ناموضعیت در مکانیک کوانتومی

وحیدکریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۱۰ اسفند ۱۳۹۶

۱ شناسایی عالم واقعی ، موضعیت و متغیرهای پنهان

ادعای مکانیک کوانتومی و به تبع آن فیزیک جدید آن است که تا آنجا که به فیزیک مربوط است الفاظی مثل عالَمِ واقع دارای ابهام هستند و کار فیزیک شناسایی عالم واقع به این معنای مبهم نیست ، بلکه این علم تنها به تنظیم داده های آزمایشگاهی که از طریق اندازه گیری های دقیق بدست می آیند و سپس تبیین آنها در یک چارچوب نظری سازگار و سرانجام پیش بینی پدیده ها به کمک این نظم نظری می پردازد. دراین دیدگاه، هرآنچه را که نتوان از طریق آزمایش، لااقل آزمایش ذهنی و ایده آل به محک اندازه گیری و سنجش درآورد به حوزه فیزیک تعلق ندارد. [۱] از طرفی مخالفان این تفسیر ادعا می کنند که عقل سلیم حکم می کند الکترون وقتی از یک فیلامان گرم ساطع شده و به روی یک پرده فلورسانس می نشیند، حتما در هر لحظه در نقطه ای از فضا بوده و درنتیجه مسیری را درفضا پیموده است. بنابراین مسیر الکترون یک واقعیتِ عالَم خارج است، مستقل از این که ما آن را مشاهده کنیم یا نکنیم. [۲] در این دیدگاه شانس و تصادف زاده ناآگاهی ما از متغیرهای پنهانی [۳] است که مطابق با یک نظریه بنیادی تر بر دینامیک اشیای میکروسکوپی حاکم هستند. مثال حرکت یک سکه در این جا می تواند مفید باشد. وقتی که یک سکه را به هوا می اندازیم تنها به این اکتفا می کنیم که احتمال شیر آمدن یا خط آمدن سکه پنجاه درصد است . این تمام آن چیزی است که دانش ما را در باره دینامیک سکه بیان می کند. ولی واقعا می دانیم که متغیرهای متعددی را که بر حرکت یک سکه حاکم هستند (نظیر شدت و مکان دقیق ضربه ای که به

[۱] این دیدگاه اصطلاحات دیدگاه پوزیتویسیتی نامیده می شود.

[۲] گفته مشهور اینشتین در اینجا جالب توجه است. ماه وقتی که به آن نگاه نمی کنیم نیز در آسمان وجود دارد و یک واقعیت عینی مستقل از مشاهده و ذهن ماست.

[۳] Hidden Variables

یک سکه می خورد، مختصات کامل انتقالی و دورانی سکه، و هم چنین مقاومت هوا و نظایر آن) و یک نظریه بنیادی مثل مکانیک وجود دارد که هرگاه این متغیرها را دقیقا تعیین کنیم می توانیم به کمک آن نظریه بنیادی حرکت سکه را دقیقا توصیف کنیم و از شانس و احتمال دست بکشیم.

پاسخ تفسیر کپنهاگی [۴] [۵] از مکانیک کوانتومی آن است که ما وقتی بخواهیم مفهومی مثل « مسیر الکترون» را که جزء تصورات ذهنی ماست، حتی به صورت ذهنی مشاهده کنیم با شکست مواجه می شویم، زیرا تنها وقتی می توانیم مسیر یک الکترون را مشاهده کنیم که بدون مختل کردن سرعت آن در هر لحظه مکانش را «ببنیم» و می دانیم که این امر شدنی نیست. بنابراین وقتی که هیچ راهِ عملی برای محک زدن یک خصلتِ واقعی مستقل از مشاهده ما و جود ندارد، بهتراست از اصرار براینکه آن خصلت واقعی و مستقل از مشاهده است دست برداریم. موقعیتی که بوجود می آید موقعیت کاملا جدیدی است، زیرا فیزیک همواره در جستجوی شناسایی و ادراک نظم پنهانی بوده است که در واقعیت و در پشت رویدادها پنهان است و این هدف با کشف مکانیک کوانتومی با ناکامی نسبی مواجه شده است.

برای آنکه بتوانیم به این سوال ها بدون وارد شدن به بحث های طولانی کلامی که اغلب با ابهام روبرو هستند، فکر کنیم می بایست تعریفی دقیق از واقعیت ارائه دهیم. طبیعی است که این تعریف نمی تواند در باره کل واقعیت جهان باشد بلکه مطابق با بنیادهای دانش فیزیک که همواره متکی بر جزئی نگری توام با دقت بوده است، می بایست یک تعریف مشخص در باره یک عنصر مشخص باشد. برای یافتن یک تعریف دقیق می بایست دوباره به مثال الکترون بازگردیم. درست است که هرگاه سعی کنیم سرعت الکترون را به لحاظ تجربی تعیین کنیم مکان آن را مختل می کنیم و بالعکس هرگاه بخواهیم مکان آن را معین کنیم سرعت آن را مختل می کنیم و بنابراین استدلال نمی توانیم از یک واقعیت خارجی به عنوان الکترونی که یک مسیر معین را طی می کند سخن بگوییم، ولی اگر بتوانیم بدون اینکه این اختلال را انجام دهیم خصلتی از الکترون را تعیین کنیم آنگاه قطعا آن خصلت یک خصلت واقعی آن الکترون یا به اصطلاح مقاله اولیه اینشتین، پودولسکی و روزن [۶] یک عنصر واقعیت [۷] و مستقل از مشاهده ماست زیرا ما بدون آنکه هیچ نوع امکان تاثیر گذاری بر آن الکترون را داشته باشیم توانسته ایم آن خصلت را تعیین کنیم.

آیا چنین امکانی وجود دارد؟ آیا می توانیم خصلتی از یک ذره را بدون اینکه روی آن تاثیر بگذاریم تعیین کنیم؟ به لحاظ اصولی چنین امری غیرممکن به نظر می رسد ولی نکته مهم و اساسی آن است که چارچوب خود مکانیک کوانتومی چنین امکانی را از طریق حالت های درهم تنیده

[۴] Copenhagen Interpretation

[۵] واضعان و مدافعان این تفسیر بوهر و هایزنبرگ بودند و این تفسیر کمابیش در جامعه فیزیک پذیرفته شده است.

