کردیم که تابع فاصله محدب رو به پایین $Convex\ down$ (یعنی یک تابع دارای کمینه) است. در این بخش ثابت می کنیم که تابع شباهت یک تابع محدب رو به بالا $Convex\ up$ (یعنی یک تابع دارای بیشینه) است.

■ **تمرین:** الف: نشان دهید که تابع $f(x) := \sqrt{x}$ یک تابع مقعر است یعنی

$$\sqrt{\lambda x + (1 - \lambda)y} \geq \lambda \sqrt{x} + (1 - \lambda)\sqrt{y}.$$

ب: با استفاده از این تعریف نشان دهید که

$$F(\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2, q) \geq \lambda F(p_1, q) + (1 - \lambda)F(p_2, q). \quad (۳۳)$$

از نظر شهودی معنای این رابطه این است که مخلوط کردن توزیع های احتمال شباهت آنها را با یک تابع توزیع مشخص زیاد می کند. این خاصیت به شکل کلی تری نیز برقرار است. نخست حالت ساده این خاصیت را بیان و ثابت می کنیم. اثبات کلی آن کاملاً مشابه است و ایده جدیدی در بر ندارد.

■ **قضیه:** فرض کنید که p_1, p_2, q_1 و q_2 توابع توزیع احتمال هستند و پارامترهای λ و μ اعداد مثبت بین صفر و یک هستند. در این صورت نامساوی زیر برقرار است:

$$F(\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2, \mu q_1 + (1 - \mu)q_2) \geq \sqrt{\lambda\mu}F(p_1, q_1) + \sqrt{(1 - \lambda)(1 - \mu)}F(p_2, q_2) \quad (۳۴)$$

هرگاه در این رابطه قرار دهیم $q_1 = q_2$ در این صورت و $\mu = \lambda$ این رابطه تبدیل به رابطه (۳۳) می شود.

برای اثبات این قضیه کافی است که تمرین زیر را حل کنید.

■ تمرین: الف: فرض کنید که اعداد a, b, c و d اعداد مثبتی هستند. نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\sqrt{[\lambda a + (1 - \lambda)b][\mu c + (1 - \mu)d]} \geq \sqrt{\lambda\mu}\sqrt{ac} + \sqrt{(1 - \lambda)(1 - \mu)}\sqrt{bd}. \quad (35)$$

ب: با استفاده از این نامساوی نشان دهید که رابطه (34) برقرار است.

شکل کلی تر این قضیه نیز برقرار است:

■ قضیه:

$$F\left(\sum_i \lambda_i p_i, \sum_i \mu_i q_i\right) \geq \sum_i \sqrt{\lambda_i \mu_i} F(p_i, q_i). \quad (36)$$

■ تمرین: با استفاده از تمرین قبلی نامساوی کلی بالا را ثابت کنید.

بازهم می توان حالت های خاص را بررسی کرد. هرگاه در دو طرف این رابطه قرار دهیم $q_i = q$ و $\mu_i = \lambda_i$ به رابطه تحذب زیر می رسیم:

$$F\left(\sum_i \lambda_i p_i, q\right) \geq \sum_i \lambda_i F(p_i, q). \quad (37)$$

و هرگاه تنها قرار دهیم $\lambda_i = \mu_i$ به رابطه زیر می رسیم:

$$F\left(\sum_i \lambda_i p_i, \sum_i \lambda_i q_i\right) \geq \sum_i \lambda_i F(p_i, q_i). \quad (38)$$

از نظر شهودی معنای تمام این رابطه ها این است که مخلوط کردن توابع توزیع احتمال شباهت آنها را با یکدیگر زیاد و فاصله آنها را باهم کم می کند.

۴ فاصله دو حالت کوانتومی

در این بخش و بخش های بعدی خواهیم دید که با تعاریف مناسبی که از این تعاریف کلاسیک الهام گرفته است می توان فاصله و شباهت را برای حالت های کوانتومی نیز تعریف کرد و این کمیت ها دارای همان خاصیت هایی هستند که تا کنون برای فاصله و شباهت کلاسیکی بیان کرده ایم. نخست از فاصله دو حالت کوانتومی آغاز می کنیم.

فرض کنید که ρ و σ دو حالت کوانتومی در یک فضای هیلبرت دلخواه باشند. در این صورت فاصله این دو حالت به شکل زیر تعریف می شود:

$$D(\rho, \sigma) := \frac{1}{2} \text{tr} |\rho - \sigma|, \quad (39)$$

که در آن $|A| := \sqrt{A^\dagger A}$. این تعریف نیز بنا بر خواص فیزیکی و مفهومی آن انتخاب شده است. این فاصله بوضوح خاصیت های زیر را داراست:

$$\begin{aligned} D(\rho, \sigma) &= 0, \quad \leftrightarrow \rho = \sigma, \\ D(\rho, \sigma) &\leq D(\rho, \mu) + D(\mu, \sigma), \\ D(\rho, \sigma) &= D(\sigma, \rho), \\ D(U\rho U^\dagger, U\sigma U^\dagger) &= D(\rho, \sigma). \end{aligned} \quad (40)$$

از این خاصیت ها تنها نامساوی مثلث بدیهی نیست. این خاصیت را در ادامه درس ثابت می کنیم. قبل از آن بهتر است با خواص فاصله آشنایی بیشتری پیدا کنیم.

■ **تمرین :** اگر ρ, σ حالت های یک کیوبیت باشند که متناظر با بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{s}$ باشند نشان دهید که

$$D(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} |\mathbf{r} - \mathbf{s}|. \quad (41)$$

هرگاه حالت های ρ و σ باهم جابجا شوند می توان پایه ای انتخاب کرد که هردو این ماتریس ها در آن قطری شوند. در این صورت خواهیم

داشت:

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|, \quad \sigma = \sum_i q_i |i\rangle\langle i|. \quad (42)$$

■ **تمرین** : نشان دهید که در این صورت خواهیم داشت:

$$D(\rho, \sigma) = D(p, q), \quad (43)$$

که در آن $D(p, q)$ فاصله بین دو تابع توزیع احتمال p و q است.

مهم ترین خاصیت این فاصله که معنای فیزیکی آن را نیز روشن می کند، در قضیه زیر بیان می شود.

