نظریه اطلاعات کوانتومی ـ بخش اول

وحیدکریمی پورـ دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

۲ آذر ۱۳۹۸

۱ مقدمه

همانطور که آنتروپی شانون در نظریه اطلاعات کلاسیک نقش محوری دارد، در نظریه اطلاعات کوانتومی نیز تعمیم آنتروپی شانون که به آن آنتروپی فون نویمان [۱] می گوییم ، نقش کلیدی دارد و همه مفاهیم این نظریه بر مبنای این آنتروپی تعریف می شوند. جالب توجه است که از نظر تاریخی آنتروپی فون نویمان پیش از آنتروپی شانون و توسط جان فون نویمان [۲] ریاضی فیزیکدان مجارستانی الاصل امریکایی که کارهای مهم زیادی را در شاخه های مختلف فیزیک و ریاضیات انجام داده ، معرفی شده است. در این درس ما نخست انتروپی فون نویمان را تعریف کرده و خواص آن را بررسی می کنیم. این مطالعه فعلا بدون توجه به مفهوم فیزیکی این تابع انجام می شود.

[۱] von Neumann Entropy
[۲] John von Neumann

۲ آنتروپی فون نویمان

- تعریف: هرگاه ρ یک ماتریس چگالی باشد، آنتروپی فون نویمان آن به صورت

$$S(\rho) := -tr(\rho \log_2 \rho) \tag{۱}$$

تعریف می شود. هرگاه ρ به صورت زیر قطری شود،

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|, \tag{۲}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$S(\rho) = -\sum_i p_i \log p_i. \tag{۳}$$

به این ترتیب آنتروپی فون نویمان برابر است با همان آنتروپی شانون برای توزیع احتمالی که از ویژه مقدارهای ماتریس چگالی تشکیل شده است.

---

۳ خواص آنتروپی فون نویمان

دراین زیربخش خواص آنتروپی فون نویمان را بیان واکثر آنها را ثابت می کنیم.

- هرگاه ρ یک حالت خالص باشد، $S(\rho) = 0$. اثبات این رابطه ساده است وباقطری کردن ρ براحتی انجام می شود.

- هرگاه $\rho' = U\rho U^\dagger$ که درآن U تبدیل یکانی است آنگاه $S(\rho') = S(\rho)$.

■ هرگاه فضای هیلبرت ρ، d بعدی باشد، $S(\rho) \leq \log_2 d$.

اثبات: باقطری کردن ρ بدست می آوریم

$$S(\rho) = -\sum_i p_i \log_2 p_i = H(\{p_i\}). \qquad (۴)$$

درفصل های قبل دیده ایم که تابع $H(\{p_i\})$ مقدارماکزیمم خود را برای $p_i = \frac{1}{d}$ اختیارمی کند واین ماکزیمم برابراست با $\log_2 d$.

■ تمرین: آنتروپی فون نویمان مربوط به بردارهای درون کره بلوخ را برحسب شعاع بردارها حساب کنید. این تمرین به خوبی نشان می دهد که هر چه حالت خالص تر باشد، آنتروپی فون نویمان آن کمتر و هر چه حالت به یک حالت مخلوط نزدیک تر باشد آنتروپی فون نویمان آن بیشتر است.

■ ماتریس چگالی دوکیوبیتی زیر را در نظر بگیرید. برای آنکه این ماتریس نشان دهنده یک حالت کوانتومی باشد، پارامترهای آن می بایست در یک محدوده معین قرار بگیرند. نخست این محدوده را مشخص کنید. سپس آنتروپی فون نویمان این حالت را حساب کنید و مقدار کمینه و بیشینه آن را بدست آورید.

$$\rho = \frac{1}{4}(I + s_1\sigma_x \otimes \sigma_x + s_2\sigma_y \otimes \sigma_y + s_3\sigma_z \otimes \sigma_z). \qquad (۵)$$

بسیاری ازخواص دیگر آنتروپی فون نویمان بااستفاده ازتعریف آنتروپی نسبی و نامثبت بودن آن ثابت می شوند. بنابراین نخست آنتروپی نسبی را تعریف می کنیم.

■ تعریف: فرض کنید که ρ و σ دو ماتریس چگالی باشند. دراین صورت آنتروپی نسبی به صورت زیرتوصیف می شود:

$$S(\rho \,||\, \sigma) = -tr(\rho(\log_2 \rho - \log_2 \sigma)). \qquad (۶)$$

بدیهی است که آنتروپی نسبی نسبت به تعویض دوماتریس چگالی متقارن نیست.

■ تمرین: دو ماتریس چگالی یک کیوبیتی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}\cdot\sigma), \qquad \sigma = \frac{1}{2}(I + \mathbf{s}\cdot\sigma). \tag{۷}$$

آنتروپی های نسبی زیر را حساب کنید:

$$S(\rho\,||\,\sigma), \qquad S(\sigma\,||\,\rho). \tag{۸}$$

■ تمرین: نشان دهید که

$$S(\rho_1\otimes\rho_2\,||\,\sigma_1\otimes\sigma_2) = S(\rho_1\,||\,\sigma_1) + S(\rho_2\,||\,\sigma_2). \tag{۹}$$

■ قضیه: (نامساوی کلاین [۳]) آنتروپی نسبی همواره کوچکتر یا مساوی با صفر است، یعنی

$$S(\rho\,||\,\sigma) \le 0 \quad \forall\ \rho,\ \ \sigma. \tag{۱۰}$$

دقت کنید که در بعضی از مقالات و کتاب ها عبارت آنتروپی نسبی بدون علامت منفی و به صورت $S(\rho\,||\,\sigma) = tr(\rho\log\rho - \rho\log\sigma)$ تعریف می شود که در این صورت جهت نامساوی کلاین نیز معکوس خواهد بود.