[۶] Einstein, Podolsky and Rosen (EPR)

[۷] Element of Reality

فراهم می آورد. بنابر مکانیک دو ذره که در فاصله های دور از هم قرار گرفته اند می توانند در حالتی مثل

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+, z-\rangle - |z-, z+\rangle) \tag{۱}$$

قرار بگیرد، زیرا این حالت برهم نهی دو حالت فیزیکی است و بنابر مکانیک کوانتومی برهم نهی دو حالت فیزیکی نیز یک حالت فیزیکی است. علامت AB به این معناست که یکی از این ذرات در دست آلیس A و دیگری در دست باب B است.

بنابر مکانیک کوانتومی هرگاه آلیس اسپین ذره خود را در راستای z اندازه گیری کند، با احتمال $\frac{1}{2}$ مقدار آن را برابر با $\frac{\hbar}{2}$ بدست خواهد آورد و حالت $|\Psi\rangle$ تبدیل می شود به $|z+, z-\rangle$ که درنتیجه آن وی می تواند بگوید که اسپین ذره باب در حالت $|z-\rangle$ است. در چارچوب مکانیک کوانتومی این تقلیل تابع موج به صورت آنی و لحظه ای رخ می دهد. بنابراین آلیس بدون اینکه هیچ گونه امکان تاثیرگذاری روی ذره باب داشته باشد می تواند اسپین آن را در راستای z تعیین کند. بنابراین مولفه اسپین ذره باب در راستای z یک عنصر واقعیت است.

حال به خاصیت مهم حالت داده شده می پردازیم و آن اینکه این حالت یک حالتِ اسپین صفر است به این معنا که اسپین کل دو ذره درآن صفراست. چنین حالتی را اگر در هر پایه ای بسط دهیم شکلی مثل شکل 1 به خود خواهد گرفت یعنی درهر پایه ای به شکل زیراست:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{n}+, \mathbf{n}-\rangle - |\mathbf{n}-, \mathbf{n}+\rangle). \tag{۲}$$

این موضوع را خواننده می تواند با یک محاسبه ساده نشان دهد. کافی است که دقت کند که

$$\begin{aligned} |z+\rangle &= a|\mathbf{n}+\rangle + b|\mathbf{n}-\rangle \\ |z-\rangle &= -b|\mathbf{n}+\rangle + a|\mathbf{n}-\rangle, \end{aligned} \tag{۳}$$

بنابراین اگر آلیس در هر راستای دیگری نیز اندازه گیری می کرد بازهم تقلیل تابع موج به صورت $|n+, n-\rangle$ یا $|n-, n+\rangle$ رخ می داد و بازهم آلیس می توانست اندازه اسپین ذره دوم را در راستای n تعیین کند، بدون اینکه روی آن اثر بگذارد. پس مولفه اسپین در هر راستایی واقعی است. توجه کنید که در اینجا انجام عمل واقعی آزمایش توسط آلیس مطرح نیست بلکه امکان آن در چارچوب مکانیک کوانتومی مطرح است . یعنی اگر آلیس در هر راستایی اندازه گیری می کرد می توانست مولفه اسپین ذره دوم را در همان راستا تعیین کند پس آن مولفه یک عنصر واقعیت است. این که آلیس تصمیم بگیرد آزمایش خود را نهایتا در چه راستایی انجام دهد تاثیری در واقعی بودن یا نبودن این عناصر واقعیت نباید داشته باشد.

دقت کنید که برخلاف آنچه که گاها شنیده می شود در این جا با یک پارادکس مواجه نیستیم و این آزمایش فکری را نمی بایست پارداکس EPR خواند. در این جا هیچ تناقض یا پارادکسی مطرح نیست بلکه نتیجه ای که اینشتین ، پودولسکی و روزن از این استدلال و آزمایش فکری

گرفتند این است که نظریه مکانیک کوانتومی یک نظریه کامل نیست زیرا نمی تواند همه عناصر واقعیت را با تعریفی که در بالا ارائه شد در خود جای داده و آنها را توصیف کند. این نتیجه گیری تا کنون نیز ابطال نشده است یعنی امروزه نیز استدلال و نتیجه گیری EPR هم چنان معتبر است.

۲ نامساوی بل

چگونه می توان درباره عناصر واقعی و درست یا نادرست بودن آنها به صورت تجربی آنچنانکه در علم جدید مرسوم است قضاوت کرد؟ چگونه می توان از این ایده های بعضاً مبهم و نا دقیق یک گزاره ابطال پذیر ساخت و آن را به محک تجربه سپرد؟ در بخش پیشین دیدیم که اینشتین، پودولسکی و روزن ملاک های دقیقی برای به تعریف و محک زدن واقعیت ارایه دادند. کار مهم جان بل [۸] آن بود که نشان داد چگونه وجود عناصر واقعی همراه با فرض موضعی بودن رویدادها منجر به یک نامساوی مشخص در باره نتایج آزمایشگاهی می شود. باید اضافه کنیم که اثبات های اولیه ای که از این نامساوی ارائه شدند همگی متکی بر دو فرض بودند یکی جود عناصر واقعی و دیگری موضعیت. اما به مرور این اثبات ها اصلاح شده و اکنون می دانیم که نامساوی بل تنها و تنها متکی بر فرض موضعی بودن جهان است و نه هیچ فرض دیگری.

نخستین و مهمترین چیزی را که باید در باره نامساوی بل به خاطر سپرد آن است که این نامساوی نتیجه مکانیک کوانتومی نیست و هیچ گزاره ای را نیز در باره مکانیک کوانتومی ارایه نمی دهد. بلکه این نامساوی نتیجه کاربرد عقل سلیم و استدلال بر مبنای تنها یک فرض اساسی یعنی موضعیت است و هیچ فرضی نیز در باره واقعیت خارجی ندارد. موضعیت به این معناست که رویدادهای با فاصله فضاگونه رابطه علّی ندارند و روی یک دیگر اثر نمی گذارند. حتی این را نیز می پذیریم که اگر چه تمام متغیرهای تصادفی ای که ممکن است سیستم فیزیکی ما (متشکل از ذرات و چیدمان اندازه گیری) را تعیین کند دانسته باشند، بازهم نتیجه ازمایشی که انجام می دهیم تصادفی است و یقینی نیست. حال سوالی که بل طرح می کند آن است که آیا در جهانی با این خاصیت، چه نوع همبستگی هایی امکان پذیر هستند و چه نوع ویژگی ای دارند؟ وی نشان می دهد که در چنین جهانی همبستگی ها مستقل از این که چقدر زیاد یا کم باشند همواره یک محدودیت دارند و این محدودیت توسط یک نامساوی ساده بیان می شود. هرگاه این نامساوی در آزمایشگاه نقض شود به معنای این است که فرض موضعیت نقض شده است و می توان نتیجه گرفت که جهان ما موضعی نیست. بعد از این مقدمه به توصیف ازمایش ذهنی بل می پردازیم.