■ **قضیه**: هرگاه P را برای نمایش عملگرهای تصویر گر بکار ببریم در این صورت رابطه زیر برقرار است:

$$D(\rho, \sigma) = \text{Max}_{P \text{ tr}}(P(\rho - \sigma)). \quad (44)$$

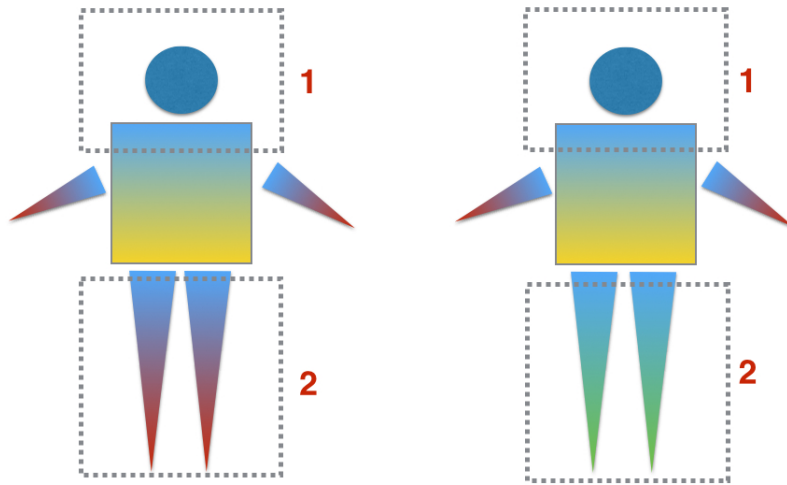
این رابطه آنالوگ رابطه (۵) در مورد فاصله بین توابع توزیع کلاسیک است. هرگاه یک اندازه گیری تصویری روی این حالت ها انجام دهیم، احتمال بدست آوردن نتیجه ای که با عملگر تصویری P مشخص می شود، برای حالت ρ برابر است با $\text{tr}(P\rho)$ و برای حالت σ برابر است با $\text{tr}(P\sigma)$. بنابراین $\text{tr}(P(\rho - \sigma))$ برابر است با تفاوت این دو احتمال. ممکن است برای بعضی اندازه گیری ها و نتایج بین ρ و σ تفاوتی حاصل نشود یا برای بعضی اندازه گیری های دیگر تفاوت کمی حاصل شود. آنچه که رابطه بالا بیان می کند که فاصله بین دو حالت برابر است با ماکزیمم فاصله بین نتایج. شکل (۴) این خاصیت را بهتر نشان می دهد.

■ **اثبات**: ماتریس های ρ و σ هر دو مثبت هستند ولی $\rho - \sigma$ الزاما مثبت نیست. برای محاسبه قدر مطلق آن ماتریس $\rho - \sigma$ را تجزیه طیفی می کنیم. این ماتریس در پایه ویژه مقدارهای خودش قطری و به صورت زیر است:

$$\rho - \sigma = \text{diagonal}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, -\mu_1, -\mu_2, \dots, \mu_l) \quad (45)$$

که در آن ها

$$\lambda_i > 0, \quad \mu_j \geq 0.$$



شکل ۴: تفاوت بین دو حالت با هر نوع اندازه گیری آشکار نمی شود. بعضی از اندازه گیری ها مثل اندازه گیری ۱ این تفاوت را آشکار نمی کنند، بعضی تنها اندکی از این تفاوت را آشکار می کنند و بعضی نیز مثل ۲ تمام این تفاوت را آشکار می کنند.

بنابراین می توان نوشت

$$\rho - \sigma = Q - S, \quad (46)$$

که در آن Q و S ماتریس های مثبت هستند و پایه ^۴ آنها برهم عمود هستند. از آنجا که $tr(\rho - \sigma) = 0$ است نتیجه می گیریم که $tr(S) = tr(Q)$. حال با توجه به (۴۵) و (۴۶) نتیجه می گیریم که

$$|\rho - \sigma| = S + Q$$

Support^۴

و

$$D(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \text{tr}|\rho - \sigma| = \frac{1}{2} \text{tr}(Q + S) = \text{tr}(Q).$$

حال دقت می کنیم که به ازای هر عملگر تصویری P

$$\text{tr}(P(\rho - \sigma)) = \text{tr}(P(Q - S)) \leq \text{tr}(PQ) \leq \text{tr}(Q) = D(\rho, \sigma).$$

برای کامل کردن اثبات قضیه می بایست نشان دهیم که یک تصویرگر خاص مثل P^* وجود دارد که نامساوی بالا را تبدیل به یک تساوی می کند. برای این کار کافی است که تصویرگر P^* را همان تصویرگر روی زیرفضای پایه Q بگیریم. در این صورت با توجه به این که پایه Q و S عمود برهم هستند

$$P^*Q = Q, \quad P^*S = 0$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\text{tr}(P^*(\rho - \sigma)) = \text{tr}(P^*(Q - S)) = \text{tr}(P^*Q) = \text{tr}(Q) = D(\rho, \sigma).$$

■ تمرین: ماتریس های زیر را در نظر بگیرید:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r} \cdot \sigma), \quad \sigma = \frac{1}{2}(I + \mathbf{s} \cdot \sigma). \quad (47)$$

الف: ماتریس های Q , S را پیدا کنید و نشان دهید که واقعا $D(\rho, \sigma) = \text{tr}(Q)$.

ب: می دانیم که ρ و σ هر دو ماتریس های مثبت هستند. با این وجود چه نیازی هست که $\rho - \sigma$ را به صورت $Q - S$ بنویسیم که همین خاصیت ها را دارند؟

■ تمرین: حالت های زیر را در نظر بگیرید:

$$\rho = |\phi^+\rangle\langle\phi^+|, \quad \sigma = |\psi^+\rangle\langle\psi^+|, \quad (48)$$

که در آن $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ و $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$.

ماتریس های Q , S را پیدا کنید و فاصله دو حالت بالا را پیدا کنید.

■ **تمرین:** حالت $\rho = \frac{1}{2}I$ و حالت $\sigma = |+\rangle\langle+|$ را در نظر بگیرید. اگر روی این دو حالت اندازه گیری σ_x انجام دهیم هیچ تفاوتی حس نمی کنیم. ولی اگر اندازه گیری σ_x انجام دهیم تفاوت زیادی حس خواهیم کرد.

الف: تفاوت تابع های توزیع ناشی از اندازه گیری σ_x را روی این دو حالت بدست آورید.

ب: تفاوت تابع های توزیع ناشی از اندازه گیری σ_n را روی این دو حالت بدست آورید که در آن n یک حالت دلخواه است. حساب کنید که در کدام جهت می بایست اندازه گیری کنیم تا بیشترین تفاوت بین توابع توزیع ناشی از اندازه گیری بدست آید.

پ: فاصله بین دو حالت ρ و σ را از رابطه (۳۹) بدست آورید و صحت رابطه (۴۴) را تحقیق کنید.

■ **تمرین :** حالت $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ و حالت $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$ را در نظر بگیرید که در آن

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle), \quad |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle - |1,1\rangle). \quad (۴۹)$$

نشان دهید که با هیچ نوع اندازه گیری موضعی این دو حالت را نمی توان از هم تشخیص داد. فاصله بین این دو حالت را حساب کنید.