اثبات: پایه ای که ماتریس چگالی ρ درآن قطری است را با $\{|i\rangle\}$ نشان می دهیم. داریم $\rho = \sum_{p_i} |i\rangle\langle i|$ واز آنجا:

$$\begin{aligned} S(\rho\,||\,\sigma) &= -tr(\rho\log\rho - \rho\log\sigma) = -\sum_i \left(p_i\log p_i - \langle i|\rho\log\sigma|i\rangle\right) \\ &= -\sum_i p_i\left(\log p_i - \langle i|\log\sigma|i\rangle\right) \end{aligned} \tag{۱۱}$$

حال پایه ای که σ در آن قطری است را با $\{|\alpha\rangle\}$ نشان می دهیم. $\sigma = \sum_\alpha q_\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|$. درنتیجه رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$S(\rho\,||\,\sigma) = -\sum_i p_i\left(\log p_i - \sum_\alpha P_{i\alpha}\log q_\alpha\right) \tag{۱۲}$$

[۳] Klein Inequality

که درآن $P_{i\alpha}=\langle i|\alpha\rangle\langle\alpha|i\rangle$. واضح است که $0\leq P_{i\alpha}\leq 1$ و $\sum_\alpha P_{i\alpha}=1$. بنابراین با توجه به خاصیت تحدب تابع لگاریتم خواهیم داشت:

$$\sum_\alpha P_{i\alpha}\log q_\alpha \leq \log r_i, \tag{۱۳}$$

که درآن $r_i=\sum_\alpha P_{i\alpha}q_\alpha$. تساوی وقتی برقرار می شود که همه $P_{i\alpha}$ ها بجز یکی برابر با صفر باشند. در نتیجه تا کنون ثابت کرده ایم که

$$S(\rho\,||\,\sigma)\leq \sum_i p_i\frac{\log r_i}{\log p_i} \tag{۱۴}$$

و تساوی وقتی رخ می دهد که همه $P_{i\alpha}$ ها بجز یکی همه برابر با صفر باشند. اما می دانیم که طرف راست خود آنتروپی نسبی دو توزیع احتمال p_i و r_i است و بنابر قضیه ای که در فصل های قبل ثابت کرده ایم، این کمیت همواره کوچکتر یا مساوی با صفر است که تساوی فقط برای وقتی رخ می دهد که $r_i=p_i$. پس تا کنون ثابت کرده ایم که

$$S(\rho\,||\,\sigma)\leq 0 \tag{۱۵}$$

که در آن تساوی وقتی رخ می دهد که $r_i=p_i$ و همه $P_{i\alpha}$ ها بجز یکی همه برابر با صفر باشند.اما این به این معناست که p_i ها با q_i ها یکی باشند. حال بااستفاده از این قضیه به بیان و اثبات دیگر خواص آنتروپی فون نویمان می پردازیم.

- تمرین: دو حالت کیوبیتی خالص $|\phi\rangle$ و $|\psi\rangle$ را در نظر بگیرید. آنتروپی نسبی آنها را حساب کنید. آیا این نتیجه را می توانید به بعدهای دلخواه تعمیم دهید.

- تمرین: یک حالت خالص $|\phi\rangle$ و یک حالت کاملا آمیخته $\frac{I}{2}$ را در نظر بگیرید. آنتروپی نسبی بین آنها را حساب کنید. دقت کنید چون انتروپی نسبی متقارن نیست می بایست دو تابع انتروپی را حساب کنید. آیا این نتیجه را می توانید به بعد دلخواه تعمیم دهید؟

- تمرین: برای کیوبیت ها یک حالت دلخواه ρ

و یک حالت کاملا آمیخته $\frac{I}{2}$ را در نظر بگیرید. آنتروپی نسبی بین آنها را حساب کنید. دقت کنید چون انتروپی نسبی متقارن نیست می بایست دو تابع انتروپی را حساب کنید. آیا این نتیجه را می توانید به بعد دلخواه تعمیم دهید؟

- آنتروپی فون نویمان یک تابع محدب رو به پایین $(Convex\ \ down)$ است. یعنی به ازای $0\leq\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n\leq 1$ به طوریکه $\lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n=1$ داریم

$$S(\lambda_1\rho_1+\cdots\lambda_n\rho_n)\geq\lambda_1 S(\rho_1)+\cdots\lambda_n S(\rho_n). \tag{۱۶}$$

بنابراین با مخلوط کردن حالت های کوانتومی آنتروپی حالت کوانتومی افزایش می یابد که از نظر شهودی نیز معنای روشنی دارد. شکل (۱) به صورت شماتیک نشان می دهد که تابع انتروپی در فضای ماتریس های چگالی چگونه فرمی دارد. با مخلوط کردن حالت ها آنتروپی همواره افزایش می یابد. به این ترتیب اگر در جستجوی حالتی باشیم که کمترین میزان آنتروپی را داشته باشد حتما می بایست این حالت را در زیرمجموعه حالت های خالص جستجو کنیم. هم چنین این شکل نشان می دهد که هرگاه نقطه بیشینه تابع $S(\rho)$ همواره یک بیشینه مطلق است و نه یک بیشینه نسبی.

یک نتیجه از این قضیه به صورت زیر است. فضای ماتریس های چگالی در یک فضای هیلبرت H را با $D(H)$ نشان می دهیم. فرض کنید که $f:D(H)\longrightarrow D(H)$ یک تابع خطی است. این تابع هر ماتریس چگالی را به یک ماتریس چگالی تبدیل می کند. می خواهیم ماتریس چگالی ای مثل ρ_0 را پیدا کنیم که آنتروپی $f(\rho_0)$ کمترین مقدار ممکن باشد. جستجو در فضای همه ماتریس های چگالی کار بسیار سختی است، اما خاصیت تحدب انتروپی می گوید که کافی است جستجوی خود را به فضای ماتریس های چگالی خالص محدود کنیم که فضای بسیار کوچکتری است. برای اثبات این قضیه فرض می کنیم که ρ_0 حالت مورد نظر باشد. این حالت یک تجزیه آنزامبلی به شکل $\rho_0=\sum_k p_k|\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ دارد. می نویسیم:

$$S(f(\rho))=S(f(\sum_k p_k|\phi_k\rangle\langle\phi_k|))=S(\sum_k p_k f(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|))\geq\sum_k p_k S(f(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|)). \quad (۱۷)$$

از بین حالت های طرف راست یک حالت مثل $|\phi_0\rangle$ وجود دارد که

$$S(f(|\phi_0\rangle\langle\phi_0|))\leq S(f(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|)) \qquad \forall\ k. \quad (۱۸)$$

در نتیجه

$$S(f(\rho))\equiv\sum_k p_k S(f(|\phi_k\rangle\langle\phi_k|))\geq\sum_k p_k S(f(|\phi_0\rangle\langle\phi_0|))=S(f(|\phi_0\rangle\langle\phi_0|)). \quad (۱۹)$$