[۸] Bell John (۱۹۲۸_۱۹۹۰)

فرض کنید که زوج ذره های یکسانی داریم که بین آلیس و باب به اشتراک نهاده شده اند. آلیس فقط روی ذره اول و باب روی ذره دوم اندازه گیری می کند. این دو شخص آزمایش های خود را چنان انجام می دهند که هیچ گونه ارتباط علّی بین آنها وجود نداشته باشد. برای این کار آزمایش های خود را در فاصله فضاگونه انجام می دهند. فرض می کنیم که آلیس به طور تصادفی دو خصلت A و B (برای بعضی ذرات خصلت (A و برای بعضی دیگر خصلت B و باب نیزبه طور تصادفی دو خصلت C و D را اندازه گیری می کنند. می توان تصور کرد که هر بار که آلیس می خواهد روی ذره خود اندازه گیری کند سکه ای را پرتاب می کند و بنا بر روی سکه، خصلت A یا B را اندازه می گیرد. باب نیز به طور مشابه همین کار را می کند. مشاهده پذیر های $A,\ B,\ C$ و D را چنان انتخاب می کنیم که مقادیر آنها را که با a, b, c و d نشان می دهیم فقط دو مقدار 1 و -1 را اختیار کنند. پارامترهای پنهان را مجموعاً با λ نشان می دهیم. منظور از این پارامترها تمامی آن چیزهایی است که ممکن است یک زوج ذره را از یک زوج ذره دیگر و شرایط آزمایش را برای از یک اندازه گیری به اندازه گیری دیگر تغییر دهند.

عبارت $P(a|A,\lambda)$ احتمال این است که وقتی آلیس روی جفت ذره ای با متغیرهای λ آزمایش A را انجام می دهد، نتیجه a را بدست آورد. در اینجا یک نکته مهم نهفته است و آن اینکه فرض شده است حتی وقتی که پارامترهای پنهان و نوع اندازه گیری نیز مشخص است بازهم ممکن است نتیجه اندازه گیری ذاتا تصادفی و نایقینی باشد. این نکته بی اندازه اهمیت دارد یعنی آنچنانکه در اثبات های قدیمی نامساوی بل فرض می شد، هیچ گونه فرضی در باره وجود واقعیت خارجی و مستقل از مشاهده در این جا وجود ندارد.

به همین ترتیب کمیت های مشابه دیگر تعریف می شوند. حال فرض اساسی موضعیت به شکل زیر است:

$$P(a,b|A,B,\lambda) = P(a|A,\lambda)P(b|B,\lambda) \tag{۴}$$

حال مقدار متوسط نتایج اندازه گیری کمیت ها برای تمام آن مواردی که یک متغیر λ دارند، به شکل زیر تعریف می شود.

$$A_\lambda = \sum_a a\ P(a|A,\lambda) \qquad , \qquad B_\lambda = \sum_b b\ P(b|B,\lambda) \tag{۵}$$

در نتیجه به دلیل فرض موضعیت خواهیم داشت:

$$\sum_{a,b} P(a,b|A,B,\lambda) = \sum_{a,b} P(a|A,\lambda)P(b|B,\lambda) = A_\lambda B_\lambda \tag{۶}$$

مقدار نهایی متوسط یک کمیت با انتگرال گیری روی مقادیر متغیر λ با یک تابع توزیع احتمال $P(\lambda)$ تعیین می شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\overline{AC} = \int A_\lambda C_\lambda P(\lambda) d\lambda \tag{۷}$$

پس از این تعریف از متوسط ها کمیت زیر را حساب می کنیم. در سطر دوم یک کمیت را به هر دو جمله اضافه یا کم کرده ایم. دقت کنیم که در نهایت مثل این است که هیچ چیزی را اضافه یا کم نکرده ایم، زیرا وقتی هر دو جمله را در نظر می گیریم می بینیم آنچه را که اضافه کرده ایم یا کم کرده ایم برابر با صفر است. دقت کنید که در این جا با دو تساوی جداگانه سر و کار داریم که هر دو درست هستند:

$$\begin{aligned} \overline{AC} - \overline{AD} &= \int (A_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda) P(\lambda) d\lambda \\ &= \int A_\lambda C_\lambda (1 \pm B_\lambda D_\lambda) P(\lambda) d\lambda - \int A_\lambda D_\lambda (1 \pm B_\lambda C_\lambda) P(\lambda) d\lambda \end{aligned} \tag{۸}$$

حال از نامساوی های مثلثی استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$\mid \overline{AC} - \overline{AD} \mid \leq \int \mid A_\lambda C_\lambda (1 \pm B_\lambda D_\lambda) \mid P(\lambda) d\lambda + \int \mid A_\lambda D_\lambda (1 \pm B_\lambda C_\lambda) \mid P(\lambda) d\lambda \tag{۹}$$

سپس از این استفاده می کنیم که

$$|A_\lambda C_\lambda| \leq 1 \qquad\qquad |A_\lambda D_\lambda| \leq 1$$

و به نتیجه زیر می رسیم:

$$\mid \overline{AC} - \overline{AD} \mid \leq \int \mid 1 \pm B_\lambda D_\lambda \mid P(\lambda) + \int \mid 1 \pm B_\lambda C_\lambda \mid P(\lambda) d\lambda. \tag{۱۰}$$

اما عبارت های داخل قدر مطلق نیز مثبت هستند و با برداشتن علامت قدر مطلق به نامساوی زیر می رسیم:

$$\mid \overline{AC} - \overline{AD} \mid \leq 2 \pm \left(\overline{BC} + \overline{BD}\right). \tag{۱۱}$$

شکل ۱: آزمایش ذهنی بل

که می توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$| \overline{AC} - \overline{AD} | + | \overline{BC} + \overline{BD} | \leq 2. \qquad (۱۲)$$

با توجه به نامساوی مثلث $|a+b| \leq |a| + |b|$ به نتیجه نهایی یعنی نامساوی بل می رسیم:

$$| \overline{A(C-D) + B(C+D)} | \leq 2. \qquad (۱۳)$$

باید اضافه کنیم که نامساوی اولیه بل به این شکل نبوده است و نامساوی فوق که نامساوی $CHSH$ خوانده می شود، نخستین بار توسط کلاوزر، هورن، شیمونی و هولت [۹]

ارائه شده است.