■ **نامساوی مثلث:** با استفاده از رابطه ۴۴ می توان نامساوی مثلث را برای فاصله کوانتومی بین دو حالت ثابت کرد. این نامساوی بیان می کند که برای هر سه حالت کوانتومی رابطه زیر برقرار است:

$$D(\rho, \sigma) \leq D(\rho, \nu) + D(\nu, \sigma). \quad (۵۰)$$

برای اثبات این رابطه می نویسیم:

$$D(\rho, \sigma) = \text{tr}(P^*(\rho - \sigma)), \quad (۵۱)$$

که در آن P^* تصویرگری است که نامساوی ۴۴ را تبدیل به تساوی می کند. حال می نویسیم:

$$\begin{aligned} D(\rho, \sigma) &= \text{tr}(P^*(\rho - \nu) + P^*(\nu - \sigma)) \\ &= \text{tr}(P^*(\rho - \nu)) + \text{tr}(P^*(\nu - \sigma)) \leq D(\rho, \nu) + D(\nu, \sigma). \end{aligned} \quad (۵۲)$$

که در آن دوباره از نامساوی ۴۴ استفاده کرده ایم. به این ترتیب نامساوی مثلث ثابت می شود.

■ تمرین: ثابت کنید که در هر بعدی همواره رابطه زیر برقرار است:

$$0 \leq D(\rho, \sigma) \leq 1. \quad (۵۳)$$

راهنمایی: از نامساوی مثلث برای یک ماتریس چگالی مناسب سوم استفاده کنید.

حال به بیان و اثبات خاصیت مهمی از فاصله کوانتومی می پردازیم. این خاصیت بیان می کند که فاصله حالت های کوانتومی در اثر هر عمل کوانتومی (هر نگاشت مثبت و رد نگه دار) کم می شود. به عبارت بهتر تحت اعمال کوانتومی حالت ها به هم شبیه تر شده و فاصله آنها از یکدیگر کمتر می شود. این رابطه به این صورت بیان می شود:

$$D(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{E}(\sigma)) \leq D(\rho, \sigma), \quad (۵۴)$$

که در آن $\mathcal{E}$ یک نگاشت مثبت و رد نگه دار است. برای اثبات آن از آنچه که در اثبات روابط قبلی یادگرفته ایم استفاده می کنیم و P^* را تصویرگری می گیریم که فاصله $D(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{E}(\sigma))$ را تعریف می کند. سپس می نویسیم:

$$\begin{aligned} D[\mathcal{E}(\rho), \mathcal{E}(\sigma)] &= \text{tr}[P^*(\mathcal{E}(\rho) - \mathcal{E}(\sigma))] \\ &= \text{tr}[P^*\mathcal{E}(\rho - \sigma)] = \text{tr}[P^*\mathcal{E}(Q - S)] = \text{tr}[P^*(\mathcal{E}(Q) - \mathcal{E}(S))] \leq \text{tr}[P^*\mathcal{E}(Q)] \\ &\leq \text{tr}[\mathcal{E}(Q)] = \text{tr}(Q) = D(\rho, \sigma). \end{aligned} \quad (۵۵)$$

به این ترتیب قضیه ثابت می شود.

به عنوان یک مثال $\mathcal{E}$ را نگاشتی بگیرید که روی یک قسمت از سیستم دو قستی رد می گیرد، یعنی

$$\mathcal{E}(\rho^{AB}) = \text{tr}_B(\rho^{AB}) = \rho^A. \quad (۵۶)$$

در این صورت نتیجه این قضیه این است که:

$$D(\rho^A, \sigma^A) \leq D(\rho^{AB}, \sigma^{AB}). \quad (۵۷)$$

■ تمرین: دو حالت مختلف بل را در نظر بگیرید. فاصله آنها را قبل و بعد از عبور از کانال بالا حساب کنید.

حال به یکی از مهم ترین خاصیت های فاصله یعنی خاصیت تقعر قوی^۵ می پردازیم که مبنای خیلی از خاصیت های دیگر است. این خاصیت درست مشابه حالت کلاسیک است. فرض کنید که $\{\lambda_i\}$ و $\{\mu_i\}$ دو مجموعه اعداد مثبت باشند که مجموع هرکدام از آنها به تنهایی برابر با یک باشد. به بیان دیگر این دو مجموعه را می توان به عنوان دو تابع توزیع گسسته احتمال در نظر گرفت. در این صورت شرط تحدب قوی بیان می کند که رابطه زیر بین فاصله ها برقرار است:

$$D\left(\sum_i \lambda_i \rho_i, \sum_i \mu_i \sigma_i\right) \leq D(\lambda, \mu) + \sum_i \lambda_i D(\rho_i, \sigma_i), \quad (58)$$

که در آن منظور از $D(\lambda, \mu)$ فاصله بین دو تابع توزیع کلاسیک است که در بخش های قبلی تعریف شده است. برای اثبات این رابطه به ترتیب زیر عمل می کنیم.

$$\begin{aligned} D\left(\sum_i \lambda_i \rho_i, \sum_i \mu_i \sigma_i\right) &= tr \left[P^* \left(\sum_i \lambda_i \rho_i - \sum_i \mu_i \sigma_i \right) \right] \\ &= tr \left[P^* \sum_i (\lambda_i - \mu_i) \rho_i + P^* \sum_i \mu_i (\rho_i - \sigma_i) \right] \leq tr \left[P^* \sum_i (\lambda_i - \mu_i) \rho_i \right] + \sum_i \mu_i tr [P^* (\rho_i - \sigma_i)] \\ &\leq tr \left[P^* \sum_i (\lambda_i - \mu_i) \rho_i \right] + \sum_i \mu_i D(\rho_i, \sigma_i). \end{aligned} \quad (59)$$

حال باید ثابت کنیم که جمله اول طرف راست از فاصله کلاسیک بین دو تابع توزیع کلاسیک λ و μ کمتر است. برای این کار این جمله را به این صورت می نویسیم

$$tr \left[P^* \sum_i (\lambda_i - \mu_i) \rho_i \right] = tr [P^* (\rho - \rho')] \quad (60)$$

که در آن $\rho = \sum_i \lambda_i \rho_i$ و $\rho' = \sum_i \mu_i \rho_i$ دو تابع توزیع جدید هستند. اما بنابر قضایایی که قبلاً ثابت کرده ایم داریم

$$tr [P^* (\rho - \rho')] \leq D(\rho, \rho') = \frac{1}{2} tr |\rho - \rho'| = \frac{1}{2} tr \left| \sum_i (\lambda_i - \mu_i) \rho_i \right|. \quad (61)$$

در مرحله آخر از نامساوی مثلث برای رد استفاده می کنیم که بر مبنای آن

$$tr |A + B| \leq tr |A| + tr |B|, \quad (62)$$

Strong Concavity^۵

و در نتیجه خواهیم داشت

$$\text{tr} [P^*(\rho - \rho')] \leq \frac{1}{2} \sum_i \text{tr} |(\lambda_i - \mu_i) \rho_i| = \frac{1}{2} \sum_i |\lambda_i - \mu_i| = D(\lambda, \mu). \quad (63)$$

با ترکیب رابطه ۵۹ و ۶۳ به رابطه ۵۸ می‌رسیم.