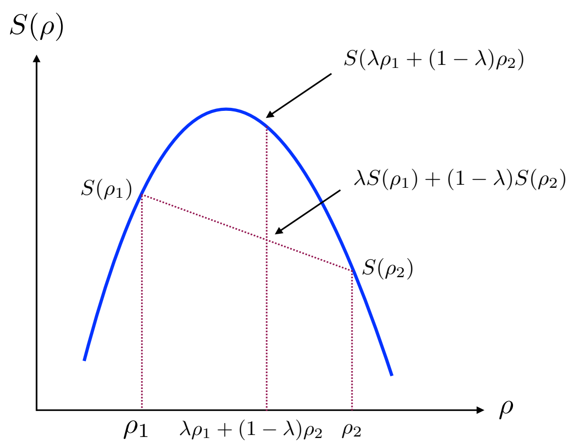
به این ترتیب حالتی یافته ایم که خالص است و آنتروپی اش برای تابع f کمتر از یک حالت مخلوط اولیه است.

اثبات: قضیه را برای حالت $n=2$ ثابت می کنیم. برای حالت n دلخواه اثبات قضیه شبیهِ این حالتِ ساده است. قرارمی دهیم:

$$\sigma:=\lambda_1\rho_1+\lambda_2\rho_2. \quad (۲۰)$$

ازنامساوی (10) استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$S(\rho_1)\leq -tr(\rho_1\log\sigma),$$



شکل ۱: انتروپی فون نویمان هم مثل انتروپی شانون یک تابع محدب از ماتریس های چگالی است. مخلوط کردن حالت ها باعث افزایش آنتروپی می شود.

$$S(\rho_2) \leq -tr(\rho_2 \log \sigma). \tag{۲۱}$$

حال ازترکیب خطی دونامساوی بالا با ضرایب λ_1 و λ_2 به دست می آوریم:

$$\lambda_1 S(\rho_1) + \lambda_2 S(\rho_2) \leq S(\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2). \tag{۲۲}$$

- مثال: حالت های $|0\rangle\langle 0|$ و$|1\rangle\langle 1|$ را که دارای آنتروپی صفر هستند با احتمال مساوی باهم مخلوط می کنیم حالتی که بدست می آید یک حالت کاملا مخلوط $\rho = \frac{1}{2}I$ است که آنتروپی اش برابر با یک است.

- تمرین: آنتروپی حالت های $\rho_1 = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}_1\cdot\sigma)$ و $\rho_2 = \frac{1}{2}(I + \mathbf{r}_2\cdot\sigma)$ و $\rho = \lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2$ را بدست آورید و صحت نامساوی بالا را تحقیق کنید.

- تمرین: در فضای d بعدی ، حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\rho = \lambda|\psi\rangle\langle\psi| + \lambda|\phi\rangle\langle\phi|, \tag{۲۳}$$

که در آن $|\psi\rangle$ و$|\phi\rangle$ دو حالت غیرمتعامد هستند. آنتروپی فون نویمان برای حالت ρ را برحسب λ و زاویه بین بردارهای $|\psi\rangle$ و $|\phi\rangle$ حساب کنید و صحت نامساوی ۲۲ را تحقیق کنید.

■ تمرین: کانال واقطبش با پارامتر p را در نظر بگیرید . این کانال با احتمال $1-p$ حالت را دست نخورده نگاه می دارد و با احتمال p آن را تبدیل به یک حالت کاملا مخلوط می کند.

الف: آنتروپی حالت خروجی این کانال وقتی که یک حالت ورودی خالص را به آن وارد می کنیم چقدراست؟

ب: در میان کلیه حالت های ورودی (مخلوط یا خالص) کدام حالت است که آنتروپی حالت خروجی اش از همه کمتر است. (برای این قسمت فرض کنید که کانال کیوبیتی است).

■ تمرین: یک کانال پاوولی متقارن به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-2P_0-P_1)\,\rho + P_0 X\rho X + P_1 Y\rho Y + P_0 Z\rho Z, \qquad (۲۴)$$

که در آن X, Y, Z ماتریس های پاوولی هستند. از میان تمام حالت های خالص ورودی ، حالتی را پیدا کنید که آنتروپی حالت خروجی این کانال را کمینه کند.

یک کانال یکانی و تصادفی $RandomUnitary$ کانالی است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i U_i\rho U_i^\dagger, \qquad (۲۵)$$

که در آن U_i ها ماتریس های یکانی هستند. ثابت کنید که در چنین کانالی همواره آنتروپی حالت خروجی بیش از آنتروپی حالت ورودی است.

■ تمرین: ثابت کنید که به طور کلی در یک کانال کوانتومی ، آن حالت ورودی ای که آنتروپی خروجی را کمینه می کند حتما یک حالت خالص است. (راهنمایی: فرض کنید که این حالت یک حالت مخلوط باشد، سپس آن را به حالت های خالص تجزیه کنید و از قضیه

تحدب آنتروپی شانون استفاده کنید. به این ترتیب ثابت می کنید که هرگاه یک حالت مخلوط ورودی دارای چنین خاصیتی باشد حتما می توانید یک حالت خالص نیز پیدا کنید که دارای چنین خاصیتی باشد).

- تمرین: نشان دهید که اندازه گیری تصویری Projective Measurement همواره انتروپی یک حالت را یا ثابت نگاه می دارد یا اینکه آن را افزایش می دهد. راهنمایی: یک اندازه گیری تصویری حالت را به صورت زیر تغییر می دهد:

$$\rho \longrightarrow \rho' = \sum_i P_i \rho P_i, \tag{۲۶}$$

که در آن P_i ها عملگرهای تصویری هستند. نخست ثابت کنید که

$$\rho'\ P_i = P_i\ \rho' \qquad \forall i. \tag{۲۷}$$

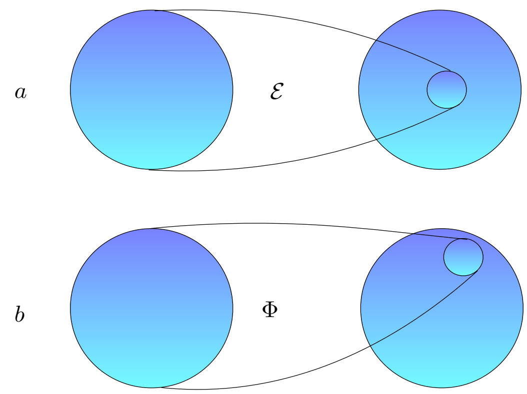
سپس با قرار دادن عملگر $\sum_i P_i = I$ واستفاده از خاصیت های عملگرهای تصویری و هم چنین رابطه ۲۷ نشان دهید که $-tr(\rho\log\rho') = S(\rho')$. حال کافی است که از نامساوی $S(\rho\,||\,\rho') = S(\rho) - tr(\rho\log\rho') \leq 0$ استفاده کنید و به نتیجه نهایی برسید.