دقت کنید که این نامساوی در باره مکانیک کوانتومی نیست بلکه یک نامساوی در باره مشاهدات ماست. این نامساوی می گوید که در جهانی با خاصیت موضعی [۱۰] بین کلیک های آزمایشگاهی می بایست این نامساوی برقرار باشد.

۱.۲ نقض نامساوی بل در مشاهدات آزمایشگاهی

برای اینکه ببینیم آیا جهان ما یک جهان با خاصیت موضعی است یا نه می بایست به آزمایش رجوع کرده و درستی یا نادرستی این نامساوی را بیازماییم. از سال ۱۹۷۲ تا کنون آزمایشهای گوناگونی با فوتون هاا نجام شده است که همگی نشان دهنده این هستند که در دنیای میکروسکوپی

[۹] Clauser, Horne, Shimony , Holt

[۱۰] Local Realism

نامساوی بل به وضوح نقض می شود. شکل (۱.۲) شمای کلی یکی از این آزمایشها را نشان می دهد. منبع S فوتون هایی را در به دو طرف ساطع می کند که از درون دو قطبنده می گذرند. این فوتون ها در حالتی قرار گرفته اند که اصطلاحا آن را یک حالت درهم تنیده می گویند. به عبارت دیگر فوتون ها در حالت زیر هستند:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|H, H\rangle + |V, V\rangle \right) \qquad (۱۴)$$

که در آن $|H\rangle$ نشان دهنده یک حالت با قطبش افقی و $|V\rangle$ نشان دهنده یک حالت با قطبش عمودی است. این گونه حالت ها را می توان با تاباندن یک باریکه فوتون به یک کریستال غیر خطی تولید کرد. ازمایشی که چنین حالت هایی را تولید می کند، Parameteric Down Conversion نام دارد. این قطبنده ها فوتون ها را بر اساس قطبش آنها جدا می کنند و به آشکارساز ها می فرستند. در آخر هم همزمانی فوتون ها توسط یک شمارشگر بسیار دقیق تست می شود که اطمینان حاصل شود کلیک های حاصل از آشکارساز ها مربوط به یک جفت فوتون ساطع شده هستند. جهت قطبنده ها می بایست با چنان سرعتی عوض شود که در فاصله دو اندازه گیری نور فرصت نکند از یک نقطه A به نقطه B برسد. به عبارت دیگر فرض می شود که قصد آزمایشگر A برای اینکه قطبش فوتون اش را در کدام راستا اندازه بگیرد، بر قصد آزمایشگر B برای تعیین نوع اندازه گیری اش اثر ندارد.

در این آزمایشها آلیس جهت های قطبش فوتون را در راستای افقی و عمودی یعنی H و V اندازه می گیرد. باب نیز جهت های قطبش فوتون هایش را در راستاهایی که با راستای فوق زاویه ۴۵ درجه می سازند اندازه می گیرد و معلوم می شود که مقدار نقض نامساوی بل می تواند به مقدار حداکثری $2\sqrt{2}$ برسد.

این نوع آزمایش ها تا کنون توسط افراد زیر انجام شده است: فریدمن و کلازر (۱۹۷۲) [۱۱]، آلن اسپه (۱۹۸۲) [۱۲]، ولفگانگ تیتل و گروه ژنو(۱۹۹۸) [۱۳]، گرگ وایز [۱۴] ژیان وی پن و همکاران (۲۰۰۰) [۱۵] و سپس توسط دیگران در سالهای ۲۰۰۱ ، ۲۰۰۷، ۲۰۰۸، ۲۰۰۹ و ۲۰۱۳ توسط گروه های دیگر [۱۶]. در هرکدام از این آزمایشها سطح دقت بالا تر رفته و در هرکدام یکی از راه های گریز [۱۷] آزمایش های قبلی بسته شده است. اکنون اعتقاد عمومی تثبیت شده این است که نامساوی بل در طبیعت نقض می شود و طبیعت مستقل از این که با چه نظریه ای

[۱۱] Freedman and Clauser

[۱۲] Alain Aspect

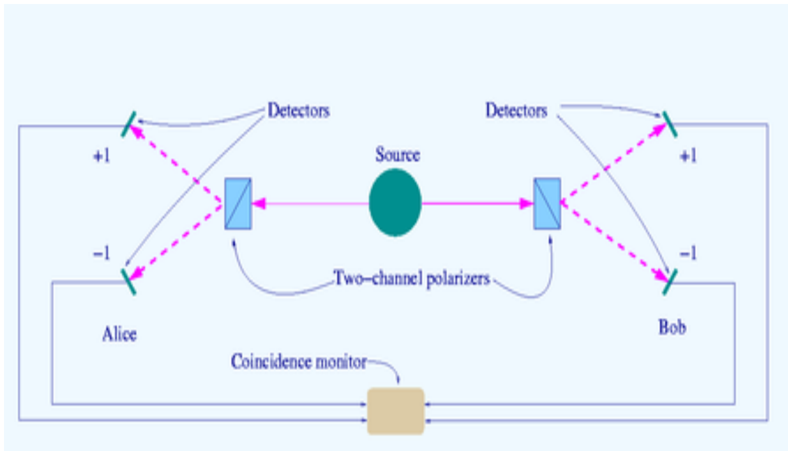
[۱۳] Wolfgang Tittel, and the Genova Group

[۱۴] Greg Weihs

[۱۵] Jian Wei Pan et al

[۱۶] see: the item ”Bellt test Experiments” in Wikipeida.