■ **تمرین :** نشان دهید که فاصله دو حالت کوانتومی تحت تبدیلات یکانی ناورداست.

■ اهمیت روابط تحدب و تقعر:

در بسیاری از موارد می‌خواهیم کمینه یک تابع از ماتریس‌های چگالی را حساب کنیم. فضای ماتریس‌های چگالی در حالت کلی (وقتی که دیگر با کیوبیت‌ها سروکار نداریم، یک فضای خیلی بزرگ است). در چنین مسایلی اگر تابع مورد نظر یک تابع محدب یا باشد بلافاصله می‌توانیم بگوییم که نقطه‌ای که تابع مقدار کمینه خود را اختیار می‌کند حتماً می‌بایست یک حالت خالص باشد و این ساده‌سازی خیلی مهمی است. دلیل این نکته هم این است که مخلوط کردن حالت‌ها همیشه مقدار یک تابع محدب را افزایش می‌دهد، پس اگر می‌خواهیم به طرف نقطه کمینه حرکت کنیم می‌بایست هر چه بیشتر حالت‌ها را خالص کنیم. (این موضوع با مراجعه به شکل (۲۶) به آسانی فهمیده می‌شود.) به همین ترتیب اگر بخواهیم بیشینه یک تابع مقعر را روی فضای ماتریس‌های چگالی پیدا کنیم می‌توانیم استدلال کنیم که بیشینه این تابع در یک حالت خالص اتفاق می‌افتد. بازهم دلیل‌اش این است که هر چه حالت‌ها را با هم مخلوط می‌کنیم مقدار تابع یک مقعر کمتر می‌شود، پس اگر می‌خواهیم بیشینه یک تابع مقعر را بدست آوریم می‌بایست هر چه بیشتر حالت‌ها را خالص کنیم.

۵ تشابه حالت‌های کوانتومی

تشابه بین دو حالت کوانتومی نیز می‌بایست چنان تعریف شود که یک معنای عملیاتی مشخص داشته باشد. در واقعی کاری که در آزمایشگاه انجام می‌دهیم آن است که روی یک حالت کوانتومی آزمایش و اندازه‌گیری انجام می‌دهیم و این اندازه‌گیری یک تابع توزیع احتمال تولید می‌کند،

به این معنا که نتایج مشخص با احتمالات مشخص بدست می آید. مثلاً فرض کنید که یک اندازه گیری $POVM$ با المان های $\{E_m\}$ روی حالت های کوانتومی ρ و σ انجام می دهیم. احتمال بدست آمدن نتیجه m از حالت ρ برابر است با $p_m := tr(\rho E_m)$ و احتمال بدست آمدن نتیجه m از حالت σ برابر است با $q_m := tr(\sigma E_m)$. میزان نزدیکی این دو تابع احتمال کلاسیک معیاری است از نزدیکی دو حالت کوانتومی ρ و σ . ولی در این جا یک نکته مهم مطرح است و آن اینکه ممکن است که دو حالت ρ و σ با یک اندازه گیری به خوبی تمیز داده نشوند. به عنوان مثال دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\rho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|), \quad \sigma = |+\rangle\langle +|, \quad (64)$$

که در آن $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. واضح است که اندازه گیری در پایه z روی هر دو حالت یک نتیجه بدست می دهد. بنابراین اگر می خواهیم تفاوت این دو حالت را معین کنیم می بایست یا روی همه اندازه گیری ها متوسط بگیریم یا اینکه آن اندازه گیری را انتخاب کنیم که کمترین شباهت را یا بیشترین فاصله را بین توابع توزیع احتمال p و q تولید می کند. خواهیم دید که تعریفی که از شباهت برای دو حالت کوانتومی ارائه می کنیم با این معیار دوم مطابق است. برای تعریف شباهت می توانیم از یک تعریف آزمایشی شروع کنیم و سعی کنیم که آن را اصلاح کرده و به یک تعریف نهایی خوب برسیم. در مرحله اول به نظر می رسد که تعریف زیر مناسب باشد:

$$F_0(\rho, \sigma) = tr(\rho\sigma) ? \quad (65)$$

این تعریف همان ضرب داخلی بین دو ماتریس هرمیتی است و به نظر می رسد که تعریف مناسبی باشد. فقط یک عیب دارد و آن اینکه انتظار داریم که شباهت یک حالت با خودش برابر با یک باشد و حال آنکه این تعریف چنین خاصیتی ندارد زیرا $tr(\rho\rho)$ و در نتیجه $F_0(\rho, \rho) \neq 1$. در واقع تنها برای حالت های خالص است که این شرط برآورده می شود. اگر می خواهیم این شرط که شرط مهمی است برآورده شود می توانیم تعریف زیر را امتحان کنیم:

$$F_1(\rho, \sigma) = tr(\sqrt{\rho\sigma}) ? \quad (66)$$

این تعریف اشکال بالا را برطرف می کند ولی عیب اش این است که نسبت به ρ و σ متقارن نیست، یعنی $F_1(\rho, \sigma) \neq F_1(\sigma, \rho)$. برای رفع این اشکال می توانیم تشابه را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$F_2(\rho, \sigma) = tr(\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}) ? \quad (67)$$

این تعریف اشکالات هر دو تعریف قبلی را برطرف می کند زیرا هم متقارن است و هم تشابه هر حالت با خودش برابر با یک می شود. اما یک اشکال دیگر دارد زیرا اگر چه $\sqrt{\rho}$ و $\sqrt{\sigma}$ هر دو هرمیتی و مثبت هستند، حاصلضرب آن ها الزاما هرمیتی نیست و ویژه مقادارهای یک ماتریس غیرهرمیتی نیز الزاما حقیقی نیستند. بنابراین تعریف نهایی را به صورت زیر اختیار می کنیم.

$$F(\rho, \sigma) = \text{tr}(|\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}|) \quad (۶۸)$$

با توجه به اینکه به ازای هر ماتریس A

$$|A| = \sqrt{AA^\dagger} \quad (۶۹)$$

بدست می آوریم:

$$F(\rho, \sigma) = \text{tr}(\sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}}). \quad (۷۰)$$

این تعریف بوضوح دارای این خاصیت است که $F(\rho, \rho) = 1$ است. ولی واضح نیست که نسبت به جابجایی ρ و σ متقارن باشد. اما با توجه به اینکه $A := \sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}$ ، و هم چنین این که

$$\text{tr}(\sqrt{AA^\dagger}) = \text{tr}(|A|) = \text{tr}(|A^\dagger|) \quad (۷۱)$$

تقارن F نسبت به ρ و σ واضح می شود.