برخلاف تصوری که از مثال های پیشین ممکن است بدست آمده باشد، یک کانال کوانتومی همواره آنتروپی حالت ها را افزایش نمی دهد. تمرین زیر این موضوع را روشن می کند.

- تمرین: یک کانال کوانتومی با عملگرهای کراوس $A_0 = |0\rangle\langle 0|$ و $A_1 = |+\rangle\langle 1|$ در نظر بگیرید. حال یک حالت ورودی به این کانال بدهید که آنتروپی اش از آنتروپی حالت خروجی بیشتر باشد. با الهام از این مثال ، یک کانال دیگر در بعد دلخواه تعریف کنید که دارای این خاصیت باشد.

در درسهای پیشین نشان داده ایم که همه کانال ها فاصله دو حالت ورودی را نسبت به هم کاهش می دهند که اصطلاحا می گوییم کانال ها خاصیت انقباضی دارند [۴] اما در عین حال بعضی از کانال ها آنتروپی حالت ورودی را افزایش می دهند و بعضی دیگر کاهش. این که چرا این دو خاصیت با یکدیگر سازگار هستند در شکل (۲) نشان داده شده است.

[۴] Contraction Property



شکل ۲: شکل بالا کانالی را نشان می دهد که کره بلوخ را به نزدیکی مرکز کره تصویر می کند. چنین کانالی انتروپی حالت های ورودی را به طور متوسط افزایش می دهد. شکل زیر کانالی را نشان می دهد که کره بلوخ را به نزدیکی مرزکره (نزدیکی حالت های خالص) تصویر می کند، چنین کانالی انتروپی حالت های ورودی را به طور متوسط کاهش می دهد.

- آنتروپی اندازه گیری: فرض کنید که مشاهده پذیر $X=\sum_i x_i|x_i\rangle\langle x_i|$ را اندازه گیری کنیم. دراین صورت مقادیر $\{x_i\}$ بااحتمالات $\{p_i=\langle x_i|\rho|x_i\rangle\}$ مشاهده خواهند شد. دراین صورت خواهیم داشت:

$$S(\rho)\leq H(X), \tag{۲۸}$$

که درآن علامت تساوی تنهاوقتی برقرارخواهد بود که $[X,\rho]=0$.

اثبات: ماتریس چگالی σ را به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$\sigma:=\sum_i p_i|x_i\rangle\langle x_i|. \tag{۲۹}$$

می دانیم که $S(\sigma)=H(X)$. بااستفاده ازقضیه (10) می دانیم که

$$S(\rho)\leq -tr(\rho\log\sigma), \tag{۳۰}$$

که درآن علامت تساوی فقط وقتی برقرارخواهد بود که $\rho=\sigma$. طرف راست رادرپایه $\{|x_i\rangle\}$ حساب می کنیم وبدست می آوریم

$$tr(\rho\log\sigma)=\sum_i\langle x_i|\rho\log\sigma|x_i\rangle=\sum_i\langle x_i|\rho|x_i\rangle\log p_i=\sum_i p_i\log p_i, \tag{۳۱}$$

که درتساوی آخر ازقطری بودن σ دراین پایه و هم چنین تساوی $p_i = \langle x_i|\rho|x_i\rangle$ استفاده کرده ایم. باترکیب (30,31) به رابطه موردنظریعنی رابطه $S(\rho) \leq H(X)$ می رسیم. تساوی وقتی برقرارخواهد بود که داشته باشیم $\rho = \sigma$. اما این امربه این معناست که $[\rho, X] = 0$.

یک معنای این قضیه این است که اگر در هر پایه ای عناصر غیر قطری ماتریس چگالی ρ را برابر با صفر قرار دهیم، دراین صورت ماتریس چگالی ای بدست خواهد آمد که آنتروپی آن از حالت اول بیشتر خواهد بود. یک نمونه از این رابطه در زیر نشان داده شده است. برای همه ماتریس های رابطه زیر برقرار است:

$$S\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix} \leq S\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad (۳۲)$$

معنای دیگر آن این است دربین همه اندازه گیری ها اندازه گیری مشاهده پذیری که با ماتریس چگالی جابجامی شود کمترین عدم قطعیت یا آنتروپی را در نتایج ایجاد می کند.

- زیرجمع پذیری [۵] هرگاه AB یک دستگاه دوبخشی باشد،

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B), \quad (۳۳)$$

که درآن $\rho_A = tr_B(\rho_{AB})$ و $\rho_B = tr_A(\rho_{AB})$. تساوی فقط وقتی برقرارمی شود که $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$. این خاصیت به معنای آن است که آنتروپی یک دستگاه همواره از مجموع آنتروپی اجزاء آن کمتراست. این امر بدلیل همبستگی هایی است که ممکن است بین اجزاء وجود داشته باشد. آنتروپی کل فقط وقتی برابر با مجموع آنتروپی اجزاء است که بین آنها همبستگی وجود نداشته باشد.