[۱۷] Loophole



شکل ۲: شمایی کلی از آزمایش نامساوی بل (برگرفته از ویکی پدیا)

توصیف می شود با موضعیت سازگار نیست.

۳ توضیح نقض نامساوی بل توسط مکانیک کوانتومی

همانطور که تا کنون تاکید کرده ایم نامساوی بل یک نامساوی کلی است که بیان می کند در جهانی که خاصیت های موضعی داشته باشد، هر نوع همبستگی بین نتایج اندازه گیری های ما می بایست در یک نامساوی صدق کنند. به اصطلاح می گوییم که خاصیت همبستگی های کلاسیک این است که در نامساوی بل صدق کنند. با مشاهدات متعددی که از نقض نامساوی بل حاصل شده است، معلوم می شود که جهان ما این گونه نیست. یعنی در طبیعت همبستگی هایی وجود دارند که کلاسیک نیستند. حال سوال این است که آیا مکانیک کوانتومی می تواند این نوع همبستگی ها را توضیح دهد؟ پاسخ این سوال مثبت است. [۱۸] است.

[۱۸] Entangled States

۱.۳ حالت های در هم تنیده

در درسهای آینده حالت های درهم تنیده را به تفصیل بررسی خواهیم کرد. آنچه که اکنون می دانیم این است که درهم تنیدگی مهم ترین ویژگی کوانتومی است و همین ویژگی آن را به یک منبع مهم و ارزشمند برای انجام رایانش و مبادله اطلاعات کوانتومی تبدیل می کند. علیرغم مطالعات بسیار در این زمینه هنوز راه درازی تا فهم جنبه های متعدد درهم تنیدگی باقی مانده است. در این درس تنها به تعریف های اساسی در این مورد می پردازیم.

۱.۱.۳ حالت های درهم تنیده خالص

یک حالت ضربی [۱۹] حالتی است که می توان آن را به صورت ضرب تانسوری دو حالت از هر بخش نوشت :

$$|\Psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B. \qquad (۱۵)$$

در چنین حالتی هیچ گونه همبستگی بین نتایج اندازه گیری های آلیس و باب و جود ندارد یعنی اینکه برای هر نوع اندازه گیری روی چنین حالتی داریم

$$P_{AB}(m_i, n_j) = P_A(m_i)P_B(n_j). \qquad (۱۶)$$

یک حالت درهم تنیده دوبخشی خالص [۲۰] حالتی است که نتوان آن را به صورت ضرب تانسوری دو حالت از هر بخش نوشت. در اندازه گیری روی این حالت همواره یک نوع همبستگی بین اندازه گیری های آلیس و باب وجود دارد. یعنی نه تنها شرط ۱۶ برقرار نیست بلکه میزان همبستگی چنان است که توسط یک تابع احتمال از متغیرهای موضعی قابل توضیح نیست چرا که این نوع همبستگی ها چنانکه در ادامه خواهیم دید حتما قضیه بل را نقض می کند. یک حالت دوکیوبیتی کلی به صورت زیر نوشته می شود:

$$|\psi\rangle_{AB} = a|0,0\rangle + b|0,1\rangle + c|1,0\rangle + d|1,1\rangle. \qquad (۱۷)$$

هرگاه $ad - bc \neq 0$ باشد این حالت درهم تنیده است.

اگر چه آزمایشهای مربوط به نامساوی بل همه با فوتون ها انجام شده ، معمولاً برای راحتی و به دلیل معادل بودن قطبش فوتون ها با ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ از مشاهده پذیرهای اسپینی بجای قطبش فوتون ها استفاده می شود. حالتی که فوتون های ارسال شده از منبع دارند به زبان اسپینی یک

[۱۹] product state

[۲۰] Pure bi-partite entangled state

حالت درهم تنیده به شکل زیراست:

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,1\rangle + |1,0\rangle\right). \tag{۱۸}$$

به زبان اسپین ها نیز می توان گفت که آلیس و باب مولفه اسپین ذرات را در راستای های زیر اندازه می گیرند:

$$A_1 = S_x, \quad A_2 = S_z, \quad B_1 = a\ S_x + b\ S_z, \qquad B_2 = -b\ S_x + a\ S_z. \tag{۱۹}$$

پارامترهای a و b را چنان می گیریم که جهت های اندازه گیری C و D برهم عمود باشند. حال مطابق با مکانیک کوانتومی متوسط کمیت زیر را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned}
\langle (A_1+A_2)B_1 + (A_1-A_2)B_2\rangle &= \langle (S_x+S_z)(a\ S_x + b\ S_z) + (S_x - S_z)(-b\ S_x + a\ S_z)\rangle \\
&= \langle\Psi|(\hat{S}_x + \hat{S}_z)\otimes(a\ \hat{S}_x + b\ \hat{S}_z) + (\hat{S}_x - \hat{S}_z)\otimes(-b\ \hat{S}_x + a\ \hat{S}_z)|\Psi\rangle \\
&= \langle\Psi|(a-b)(\hat{S}_x\otimes\hat{S}_x - \hat{S}_z\otimes\hat{S}_z) + (a+b)(\hat{S}_x\otimes\hat{S}_z + \hat{S}_z\otimes\hat{S}_x)|\Psi\rangle \\
&=: \langle\Psi|\Omega|\Psi\rangle.
\end{aligned} \tag{۲۰}$$

آخرین عبارت را براحتی می توان محاسبه کرد. فرم صریح ماتریس Ω برابراست با:

$$\Omega = \begin{pmatrix} -a+b & a+b & a+b & a-b \\ a+b & a-b & a-b & -a-b \\ a+b & a-b & a-b & -a-b \\ a-b & -a-b & -a-b & -a+b \end{pmatrix} \tag{۲۱}$$

و درنتیجه

$$\langle (A_1+A_2)B_1 + (A_1-A_2)B_2\rangle = \langle\Psi|\Omega|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Omega\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2(a-b). \tag{۲۲}$$

به این ترتیب با انتخاب $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ به این نتیجه می رسیم که

$$\langle (A_1 + A_2)B_1 + (A_1 - A_2)B_2 \rangle = 2\sqrt{2} \qquad (۲۳)$$

که بوضوح نامساوی بل را نقض می کند و این همان مقداری است که در آزمایشها نیز بدست می آید. به این ترتیب می بینیم که این حالت کوانتومی که یک حالت درهم تنیده است دارای همبستگی هایی است که فراتر از همبستگی های کلاسیک یعنی همبستگی های موضعی و واقعی است. و بخصوص می بینیم که مکانیک کوانتومی مقدار این همبستگی ها را بدرستی توضیح می دهد.