■ **تمرین :** ثابت کنید که $\text{tr}(|A|) = \text{tr}(|A^\dagger|)$.

■ **تمرین :** دو حالت دلخواه را در کره بلوخ در نظر بگیرید که با بردارهای r و s مشخص می شوند. تشابه این دو حالت را محاسبه کنید.

هرگاه که ρ و σ با هم جابجا شوند آنگاه مقدار تشابه دو حالت کوانتومی دقیقا با تشابه کلاسیک بین ویژه مقادارهای آن ها یکی می شود. در واقع تحت این شرایط می توانیم هر دو حالت کوانتومی را در یک پایه قطری کنیم:

$$\rho = \sum_i r_i |i\rangle\langle i|, \quad \sigma = \sum_i s_i |i\rangle\langle i|. \quad (72)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} F(\rho, \sigma) &= \text{tr} \sqrt{\sum_i r_i s_i |i\rangle\langle i|} \\ &= \text{tr} \left(\sum_i \sqrt{r_i s_i} |i\rangle\langle i| \right) \\ &= \sum_i \sqrt{r_i s_i} = F(r, s). \end{aligned} \quad (73)$$

که در آن r و s دو تابع توزیع احتمال کلاسیک هستند. یکی دیگر از مواقعی که می توان تشابه دو حالت کوانتومی را به راحتی حساب کرد وقتی است که یکی از حالت ها خالص باشد. در این صورت با توجه به اینکه $\|\psi\rangle\langle\psi\| = \frac{1}{2}(|\psi\rangle\langle\psi|)$ خواهیم داشت:

$$F(|\psi\rangle, \rho) = \text{tr} \sqrt{\langle\psi|\rho|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle} = \sqrt{\langle\psi|\rho|\psi\rangle}. \quad (74)$$

یکی از مهمترین قضایایی که در باره تشابه دو حالت کوانتومی وجود دارد قضیه یولمان^۶ است. این قضیه در اثبات بسیاری دیگر از خواص تشابه کوانتومی به کار می رود و به شکل زیر بیان می شود.

■ **قضیه یولمان :** فرض کنید که ρ و σ دو حالت از یک سیستم کوانتومی Q باشند. نمونه دیگری از سیستم کوانتومی Q که آن را با R نمایش می دهیم در نظر می گیریم. در این صورت هرگاه $|\psi\rangle$ و ϕ دو خالص سازی از ρ و σ روی RQ باشند آنگاه

$$F(\rho, \sigma) = \max_{|\psi\rangle, |\phi\rangle} |\langle\psi|\phi\rangle|, \quad (75)$$

که در آن ماکزیمم گیری روی تمام خالص سازی ها صورت می گیرد.

قبل از اینکه به اثبات این قضیه در حالت کلی بپردازیم بهتر است که یک مثال ساده را حل کنیم.

■ تمرین: دو حالت $\sigma_A = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ و $\rho_A = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ را در نظر بگیرید.

الف: یک بار فاصله آنها را مستقیماً از تعریف بدست آورید.

ب: حال دو خالص سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) \quad , \quad \sigma_A = \text{Tr}_B(|\phi\rangle_{AB}\langle\phi|) \quad (۷۶)$$

که در آن

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{AB} &= \sqrt{\frac{1+r}{2}}|\hat{\mathbf{r}}\rangle|0\rangle + \sqrt{\frac{1-r}{2}}|-\hat{\mathbf{r}}\rangle|1\rangle \\ |\phi\rangle_{AB} &= \sqrt{\frac{1+s}{2}}|\hat{\mathbf{s}}\rangle|\alpha\rangle + \sqrt{\frac{1-s}{2}}|-\hat{\mathbf{s}}\rangle|\alpha^\perp\rangle \end{aligned} \quad (۷۷)$$

که در آن $|\alpha\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ یک حالت دلخواه است. نخست خود را قانع کنید که این دو حالت خالص شده ماتریس های چگالی اولیه هستند. سپس نشان دهید که اگر بیشترین مقدار همپوشانی این دو حالت را حساب کنید به شباهت دو ماتریس چگالی می رسید.

پس از این مثال به اثبات قضیه اولمان می پردازیم. برای اثبات این قضیه نخست به یک لم احتیاج داریم:

■ لم: هرگاه A یک ماتریس دلخواه باشد و U یک ماتریس یکانی باشد، آنگاه

$$|\text{tr}(AU)| \leq \text{tr}|A|.$$

■ اثبات لم: بنابر قضیه تجزیه قطبی^۷ می دانیم که هر ماتریس را می توان به صورت زیر نوشت:

$$A = |A|V$$

که در آن $|A|$ یک ماتریس مثبت و V یک ماتریس یکانی است. بنابراین می توانیم بنویسیم

$$\text{tr}(AU) = \text{tr}(|A|VU) = \text{tr}(|A|W) \quad (۷۸)$$

^۷Polar Decomposition

که در آن $W = VU$ یک ماتریس یکانی است. بنابراین داریم

$$\text{tr}(AU) = \text{tr}(|A|^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}W) \quad (۷۹)$$

حال از قضیه کوشی شوارتز برای ضرب داخلی ماتریس ها استفاده می کنیم که بر مبنای آن به ازای هر دو ماتریس

$$|\text{tr}(XY)| \leq \sqrt{XX^\dagger} \sqrt{YY^\dagger} \quad (۸۰)$$

اگر در رابطه قبلی قرار دهیم

$$X = |A|^{\frac{1}{2}}, \quad Y = |A|^{\frac{1}{2}}W$$

به اثبات لم می رسیم.