اثبات: ماتریس چگالی زیرراتعریف می کنیم:

$$\sigma_{AB} := \rho_A \otimes \rho_B, \quad (۳۴)$$

و از نامساوی (10) استفاده می کنیم:

$$S(\rho_{AB}) \leq -tr(\rho_{AB} \log \sigma_{AB}). \quad (۳۵)$$

[۵] Subadditivity

حال دقت می کنیم که

$$\begin{aligned}\log(\sigma_{AB}) &= \log(\rho_A\otimes\rho_B)=\log((\rho_A\otimes I)(I\otimes\rho_B))=\log(\rho_A\otimes I)+\log(I\otimes\rho_B)\\ &(\log\rho_A)\otimes I+I\otimes(\log\rho_B).\end{aligned} \tag{۳۶}$$

حال طرف راست را به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned}-tr(\rho_{AB}\log\sigma_{AB}) &= -tr(\rho_{AB}(\log\rho_A\otimes I)-tr(\rho_{AB}(I\otimes\log\rho_B))\\ &= -tr_A(\rho_A\log\rho_A)-tr_B(\rho_B\log\rho_B).\end{aligned} \tag{۳۷}$$

باکنار هم گذاردن روابط بالا به نتیجه دلخواه می رسیم. این رابطه یادآور رابطه $H(X,Y)\leq H(X)+H(Y)$ برای آنتروپی کلاسیک است.

در درسهای قبلی دیده ایم که آنتروپی شانون در نامساوی $H(X,Y)\geq H(X)$ صدق می کند. سوال این است که آیا آنتروپی فون نویمان نیز در یک رابطه مشابه صدق می کند یا خیر. پاسخ این سوال منفی است. کافی است که سیستم مرکب AB را در یک حالت درهم تنیده $|\psi\rangle_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$ قرار دهیم و دریابیم که رابطه $S(\rho_{AB})=0$ و حال آنکه $S(\rho_A)=S(\rho_B)=1$. بنابراین برخلاف حالت کلاسیک به طور کلی داریم

$$S(\rho_{AB})\ngeq S(\rho_A). \tag{۳۸}$$

با این وجود خاصیت زیر برقرار است.

- نامساوی مثلث برای آنتروپی کوانتومی : [۶]

$$S(\rho_{AB})\geq\mid S(\rho_A)-S(\rho_B)\mid. \tag{۳۹}$$

اثبات: می دانیم که سیستم AB در حالت ρ_{AB} است . می توان این حالت را خالص سازی کرد به این معنا که با افزودن یک سیستم کمکی R حالت خالصی مثل $|\Psi\rangle_{ABR}$ در نظر گرفت که $\rho_{AB}=tr_R(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$ و یا $\rho_A=tr_{BR}(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$ و الا اخر.

[۶] Araki-Lieb Inequality

حال از خاصیت جمع پذیری آنتروپی استفاده می کنیم که بر مبنای آن داریم:

$$S(\rho_{BR}) \leq S(\rho_B) + S(\rho_R). \tag{۴۰}$$

اما از آنجا که حالت $|\Psi\rangle_{ABR}$ یک حالت خالص است، داریم $S(\rho_{BR}) = S(\rho_A)$ و $S(\rho_R) = S(\rho_{AB})$. در نتیجه رابطه (۴۰) به شکل زیر در می آید:

$$S(\rho_A) \leq S(\rho_B) + S(\rho_{AB}) \tag{۴۱}$$

و یا

$$S(\rho_{AB}) \geq S(\rho_A) - S(\rho_B). \tag{۴۲}$$

با عوض کردن جای A و B و تکرار این نامساوی به نامساوی مثلث برای آنتروپی کوانتومی می رسیم.

■ تمرین: یک اثبات دیگر برای خاصیت تحدب آنتروپی : می خواهیم ثابت کنیم که

$$\sum_x p_x S(\rho_x) \leq S(\sum_x p_x \rho_x). \tag{۴۳}$$

برای اثبات این نامساوی حالت زیر را تعریف کنید:

$$\rho_{AB} = \sum_x p_x |x\rangle\langle x| \otimes \rho_x \tag{۴۴}$$

که در آن حالت های $\{|x\rangle\}$ یک مجموعه حالت های عمود برهم است. سپس از خاصیت زیر جمع پذیری استفاده کنید و رابطه ۴۳ را ثابت کنید.

■ تمرین: بازهم یک اثبات دیگر برای خاصیت تحدب آنتروپی : تابع زیر را تعریف کنید:

$$f(p) = S(p\sigma_1 + (1-p)\sigma_2) \tag{۴۵}$$

که در آن σ_1 و σ_2 ماتریس های چگالی هستند. نشان دهید که

$$f"(p) \leq 0.$$

(راهنمایی: نخست حالتی را در نظر بگیرید که در آن ماتریس های چگالی σ_1 و σ_2 وارون پذیر هستند و سپس حالت کلی را مطالعه کنید.
)

■ تمرین: یک ماتریس چگالی به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\rho = \sum_i p_i \sigma_i, \tag{۴۶}$$

که در آن σ_i ها ماتریس های چگالی ای هستند که پایه آنها برهم عمود هستند. نشان دهید که

$$S(\sum_i p_i\sigma_i) = H(\{p_i\}) + \sum_i p_i S(\sigma_i). \tag{۴۷}$$

دقت کنید که با توجه به اینکه $H(\{p_i\})$ یک کمیت مثبت است، این رابطه با خاصیت تحدب آنتروپی سازگار است. حال از خود می پرسیم که اگر پایه ماتریسهای چگالی فوق برهم عمود نباشد این تساوی به چه شکلی تغییر می کند. پاسخ این سوال در قضیه زیر داده شده است:

■ قضیه: تابع آنتروپی در حالت کلی در نامساوی زیر صدق می کند:

$$\sum_i p_i S(\sigma_i) \le S(\sum_i p_i\sigma_i) \le H(\{p_i\}) + \sum_i p_i S(\sigma_i). \tag{۴۸}$$

به این ترتیب این قضیه یک حد بالا و پایین که براحتی قابل محاسبه است بدست می دهد. ممکن است که آنتروپی یک حالت دلخواه را نتوانیم به طور دقیق حساب کنیم ولی این نامساوی بلافاصله به ما می گوید که آنتروپی بین کدام دو حد واقع شده است.