۲.۳ مقدار بیشینه‌ی نقض نامساوی بل

با کمی تغییر در روابط بالا می توان براحتی فهمید که حالت های

$$\begin{aligned} |\phi^{\pm}\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle \pm |1,1\rangle) \\ |\psi^{\pm}\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle \pm |1,0\rangle) \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

که اصطلاحاً حالت های بل [۲۱] نامیده می شوند، همگی نامساوی بل را به میزانِ $2\sqrt{2}$ نقض می کنند. سوالی که درپیش رو داریم آن است که آیا حالتی می توان تصور کرد که نامساوی بل به مقداری بیشتر از این هم نقض شود؟ دراین قسمت نشان می دهیم که هیچ حالتی وجود ندارد که نامساوی بل را بیش از این نقض کند. واضح است که در تمام این بحث خود را به سیستم های دوقسمتی که هر زیر سیستم آن نیز دو بعدی است منحصر کرده‌ایم.

در واقع نشان می دهیم که برای هر چهار مشاهده‌پذیر یا عملگر هرمیتیِ A_1, A_2, B_1, B_2 که ویژه مقادیر آن ها ± 1 باشد، و به ازای هر حالتِ $|\psi\rangle$ همواره رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\langle \psi | (A_1 + A_2) \otimes B_1 + (A_1 - A_2) \otimes B_2 | \psi \rangle \leq 2\sqrt{2}. \qquad (۲۵)$$

این نامساوی به نامساوی $Cirelson$ یا حدِّ سیرلسون مشهور است. برای اثبات این رابطه قرار می دهیم:

$$a_1 := A_1 \otimes I, \qquad a_2 := A_2 \otimes I, \qquad b_1 := I \otimes B_1, \qquad b_2 := I \otimes B_2. \qquad (۲۶)$$

[۲۱] Bell States

واضح است که این عملگرها در شرایط زیر صدق می کنند:

$$a_1^2 = a_2^2 = b_1^2 = b_2^2 = I,$$
$$[a_1, b_1] = [a_2, b_1] = [a_1, b_2] = [a_2, b_2] = 0. \qquad (۲۷)$$

حال با استفاده از این روابط و تعریف عملگرِ M به صورتِ

$$M := (a_1 + a_2)b_1 + (a_1 - a_2)b_2$$

به رابطه زیر می رسیم:

$$M^2 = 4I - [a_1, a_2][b_1, b_2]. \qquad (۲۸)$$

در این مرحله از یک تعریف برای اندازه عملگرها استفاده می کنیم که به شکل زیر است و عملگر $Sup\ Norm$ خوانده می شود:

$$||K||_{sup} := sup_{|\psi\rangle} \frac{||K|\psi\rangle||}{||\psi\rangle||}, \qquad (۲۹)$$

که درآن $||\psi\rangle|| := \langle\psi|\psi\rangle^{\frac{1}{2}}$ اندازه یک بردار و $sup_{|\psi\rangle}$ به معنای بیشینه گرفتن روی تمام بردارهای $|\psi\rangle$ است.

- تمرین:

الف: نشان دهید که $||K||_{sup}$ برابر با قدرمطلق بزرگترین ویژه مقدارِ $\sqrt{K^\dagger K}$ است.

ب: نشان دهید که این نوع اندازه در نامساوی های زیر صدق می کند:

$$||K + L||_{sup} \leq ||K||_{sup} + ||L||_{sup}$$
$$||KL||_{sup} \leq ||K||_{sup}||L||_{sup}$$
$$||K^2||_{sup} = ||K||_{sup}^2. \qquad (۳۰)$$

حال با استفاده از این خواص و این که ویژه مقدارهای $a,\ a',\ b,\ b'$ همگی یک و منهای یک هستند، نتیجه می گیریم که

$$||M^2||_{sup} \leq 4 + ||[a_1, a_2]||_{sup}||[b_1, b_2]||_{sup} \leq 4 + 4 = 8. \qquad (۳۱)$$

از آنجا که M یک ماتریس هرمیتی است، این امر به این معناست که اندازه بالاترین ویژه مقدارِ M^2 برابر با 8 است و در نتیجه اندازه بزرگترین ویژه مقدارِ M برابر با $2\sqrt{2}$ است. بنابراین نتیجه می گیریم که به ازای هر حالت ِ دلخواه ِ $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|M|\psi\rangle \leq 2\sqrt{2}, \tag{۳۲}$$

و درنتیجه

$$\langle\psi|A_1 \otimes (B_1 + B_2) + A_1 \otimes (B_1 - B_2)|\psi\rangle \leq 2\sqrt{2}. \tag{۳۳}$$

نامساوی $CHSH$ حد بیشینه‌ی همبستگی های کلاسیک بین نتایج اندازه گیری های این مشاهده پذیر ها و نامساوی سیرلسون حد بیشینه‌ی همبستگی های کوانتومی بین آنها را نشان می دهد. در بخش بعدی بازهم به این نامساوی ها و معنای آنها باز می گردیم.

۳.۳ درهم تنیدگی به عنوان یک منبع مفید

آیا خصلت ناموضعی حالت های درهم تنیده به معنای نقض نسبیت خاص است؟ آیا آلیس می تواند با انجام آزمایش هایی با باب علامت دهی مافوق نوری انجام دهد؟ پاسخ این سوال ها منفی است. در واقع آلیس با اندازه گیری های خود تنها می تواند نتایج آزمایش های باب را پیش گویی کند و به هیچ روی نمی تواند علامت یا سیگنالی را به او مخابره کند. برای فهم این موضوع کافی است که ماتریس چگالی باب را قبل و بعد از اندازه گیری آلیس بدست آورده و با هم مقایسه کنیم. به طور کلی فرض کنید که حالتی که در دست آلیس و باب است حالتی کلی به شکل زیرباشد:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,\mu} \psi_{i\mu}|i,\mu\rangle, \tag{۳۴}$$