حال می توانیم به اثبات قضیه یولمان پردازیم. نخست به یاد می آوریم که خالص سازی یک حالت به چه معناست. هرگاه یک حالت مثل ρ_A از سیستم A داشته باشیم، حالت $|\psi\rangle_{AB}$ از یک سیستم بزرگ تر را یک خالص سازی از ρ_A می خوانیم هرگاه داشته باشیم $\text{tr}_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) = \rho_A$. ساده ترین روش برای خالص سازی آن است که نخست ρ_A را به صورت زیر تجزیه طیفی کنیم

$$\rho_A = \sum_i \lambda_i |a_i\rangle\langle a_i| \quad (۸۱)$$

و سپس با تعریف یک مجموعه از بردارهای متعامد و یک $|b_i\rangle$ از سیستم B قرار دهیم

$$|\psi_\rho\rangle_{Ab} := \sum_i \sqrt{\lambda_i} |a_i\rangle_A |b_i\rangle_B. \quad (۸۲)$$

می توان نشان داد که تمام خالص سازی های ممکن با عمل ماتریس های یکانی روی سیستم B به هم مرتبط هستند، دلیل آن هم این است که برای سیستم B مجموعه بردارهای متعامد متفاوتی می توانیم اختیار کنیم. حال یک حالت مرجع مثل حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|\alpha\rangle_{AB} = \sum_i |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B. \quad (۸۳)$$

که در آن $\{|i\rangle\}$ ها پایه ای برای هر کدام از فضاها هستند. در واقع این حالت یک حالت بل تعمیم یافته است. (این حالت را نرمالیزه نگرفته ایم.). می توان پایه های فوق را با ماتریس های یکانی $U \otimes V$ طوری چرخاند که حالت زیر درست شود:

$$(U \otimes V)|\alpha\rangle = \sum_i |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle \quad (۸۴)$$

سپس می توان با اثر عملگر $\sqrt{\rho} \otimes I$ روی دو طرف به حالت خالص شده رسید یعنی

$$|\psi_\rho\rangle = (\sqrt{\rho}V \otimes U)|\alpha\rangle. \quad (۸۵)$$

به همین ترتیب بدست می آوریم

$$|\psi_\sigma\rangle = (\sqrt{\sigma}V' \otimes U')|\alpha\rangle. \quad (۸۶)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\langle\psi_\rho|\psi_\sigma\rangle = \langle\alpha|(V^\dagger\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}V') \otimes (U^\dagger U')|\alpha\rangle \quad (۸۷)$$

■ تمرین: درستی اتحاد زیر را نشان دهید

$$\langle\alpha|X \otimes Y|\alpha\rangle = tr(XY^T). \quad (۸۸)$$

حال با استفاده از این تمرین می نویسیم

$$|\langle\psi_\rho|\psi_\sigma\rangle| = |tr(V^\dagger\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}V')U'^T U^*| = |tr(\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}W)| \quad (۸۹)$$

که در آن $W = V'U'^T U^*V^\dagger$ ماتریس یکانی است. با استفاده از لمی که در ابتدا ثابت کردیم خواهیم داشت:

$$|\langle\psi_\rho|\psi_\sigma\rangle| = |tr(\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}W)| \leq tr(|\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}|) = F(\rho, \sigma). \quad (۹۰)$$

حال باید نشان دهیم که تساوی نیز برقرار می شود، یعنی یک خالص سازی وجود دارد که تساوی را برقرار می کند. برای یافتن این خالص

سازی به ترتیب زیر عمل می کنیم. فرض کنید که $\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}$ دارای تجزیه قطبی زیر است:

$$\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma} = |\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}|\Omega.$$

در این صورت کافی است که ماتریس یکانی بالا را به ترتیبی اختیار کنیم که داشته باشیم:

$$\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}W = |\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}|.$$

معنای این حرف این است که قرار دهیم $W = \Omega^\dagger$ و با توجه به فرم W معلوم است که این کار را به شیوه های گوناگون می توان انجام داد . یک راه این است که قرار دهیم $V' = U' = U = I$ و $V = \Omega$. به این ترتیب آن خالص سازی ای که تساوی را برقرار می کند برابر است با:

$$|\psi_\rho\rangle = (\sqrt{\rho}\Omega \otimes I)|\alpha\rangle, \quad |\psi_\sigma\rangle = (\sqrt{\sigma}I \otimes I)|\alpha\rangle, \quad . \quad (91)$$

اثبات قضیه در این جا کامل می شود.

دو حالت کوانتومی مثل

$$\rho = |+\rangle\langle+|, \quad \sigma = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \quad (92)$$

را در نظر بگیرید. هرگاه روی این دو حالت در پایه Z یعنی $|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|$ اندازه گیری کنیم به هیچ وجه متوجه اختلاف این دو حالت نمی شویم زیرا در هر دو حالت احتمال بدست آوردن 0 و 1 برابر با $1/2$ است. بنابراین با این نوع اندازه گیری ممکن است که به غلط ادعا کنیم که این دو حالت یکسان هستند یا شباهت بسیار زیادی به هم دارند و حال آنکه این دو حالت با هم یکی نیستند. برای آنکه شباهت واقعی این دو حالت را بدست آوریم می بایست اندازه گیری خود را تغییر دهیم. در وقاع اگر این دو حالت را در پایه X یعنی $|+\rangle\langle+|, |-\rangle\langle-|$ اندازه گیری کنیم آنگاه نتایج زیر بدست می آیند:

$$P_\rho(+) = 1, \quad P_\rho(-) = 0, \quad P_\sigma(+) = P_\sigma(-) = \frac{1}{2}. \quad (93)$$

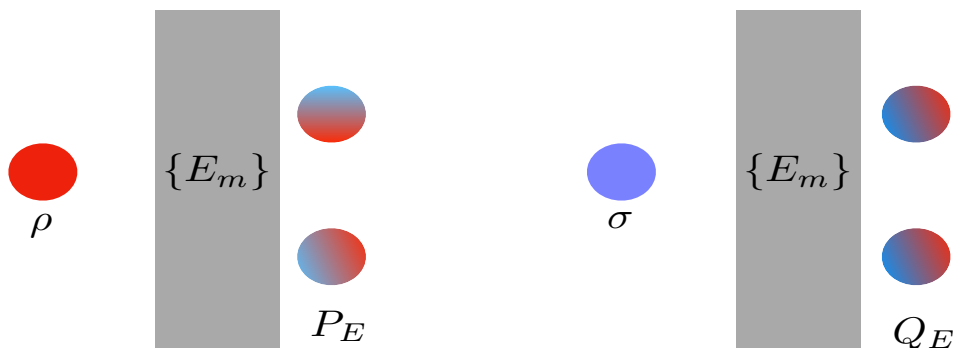
بنابراین شباهت نتایج اندازه گیری در این جا برابر است با:

$$F(P_\rho, P_\sigma) = \sum_{i=+,-} P_\rho(i)P_\sigma(i) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (94)$$

می توانیم اندازه گیری های دیگری را امتحان کنیم. منطقی است که شباهت این دو حالت را بر اساس مقدار کمینه ای که در تمام اندازه گیری ها بدست می آوریم تعریف کنیم و این درست همان چیزی است که رابطه تشابه کوانتومی به ما می گوید. در حقیقت قضیه زیر را می توانیم ثابت کنیم:

قضیه: هرگاه $E = \{E_m\}$ یک اندازه گیری $POVM$ باشد آنگاه

$$F(\rho, \sigma) \leq F(P_E, Q_E) \quad (95)$$



شکل ۵: عدم قطعیت کوانتومی در هر نوع اندازه گیری باعث می شود که توانایی ما برای تمیز حالت های کوانتومی کم شود. این امر به این معناست که امار ناشی از اندازه گیری برای دو حالت کاملاً مختلف نیز می تواند به هم شبیه باشد.