اثبات: نامساوی سمت چپ همان خاصیت تحدب آنتروپی است که قبلا آن را ثابت کرده ایم. پس توجه خود را به نامساوی طرف راست معطوف می کنیم. نخست این نامساوی را برای وقتی ثابت می کنیم که حالت های σ_i خالص باشند یعنی $\sigma = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. البته این حالت ها لزومی ندارد که بر هم عمود باشند. در این حالت از آنجا که $S(\sigma_i) = 0$ است کافی است که ثابت کنیم

$$S\left(\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right) \le H(\{p_i\}).$$

برای اثبات این رابطه حالت خالص زیر را می سازیم:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i}|\psi_i\rangle \otimes |i\rangle, \tag{۴۹}$$

که در آن حالت های $\{|i\rangle\}$ برهم عمودند. برای این حالت خالص بدست می آوریم:

$$\rho_A = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \qquad \rho_B = \sum_{i,j} \sqrt{p_ip_j}\langle\psi_i|\psi_j\rangle|j\rangle\langle i|. \tag{۵۰}$$

از تجزیه اشمیت می دانیم که آنتروپی این دو حالت باهم مساوی است. یعنی $S(\rho_A) = S(\rho_B)$. البته نکته این است که حالت ρ_B حالت ساده ای نیست که بتوانیم آنتروپی آن را براحتی حساب کنیم. اما در این مرحله می توانیم از یک خاصیت دیگر که قبلا ثابت کرده ایم استفاده کنیم و آن اینکه اندازه گیری تصویری هیچگاه آنتروپی را کاهش نمی دهد. حال روی حالت ρ_B یک اندازه گیری تصویری با عملگرهای $\{P_i = |i\rangle\langle i|\}$ انجام می دهیم. حالتی که بدست می آید برابر است با:

$$\rho'_B = \sum_i P_i \rho_B P_i = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|. \tag{۵۱}$$

بنابر این داریم:

$$S(\rho_A) \equiv S(\rho_B) \leq S(\rho'_B) \tag{۵۲}$$

و یا

$$S(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|) \leq H(\{p_i\}), \tag{۵۳}$$

که همان رابطه ای است که می خواستیم ثابت کنیم. به این ترتیب قضیه را برای وقتی که حالت های σ_i خالص بودند ثابت کردیم. حال می توانیم از این حالت خاص استفاده کرده و حالت کلی را که در آن دیگر σ_i ها حالت های خالص نیستند را ثابت کنیم: کافی است که دقت کنیم هر کدام از حالت های σ_i را می توان تجزیه طیفی کرد :

$$\sigma_i = \sum_j q_{i,j} |\phi_{ij}\rangle\langle\phi_{ij}|. \tag{۵۴}$$

دقت کنید که

$$\langle\phi_{ij}|\phi_{ik}\rangle = \delta_{jk} \qquad \sum_j q_{ij} = 1, \qquad \forall\, i. \tag{۵۵}$$

هم چنین داریم

$$S(\sigma_i) = H(\{q_{ij}\}). \tag{۵۶}$$

در نتیجه داریم

$$\rho = \sum_i p_i \sigma_i = \sum_{i,j} p_i q_{ij} |\phi_{ij}\rangle\langle\phi_{ij}|. \tag{۵۷}$$

در این رابطه می دانیم که

$$\sum_{i,j} p_i q_{ij} = 1.$$

حال از رابطه (۵۳) استفاده می کنیم که بر مبنای آن داریم:

$$S(\sum_i p_i \sigma_i) = S(\sum_{i,j} p_i q_{ij} |\phi_{ij}\rangle\langle\phi_{ij}|) \leq H(\{p_i q_{ij}\}). \quad (۵۸)$$

حال کافی است که طرف راست را ساده کنیم. می نویسیم:

$$\begin{aligned} H(\{p_i q_{ij}\}) &= -\sum_{i,j} p_i q_{ij} \log_2(p_i q_{ij}) = -\sum_{i,j} p_i q_{ij} \left(\log_2(p_i) + \log_2(q_{ij})\right) \\ &= H(\{p_i\}) + \sum_i p_i S(\sigma_i). \end{aligned} \quad (۵۹)$$

به این ترتیب قضیه به طور کامل ثابت می شود.

- دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|\phi_1\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle, \qquad |\phi_2\rangle = \sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle. \quad (۶۰)$$

حالت مخلوط زیر را از این دو حالت تهیه می کنیم:

$$\rho = \frac{1}{2}\left(|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2|\right) \quad (۶۱)$$

صحت رابطه (۴۸) را تحقیق کنید.

- تمرین: الف: نشان دهید که به ازای هر ماتریس A همواره می توان ماتریس های یکانی U_i و احتمالات p_i را چنان یافت به قسمی که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\sum_i p_i U_i A U_i^\dagger = tr(A)\frac{I}{d}. \quad (۶۲)$$

ب: از خاصیت تحدب آنتروپی فون-نویمان استفاده کنید و نشان دهید که حالت کاملا مخلوط تنها حالتی است که در آن آنتروپی به مقدار بیشینه خود می رسد.

حال می خواهیم خاصیتی از آنتروپی را بررسی کنیم که به خاصیت زیر جمع پذیری قوی [۷] مشهور است. از این خاصیت می توان خاصیت زیر جمع پذیری (که قبلا آن را ثابت کرده ایم) و بعضی از خاصیت های جدید و مهم را برای آنتروپی بدست آورد. در زیر نخست این خاصیت را بیان می کنیم و سپس کاربردهای آن را شرح می دهیم. دست آخر هم نشان می دهیم که این خاصیت چگونه ثابت می شود.

- زیرجمع پذیری قوی در حالت کلاسیک به صورت زیر بیان می شود: به ازای هر سه سیستم A, B و C نامساوی زیر برقرار است:

$$H(A|B,C) \leq H(A|B) \qquad (۶۳)$$

این رابطه در واقع بیان می کند که ایجاد شرط اضافه باعث کاهش انتروپی شانون می شود. می توان آن را به صورت زیر نیز نوشت.

$$H(A,B,C) - H(B,C) \leq H(A,B) - H(B) \qquad (۶۴)$$

خاصیت زیر جمع پذیری قوی برای آنتروپی کوانتومی دقیقا مشابه رابطه های بالاست ، به این معنا که با تعریف آنتروپی شرطی به صورت

$$S(A|B) := S(\rho_{AB}) - S(\rho_B) \qquad (۶۵)$$

برای هر سیستم سه بخشی داریم:

$$S(A|B,C) \leq S(A|B) \qquad (۶۶)$$

و یا

$$S(\rho_{ABC}) - S(\rho_{BC}) \leq S(\rho_{AB}) - S(\rho_B). \qquad (۶۷)$$

همانطور که در ابتدا گفتیم این رابطه را در انتهای این درس ثابت می کنیم اما الان می خواهیم ببینیم این نامساوی چه نتایجی در بر دارد. این نتایج را در زیر می نویسیم:

- نتیجه یک: می توان خاصیت زیر جمع پذیری را از خاصیت زیر جمع پذیری قوی بدست آورد. برای این کار سیستم سه تایی را در حالت زیر در نظر بگیرید:

$$\rho_{ABC} = \rho_{AC} \otimes |0\rangle\langle 0|_B \qquad (۶۸)$$

[۷] Strong subaditivity Theorem

که در آن $|0\rangle$ یک حالت دلخواه خالص است. در این صورت داریم:

$$S(\rho_{ABC}) = S(\rho_{AC}), \qquad S(\rho_B) = 0, \qquad S(\rho_{AB}) = S(\rho_A), \qquad S(\rho_{BC}) = S(\rho_C). \tag{۶۹}$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۶۷) به رابطه زیر جمع پذیری معمولی می رسیم.