بنابراین ذره‌ای که در دست باب قرار دارد در حالت زیر خواهد بود:

$$\rho_B = tr_A(|\Psi\rangle\langle\Psi|). \tag{۳۵}$$

حال فرض کنید که آلیس یک اندازه گیری با عملگرهای $\{P_m\}$ روی ذره خودش انجام دهد. دراین صورت حالت دو ذره به حالت زیر تبدیل می شود:

$$\rho' = \sum_m (P_m \otimes I)|\Psi\rangle\langle\Psi|(P_m^\dagger \otimes I). \tag{۳۶}$$

بعد از این اندازه گیری حالت ذره ای که در دست باب است برابرخواهد بود با:

$$\rho'_B = tr_A(\rho') = tr_A(\sum_m (P_m \otimes I)|\Psi\rangle\langle\Psi|(P_m \otimes I).) \quad (۳۷)$$

اما دراین جا خواننده می تواند یک لم ساده را برای خود ثابت کند و آن اینکه tr_A به معنای زیر دارای خاصیت دوره‌ای است که درآن عملگر های X و Z روی فضای A عمل می کند و عملگر Y روی هر دو فضای A و B عمی می کند.

$$tr_A((X \otimes I)Y(Z \otimes I) = tr((Z \otimes I)(X \otimes I)Y) \quad (۳۸)$$

با استفاده از این خاصیت خواهیم داشت:

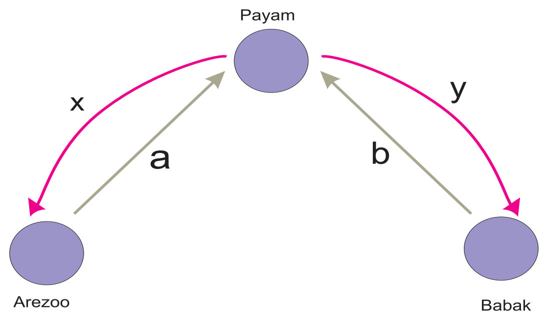
$$\rho'_B = tr_A(\sum_m (P_m \otimes I)|\Psi\rangle\langle\Psi|) = tr_A(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \rho_B. \quad (۳۹)$$

بنابراین حالت ذره ای که در دست باب است با اندازه گیری های آلیس تغییر نمی کند و درنتیجه اندازه گیری های آلیس به هیچ روی باعث تغییری در حالتِ ذره باب نخواهند شد و و درنتیجه هیچ نوع علامت یا اطلاعی به باب مخابره نمی شود. این امر ادعای ما را ثابت می کند که ناموضعیت به معنای نقض نسبیت خاص نیست. با این وجود حالت های درهم تنیده یعنی حالت هایی مثلِ 1 که نشان دهنده اثرات ناموضعی در مکانیک کوانتومی هستند، خصلت های غریبی دارند که آنها را شایسته مطالعه جدی و وسیع می کند. دردو دهه اخیر که موضوع کامپیوترها و اطلاعات کوانتومی گسترش یافته‌است نتایج فراوانی در مورد این نوع حالت ها بدست آمده است که در فصل های آینده به آنها خواهیم پرداخت. در فصل های آینده نشان می دهیم که اگر چه حالت های درهم تنیده را نمی توان برای علامت دهی فوق نوری به کار برد ولی می توان از آنها به عنوان منبع استفاده کرد که با آن بتوان کارهایی ماورای تمام توانایی های کلاسیک انجام داد. در ادامه این بخش به یکی از این کارها اشاره می کنیم.

۱.۳.۳ استراتژی های کلاسیک و کوانتومی

بهترین نحوه فهم تفاوتی که بین همبستگی های کلاسیک و کوانتومی وجود دارد آن است که معنای آنها را در مقیاس زندگی روزمره بفهمیم. برای این منظور به یک بازی فکری توجه می کنیم که مخصوصاً برای این منظور ابداع شده است. دراین نوع بازی ها که بعضاً به آنها بازی های کوانتومی [۲۲] نیز گفته می شود، نشان داده می شود که هرگاه بازیگران تنها از استراتژی های کلاسیک استفاده کنند میزان برد آنها از یک مقدار معین هرگز تجاوز نمی کند. (منظور از یک استراتژی کلاسیک آن است که این افراد از هرنوع متغیرهای تصادفی هم بسته، برای تصمیم گیری های خود می توانند استفاده کنند.) اما هرگاه بازیگران از هم بستگی های کوانتومی مثلا یک زوج درهم تنیده و استفاده کنند و تصمیم گیری های خود را بر

[۲۲] Quantum Game



شکل ۳: بازی کوانتومی ای که در متن درس توضیح داده شده است. دراین بازی بُرد وقتی حاصل می شود که $a \oplus b = x \wedge y$.

نتایج اندازه گیری بر روی این حالات استوار کنند، آنگاه قادر خواهند بود میزان برد خود را بیشتر کرده و از حد کلاسیک تجاوز کنند. در زیر با ساده ترین بازی کوانتومی آشنا می شویم.

فرض کنید که شخص ثالثی به نام چارلی دو متغیر تصادفی x و y را به ترتیب به آلیس و باب ارسال می کند. در عوض آلیس و باب به ترتیب مقادیر a و b را به چارلی باز پس می فرستند. هربار که مقادیر متغیرها در رابطه‌ی زیر صدق کنند:

$$a \oplus b = x \wedge y, \tag{۴۰}$$

آلیس و باب این دور از بازی را برده و هر بار که غیراز این باشد، این دور را می بازند. دقت کنید که تمام متغیرهای $a,\ b,\ x,\ y$ مقادیر 0 یا 1 را اختیار می کنند. ضمناً آلیس و باب نمی توانند از مقادیری که چارلی برای دیگری فرستاده‌است اطلاع حاصل کنند، شکل **??**.