که در آن $P_E = \{q_m := \text{tr}(\rho E_m)\}$ و $Q_E = \{q_m := \text{tr}(\sigma E_m)\}$ دو تابع توزیع کلاسیک ناشی از اندازه گیری روی این دو حالت هستند. دلیل این نامساوی هم معلوم است چرا که آماری که یک اندازه گیری کوانتومی تولید می کند همواره همراه با یک عدم قطعیت ذاتی ناشی از مکانیک کوانتومی است که باعث می شود نتوانیم حالت ها را به درستی از هم تشخیص دهیم. شکل (۵) این موضوع را به صورت شماتیک نشان می دهد.

■ اثبات: نخست توجه می کنیم که $F(\rho, \sigma) = \text{tr}|A|$ که در آن $A = \sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}$. سپس از این استفاده می کنیم که هر ماتریسی مثل A یک تجزیه قطبی دارد به این معنا که

$$A = |A|U^\dagger, \longrightarrow |A| = AU, \quad (96)$$

که در آن U یک ماتریس یکانی است. بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$F(\rho, \sigma) = \text{tr}(\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}U) = \sum_m \text{tr}(\sqrt{\rho}\sqrt{E_m}\sqrt{E_m}\sqrt{\sigma}U). \quad (97)$$

در اینجا از این استفاده کرده ایم که $\sum_m E_m = I$. حال از قضیه کوشی-شوارتز استفاده می کنیم که بر مبنای آن برای دو ماتریس دلخواه

$$\text{tr}(A^\dagger B) \leq \sqrt{\text{tr}(AA^\dagger)} \sqrt{\text{tr}(BB^\dagger)}. \quad (98)$$

هرگاه در این رابطه قرار دهیم $A = \sqrt{\rho} \sqrt{E_m}$ و $B = \sqrt{E_m} \sqrt{\sigma} U$ ، و آن را با رابطه قبلی ترکیب کنیم بدست می آوریم

$$F(\rho, \sigma) \leq \sum_m \sqrt{\text{tr}(E_m \rho) \text{tr}(E_m \sigma)}. \quad (99)$$

به این ترتیب ثابت کرده ایم که تشابه دو حالت کوانتومی به ترتیبی که تعریف کرده ایم از تشابه احتمالات کلاسیکی که ناشی از هر نوع اندازه گیری است کمتر است. این که آیا واقعا اندازه گیری ای وجود دارد که تشابه احتمالات کلاسیکی اش دقیقا برابر با تشابه کوانتومی بین حالات باشد سوالی است که پاسخ آن مثبت است اگرچه اثبات آن را ما بیان نخواهیم کرد. بازهم برای اثبات این قضیه خواننده می تواند به کتاب نیلسون و چوانگ مراجعه کند. این قضیه بیان می کند که حتما یک اندازه گیری $POVM$ مثل $\{E_m^*\}$ وجود دارد به قسمی که

$$F(\rho, \sigma) = \sum_m \sqrt{\text{tr}(E_m^* \rho) \text{tr}(E_m^* \sigma)}. \quad (100)$$

از این موضوع در آینده استفاده های زیادی خواهیم کرد.

به همانگونه که ثابت کردیم فاصله حالت های کوانتومی تحت عبور از یک کانال کم می شود، اکنون می خواهیم ثابت کنیم که شباهت حالت های کوانتومی در عبور از یک کانال زیاد می شود یعنی حالت ها به هم شبیه تر می شوند. این مسئله در قضیه زیر بیان می شود.

■ **قضیه: یکنوایی فیدلیته** در عبور از هر کانالی فیدلیته یا تشابه حالت های کوانتومی زیاد می شود یعنی به ازای هر نگاشت مثبت $\mathcal{E}$:

$$F(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{E}(\sigma)) \geq F(\rho, \sigma) \quad (101)$$

دقت کنید که $\mathcal{E}$ یک نگاشت مثبت است و نه الزاما نه یک نگاشت کاملا مثبت.

■ **نخست از یک لم استفاده می کنیم:** فرض کنید که $|\psi\rangle_{AB}$ خالص شده یک ماتریس چگالی ρ_A باشد. خالص شده ی $\mathcal{E}(\rho_A)$ چیست؟

برای پاسخ به این سوال توجه می کنیم که $E(\rho_A)$ را همواره می توان به این شکل نوشت:

$$E(\rho_A) = \text{Tr}_B \left(U_{AC} (\rho_A \otimes |0\rangle_C \langle 0|) U_{AC}^\dagger \right) \quad (102)$$

اما می دانیم که

$$\rho_A = Tr_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|). \quad (103)$$

با ترکیب این دو رابطه و استفاده از خاصیت های رد جزیی بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} E(\rho_A) &= Tr_C(U_{AC}[\rho_A \otimes |0\rangle_C\langle 0|]U_{AC}^\dagger) \\ &= Tr_C(U_{AC}[Tr_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) \otimes |0\rangle_C\langle 0|]U_{AC}^\dagger) \\ &= Tr_{BC}(|\Psi\rangle_{ABC}\langle\Psi|), \end{aligned} \quad (104)$$

که در آن

$$|\Psi\rangle_{ABC} = U_{AC}(|\psi\rangle_{AB} \otimes |0\rangle_C). \quad (105)$$

حال از این لم برای اثبات قضیه اصلی استفاده می کنیم. فرض کنید که $|\psi^*\rangle$ و $|\phi^*\rangle$ حالت های خالص شده ρ و σ هستند که بنابر قضیه یولمان در رابطه زیر صدق می کنند: یعنی

$$F(\rho, \sigma) = |\langle\psi^*|\phi^*\rangle|. \quad (106)$$

بنابر لمی که ثابت کردیم خالص شده های $E(\rho)$ و $E(\sigma)$ به ترتیب عبارتند از:

$$|\Psi\rangle = U|\psi^*\rangle|0\rangle, \quad |\Phi\rangle = U|\phi^*\rangle|0\rangle. \quad (107)$$

از قضیه اولمان استفاده می کنیم و قرار می دهیم

$$F(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{E}(\sigma)) \geq |\langle\Psi|\Phi\rangle| = |\langle\psi^*\langle 0|U^\dagger U|\phi^*\rangle|0\rangle| = |\langle\psi^*|\phi^*\rangle| = F(\rho, \sigma). \quad (108)$$

در قسمت اول این تساوی بازهم از قضیه یولمان استفاده کرده ایم .