- نتیجه دو: قبلا دیدیم که خاصیت $S(A,B) \geq S(A)$ برای آنتروپی کوانتومی بر خلاف آنتروپی کلاسیک برقرار نیست. معنای این حرف این است که آنتروپی شرطی کوانتومی همواره یک کمیت مثبت نیست. مثالی که ذکر کردیم نیز یک حالت خالص درهم تنیده بود که آنتروپی سیستم بزرگ برابر با صفر و آنتروپی یک زیر سیستم آن برابر با یک بود. نکته مهم آن است که اگر چه آنتروپی یک زیر سیستم می تواند از آنتروپی کل سیستم بزرگ تر باشد ولی این کار برای دو زیر سیستم امکان پذیر نیست.! به این معنا که اگر یک سیستم سه بخشی ABC داشته باشیم آنگاه نامساوی زیر همواره برقرار است:

$$S(A) + S(B) \leq S(A,C) + S(B,C). \tag{۷۰}$$

در واقع ممکن است که $S(A)$ از $S(A,C)$ بزرگ تر باشد یا $S(B)$ از $S(B,C)$ بزرگ تر باشد ولی هر دو نامساوی همزمان نمی توانند برقرار باشند. برای اثبات این نامساوی کافی است که به رابطه زیر جمع پذیری قوی یعنی رابطه (۶۷) توجه کنیم و سیستمی مثل R در نظر بگیریم به قسمی که سیستم $ABCR$ در یک حالت خالص باشد. در این صورت می دانیم که

$$S(ABC) = S(R), \qquad S(BC) = S(AR). \tag{۷۱}$$

با جایگذاری این تساوی ها در (۶۷) بدست می آوریم:

$$S(R) - S(AR) \leq S(AB) - S(B) \tag{۷۲}$$

و پس از مرتب کردن

$$S(R) + S(B) \leq S(AR) + S(AB), \tag{۷۳}$$

که چیزی نیست جز همان رابطه ای که می خواستیم ثابت کنیم (البته با نام های عوض شده).

- نتیجه سه: صرف نظر کردن از یک بخش همواره باعث کاهش اطلاعات متقابل می شود، به این معنا که برای هر سیستم سه بخشی داریم:

$$I(A:B) \leq I(A:B,C). \tag{۷۴}$$

از نظر شهودی این رابطه معنای روشنی دارد به این صورت که بهر حال دانستن اطلاعاتی در مورد B و C مقدار بیشتری اطلاعات در مورد A به ما می دهد تا وقتی که تنها اطلاعاتی در باره B داشته باشیم. اما اثبات این رابطه خیلی ساده است. کافی است که این رابطه را باز کنیم و بنویسیم

$$S(A)+S(B)-S(A,B) \leq S(A)+S(B,C)-S(A,B,C), \tag{۷۵}$$

که با حذف $S(A)$ از دو طرف می بینیم چیزی نیست جز همان خاصیت زیر جمع پذیری قوی.

- نتیجه چهار: یک کانال کوانتومی هیچگاه اطلاعات متقابل را افزایش نمی دهد. به عبارت دقیق تر سیستم مرکب AB را در نظر بگیرید که در حالت ρ_{AB} قرار دارد. حال فرض کنید که این سیستم تحت تاثیر یک کانال کوانتومی مثل $\mathcal{E}_B$ قرار می گیرد. بنابراین کانال $\mathcal{E}$ فقط روی B اثر می کند. طبیعی است که حالت ρ_A در این صورت تغییر نمی کند. می خواهیم ببنیم آیا کانال $\mathcal{E}$ می تواند اطلاعات متقابل بین دو قسمت A و B را افزایش دهد یا خیر. پاسخ این است که خیر و این پاسخ از نظر فیزیکی و شهودی نیز مورد انتظار است.

برای فهم اثباتی که در پی می آید توجه به تمرین های حل شده ی زیر مهم است:

■ تمرین: هرگاه داشته باشیم

$$\rho'_{AB} = (I\otimes \mathcal{E}_B)(\rho_{AB}) \tag{۷۶}$$

که در آن $\mathcal{E}_B$ یک نگاشت رد نگهدار است، نشان دهید که $\rho'_A = \rho_A$.

■ حل: حالت ρ_{AB} را به صورت زیر بسط می دهیم:

$$\rho_{AB} = \sum_i x_i \otimes y_i. \tag{۷۷}$$

که در نتیجه

$$\rho_A = \sum_i x_i \otimes tr(y_i) \qquad (۷۸)$$

در نتیجه

$$(I \otimes \mathcal{E}_B)(\rho_{AB}) = \sum_i x_i \otimes \mathcal{E}_B(y_i). \qquad (۷۹)$$

حال روی بخش دوم رد می گیریم و بدست می آوریم:

$$\rho'_A := tr_B(\rho'_{AB}) = \sum_i x_i \otimes tr(\mathcal{E}_B(y_i)) = \sum_i x_i \otimes tr(y_i) = \rho_A. \qquad (۸۰)$$

دقت کنید که این نتیجه فقط برای نگاشت ردـنگهدار درست است.