■ تمرین: کانال واقطبش با پارامتر p را در نظر بگیرید. تشابه دو حالت را که با بردارهای بلوخ r و s مشخص می شوند قبل از ورود به کانال و بعد از خروج از کانال با هم مقایسه کنید.

■ تمرین: دو حالت خالص d بعدی $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ را در نظر بگیرید و آنها را از کانال واقتبش d بعدی عبور دهید. کانال واقتبش d بعدی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p\frac{I}{d}. \quad (109)$$

الف: تشابه دو حالت بالا را قبل از ورود به کانال و بعد از خروج از آن با هم مقایسه کنید.

ب: فاصله دو حالت بالا را قبل از ورود به کانال و بعد از خروج از آن با هم مقایسه کنید.

قبلا دیدیم که وقتی حالت های کوانتومی را با هم مخلوط می کنیم فاصله آنها از هم کمتر می شود. این خاصیت همان خاصیت تحدب قوی فاصله بود. در مورد تشابه نیز خاصیتی شبیه به این برقرار است به این معنا که وقتی که حالت های کوانتومی را باهم مخلوط می کنیم تشابه این حالت ها زیاد تر می شود. این خاصیت را اصطلاحاً خاصیت تعقر قوی *StrongConcavity of Fidelity* می گوئیم و به شکل زیر بیان می شود:

■ قضیه: خاصیت تحدب قوی برای فیدلیته

$$F\left(\sum_i p_i \rho_i, \sum_i q_i \sigma_i\right) \geq \sum_i \sqrt{p_i q_i} F(\rho_i, \sigma_i). \quad (110)$$

■ اثبات: برای اثبات این خاصیت از قضیه یولمان استفاده می کنیم. فرض کنید که $|\psi_i\rangle$ و $|\phi_i\rangle$ به ترتیب آن نوع ویژه از حالت های خالصی باشند که مطابق با قضیه اولمان تساوی زیر را برقرار می کنند:

$$F(\rho_i, \sigma_i) = |\langle \psi_i | \phi_i \rangle|. \quad (111)$$

دقت کنید که همواره می توانیم $|\psi_i\rangle$ و $|\phi_i\rangle$ را طوری انتخاب کنیم که $\langle \psi_i | \phi_i \rangle$ یک عدد مثبت باشد. این کار را می توانیم با ضرب کردن این حالت های در فازهای مناسب انجام دهیم.

حال حالت های بزرگتری به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$|\Psi\rangle := \sum_i \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle_{AB} |i\rangle_C, \quad |\Phi\rangle := \sum_i \sqrt{p_i} |\phi_i\rangle_{AB} |i\rangle_C. \quad (112)$$

این حالت های خالص، حالت هایی هستند که ρ و σ را خالص می کنند یعنی اینکه

$$\rho_A \equiv \sum_i p_i \rho_i = tr_{BC} |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad \sigma_A \equiv \sum_i q_i \sigma_i = tr_{BC} |\Phi\rangle\langle\Phi|. \quad (113)$$

دقت کنید که در اینجا ρ_i و σ_i ماتریس چگالی مربوط به سیستم A هستند. حالت های $|\psi_i\rangle_{AB}$ و $|\phi_i\rangle_{AB}$ حالت های خالصی هستند که این ماتریس های چگالی را خالص می کنند. و سپس با افزودن یک سیستم C و رد گرفتن روی B و C به ماتریس های حالت ρ و σ می رسم. حال از قضیه اولمان می دانیم که

$$\begin{aligned} F(\rho_A, \sigma_A) &\equiv F\left(\sum_i p_i \rho_i, \sum_i q_i \sigma_i\right) \geq |\langle\Psi|\Phi\rangle| \\ &= \left| \sum_i \sqrt{p_i q_i} \langle\psi_i|\phi_i\rangle \right| = \sum_i \sqrt{p_i q_i} \langle\psi_i|\phi_i\rangle = \sum_i \sqrt{p_i q_i} F(\rho_i, \sigma_i), \end{aligned} \quad (114)$$

که در آن از مثبت بودن $\langle\psi_i|\phi_i\rangle$ استفاده کرده ایم و اینکه $|\langle\psi_i|\phi_i\rangle| = F(\rho_i, \sigma_i)$

۶ کیفیت یک کانال کوانتومی

یک کانال کوانتومی خوب آن است که حالت های کوانتومی را بدون هیچ گونه تغییری به مقصد ارسال کند. این کانال کوانتومی خوب می تواند یک فیبر نوری باشد که از آن برای ارسال حالت های فوتون ها استفاده می شود یا اینکه یک حافظه کوانتومی که حالت های کوانتومی را در خود نگاه می دارد. بنابراین معیاری برای کیفیت یک کانال کوانتومی آن است که ببینیم فیدلیته حالت ورودی و حالت خروجی آن چقدر است. بنابراین نخست می بایست تشابه یک حالت ورودی و خروجی را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$F(\mathcal{E}, |\psi\rangle) := F(|\psi\rangle, \mathcal{E}(|\psi\rangle)). \quad (115)$$

اما طبیعی است که این عبارت هم بستگی به حالت ورودی و هم بستگی به نوع کانال دارد. ممکن است که یک کانال بعضی از حالت های کوانتومی را سالم منتقل کند ولی بعضی دیگر را بکلی خراب کند. بنابراین معیاری برای کیفیت کانال کوانتومی آن است که یا روی ورودی های

مختلف متوسط بگیریم یا اینکه بدترین حالت را در نظر بگیریم یعنی حالت هایی که کمترین تشابه بین ورودی و خروجی را تولید می کنند. این تعریف دوم است که بعنوان معیاری برای کیفیت یک کانال به کار می رود:

$$F_{min}(\mathcal{E}) := \min_{|\psi\rangle} F(|\psi\rangle, \mathcal{E}(|\psi\rangle)). \quad (116)$$

■ تمرین: کیفیت کانال های بیت-برگردان، فاز برگردان و هم چنین کانال واقطبش را محاسبه کنید.

ممکن است بپرسیم چرا ورودی کانال را یک حالت خالص گرفته ایم، زیرا در عمل ورودی یک کانال کوانتومی الزاما یک حالت خالص نیست. پاسخ در خاصیت تحدب تابع تشابه نهفته است. دیدیم که برای چنین تابعی همیشه مخلوط کردن باعث افزایش مقدار آن می شود بنابراین اگر می خواهیم کمینه تابع را پیدا کنیم باید در جستجوی یک حالت خالص باشیم.