■ تمرین: هرگاه داشته باشیم

$$\rho'_{AB} = (I \otimes U_B)(\rho_{AB})(I \otimes U_B^\dagger) \qquad (۸۱)$$

نشان دهید که

$$\rho'_B = U_B\ \rho_B\ U_B^\dagger. \qquad (۸۲)$$

■ حل: حالت ρ_{AB} را به صورت زیر بسط می دهیم:

$$\rho_{AB} = \sum_i x_i \otimes y_i. \qquad (۸۳)$$

که درنتیجه

$$\rho_B = \sum_i (tr x_i) y_i. \qquad (۸۴)$$

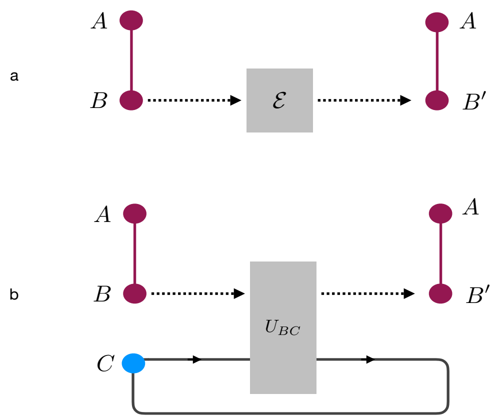
بنابراین

$$(I \otimes U_B)(\rho_{AB})(I \otimes U_B^\dagger) = \sum_i x_i \otimes U_B\ y_i\ U_B^\dagger. \qquad (۸۵)$$

حال روی بخش اول رد می گیریم و بدست می آوریم:

$$\rho'_B := \sum_i tr(x_i) U_B\ y_i U_B^\dagger = U_B (\sum_i (tr x_i) y_i) U_B^\dagger = U_B \rho_B U_B^\dagger. \qquad (۸۶)$$

توجه می کنیم که کانال یاد شده را همواره می توان به صورت زیر اعمال کرد. یک حالت مشخص مثل $|0\rangle_C$ در کنار حالت ρ_{AB} قرار می دهیم و روی کل این حالت عملگر U_{BC} را اعمال کرده و سپس روی C رد می گیریم ، شکل (۳).



شکل ۳: شکل بالایی کانال $\mathcal{E}$ را نشان می دهد که روی بخش B اثر می کند. شکل پایین: این کانال را می توان به صورت یک عملگر یکانی نشان داد که روی یک بخش بزرگ تر عمل می کند و در انتها روی بخش اضافی رد گرفته می شود.

بیایید حالت های قبل از عمل کانال را با حروف بدون پرایم و حالت های بعد از عمل کانال را با حروف با پرایم نشان دهیم. به این ترتیب می توانیم بنویسیم:

$$\rho_{A'B'C'} = (I \otimes U_{BC})\, \rho_{ABC}\, (I \otimes U_{BC}^\dagger) \qquad (۸۷)$$

که به معنای این است که

$$\rho_{B'C'} = U_{BC}\, \rho_{BC}\, U_{BC}^\dagger. \qquad (۸۸)$$

برای اثبات قضیه، به نتیجه ای که قبلا بدست آورده ایم تکیه می کنیم که بر مبنای آن اطلاعات متقابل با افزودن یک سیستم دیگر هیچ وقت کم نمی شود به عبارت دیگر:

$$I(A' : B') \leq I(A' : B'C') \qquad (۸۹)$$

حال نشان می دهیم که طرف راست چیزی نیست جز $I(A : B)$. برای این کار عبارت صریح طرف راست را می نویسیم و از نتایج دو تمرین قبلی

و روابط (۸۷) و (۸۸) استفاده می کنیم:

$$I(A' : B'C') = S(A') + S(B'C') - S(A'B'C') = S(A) + S(BC) - S(ABC) \tag{۹۰}$$

اما چون

$$\rho_{ABC} = \rho_{AB} \otimes |0\rangle_C \langle 0| \tag{۹۱}$$

خواهیم داشت

$$S(BC) = S(B) \qquad S(ABC) = S(AB) \tag{۹۲}$$

و در نتیجه

$$I(A' : B'C') = S(A') + S(B'C') - S(A'B'C') = S(A) + S(B) - S(AB) = I(A : B). \tag{۹۳}$$

به این ترتیب قضیه ثابت می شود.

■ تمرین: از خاصیت زیرجمع پذیری قوی استفاده کنید و درستی روابط زیر را نشان دهید:

$$S(C|A) + S(C|B) \geq 0. \tag{۹۴}$$

و

$$I(A : B) + I(A : C) \leq 2S(A). \tag{۹۵}$$

هم چنین مثالی ارائه دهید که درستی رابطه زیر را نشان دهد:

$$S(A|C) + S(B|C) \neq 0. \tag{۹۶}$$

دقت کنید که در حالت کلاسیک رابطه (۹۵) به این دلیل درست است که رابطه $H(A : B) \leq H(A)$ و $H(A : C) \leq H(A)$. اما در حالت کوانتومی این رابطه به دلیل خاصیت زیرجمع پذیری قوی برقرار است چرا که نامساوی های بالا الزاما برقرار نیستند. مثالی ارائه دهید که نشان دهد در حالت کوانتومی $I(A : B) > S(A)$.

■ تمرین: خاصیت زیرجمع پذیری قوی را برای حالت کلاسیک بیان و ثابت کنید. برای این اثبات از خاصیت جمع پذیری قوی کوانتومی استفاده نکنید.

■ تمرین: یک کانال کوانتومی کیوبیتی به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}(\rho) = p_0(\rho + \sigma_z\rho\sigma_z) + p(\sigma_x\rho\sigma_x + \sigma_y\rho\sigma_y)\ , \qquad 2p_0 + 2p = 1. \tag{۹۷}$$

حالتی که آنتروپی خروجی کانال را کمینه می کند پیدا کنید. راهنمایی: این کانال یک نوع تقارن دارد به این معنا که

$$\mathcal{E}(\sigma_z\rho\sigma_z) = \sigma_z\mathcal{E}(\rho)\sigma_z. \tag{۹۸}$$

■ تمرین: یک کانال کوانتومی که روی حالت های کوانتومی سه ترازه اثر می کند به شکل زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{E}(\rho) = p_0\rho + pX\rho X^\dagger + pZ\rho Z^\dagger, \tag{۹۹}$$

که در آن X و Z عملگرهای تعمیم یافته پاوولی هستند. (برای تعریف به درس سوم تحت عنوان ماتریس های چگالی مراجعه کنید.) حالتی را که خروجی اش کمترین میزان آنتروپی را دارد حساب کنید.