فرض کنید که چارلی مقادیر 0 و 1 را به طور تصادفی و با فراوانی یکسان برای آروز و باب می فرستد. براحتی می توان دید که با هیچ استراتژی ای آلیس و باب نمی توانند در همه موارد (به ازای همه مقادیر دریافتی از پیام) بازی را ببرند. برای فهم این نکته متغیرهای a_0 و a_1 را مقادیری می گیریم که آلیس برای چارلی باز پس می فرستد اگر مقدارِ دریافتی x اش به ترتیب برابر با 0 و 1 باشند. به همین ترتیب متغیرهای b_0 و b_1 نیز تعریف می شوند. شرط برد آن است که هر چهار تساوی زیر برقرار شوند:

$$\begin{aligned} a_0 \oplus b_0 &= 0 \\ a_0 \oplus b_1 &= 0 \\ a_1 \oplus b_0 &= 0 \\ a_1 \oplus b_1 &= 1. \end{aligned} \tag{۴۱}$$

با جمع کردن طرفین این تساوی ها و استفاده از خواص $\oplus$ به رابطه متناقضِ $1 = 0$ می رسیم و قضیه ثابت می شود. اما یک ترفند (استراتژی) وجود دارد که به بازیگران اجازه می دهد در سه چهارم موارد برنده باشند. این ترفند به این شکل است که قرار دهیم

$$a_0 = a_1 = 0, \qquad b_0 = b_1 = 0, \tag{۴۲}$$

به عبارت دیگر آلیس و باب مستقل از این که چه مقدارهایی از چارلی دریافت می کنند همواره بیت های صفر را به او ارسال می کنند. در چنین حالتی تساوی های چهارگانه‌ی بالا نشان می دهند که در سه مورد از چهار مورد آلیس و باب بازی را برده و در یک مورد می بازند. بنابراین در صورتی که چارلی بیت های خودش را به طور یکنواخت ارسال کند احتمال برد آلیس و باب $\frac{3}{4}$ است.

حال سوال می کنیم که آیا هیچ استراتژی یا ترفند دیگری وجود دارد که احتمال بُردش بیشتر از $\frac{3}{4}$ باشد؟ ممکن است که آلیس و باب بتوانند قبل از بازی بتوانند هماهنگی های لازم را بین خود بوجود آورده و از یک فرایند فیزیکی که برای آنها نتایج همبسته تولید می کند استفاده کرده و بر مبنای این نتایج همبسته احتمالا تصادفی در باره بیت های ارسالی خود به چارلی تصمیم بگیرند. طبیعی است که پس از آغاز بازی آلیس و باب اجازه هیچ گونه مکالمه و اطلاع یافتن از بیت های همدیگر را ندارند. برای این که پاسخ این سوال را بیابیم نخست متغیرهای زیر را تعریف می کنیم:

$$\alpha_0 := (-1)^{a_0}, \qquad \alpha_1 := (-1)^{a_1}, \qquad \beta_0 := (-1)^{b_0}, \qquad \beta_1 := (-1)^{b_1} \tag{۴۳}$$

این متغیرها مقادیر ± 1 را اختیار می کنند. حال در تعداد بسیار زیادی بازی که انجام می دهند می توان متوسط زیر را حساب کرد.

$$\langle M\rangle := \langle \alpha_0(\beta_0+\beta_1) + \alpha_1(\beta_0-\beta_1)\rangle \leq 2, \tag{۴۴}$$

که آن را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\langle M\rangle = \langle (-1)^{a_0+b_0} + (-1)^{a_0+b_1} + (-1)^{a_1+b_0} + (-1)^{a_1+b_1}\rangle \leq 2. \tag{۴۵}$$

نشان می دهیم که احتمال موفقیت آلیس و باب در این بازی رابطه زیر را با $\langle M\rangle$ دارد:

$$P(success) = \frac{4+\langle M\rangle}{8}. \tag{۴۶}$$

اگر این رابطه را ثابت کنیم به این معناست که وقتی که آلیس و باب از فرایندهای غیرکوانتومی استفاده می کنند بدلیل آنکه $\langle M\rangle \leq 2$ است ، احتمال برد آنها هیچگاه از مقدار $\frac{3}{4}$ نمی تواند زیادتر شود. اما وقتی که از یک حالت بل استفاده می کنند، به دلیل آنکه $\langle M\rangle = 2\sqrt{2}$ است،

احتمال موفقیت آنها می تواند به مقدار $0.853 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ برسد. در عین حال نامساوی سیرلسون بیان می کند که هیچ نوع استراتژی کلاسیک یا کوانتومی وجود ندارد که احتمال برد را از این مقدار بیشتر بکند.

اکنون تنها کاری که باقی مانده است این است که درستی رابطه ۴۶ را نشان دهیم. برای اینکار متوسط های موجود در رابطه ۴۵ محاسبه می کنیم. این متوسط ها را براحتی می توانیم محاسبه کنیم. با توجه به تعریف متوسط داریم

$$\langle(-1)^{a\oplus b}\rangle = P_{a\oplus b=0} - P_{a\oplus b=1}. \quad (۴۷)$$

هم چنین توجه می کنیم که به عنوان مثال $P_{a_0\oplus b_0=0}$ برابر است با احتمال اینکه آلیس و باب وقتی که هر دو بیت 0 را دریافت می کنند بیت هایی را برای چارلی بفرستند که در شرط $a_0 \oplus b_0 = 0$ صدق کنند و در نتیجه آن دور خاص را ببرند. به این ترتیب این عبارت یک احتمال شرطی به صورت زیر است:

$$P_{a_0\oplus b_0=0} = P(success|0,0) \quad (۴۸)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\langle(-1)^{a_0\oplus b_0}\rangle &= P_{a_0\oplus b_0=0} - P_{a_0\oplus b_0=1} = P(success|0,0) - (1 - P(failure|00)) = 2P(success|00) - 1,\\
\langle(-1)^{a_0\oplus b_1}\rangle &= P_{a_0\oplus b_1=0} - P_{a_0\oplus b_1=1} = P(success|01) - (1 - P(failure|01)) = 2P(success|01) - 1,\\
\langle(-1)^{a_1\oplus b_0}\rangle &= P_{a_1\oplus b_0=0} - P_{a_1\oplus b_0=1} = P(success|10) - (1 - P(failure|10)) = 2P(success|10) - 1,\\
\langle(-1)^{a_1\oplus b_1}\rangle &= P_{a_1\oplus b_1=0} - P_{a_1\oplus b_1=1} = P(failure|11) - (1 - P(success|11)) = 1 - 2P(success|11).
\end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$2P(success|00) - 1 + 2P(success|01) - 1 + 2P(success|10) - 1 + 2P(success|11) - 1 = \langle M\rangle, \quad (۴۹)$$

و یا

$$\sum_{i,j} P(success|i,j) = \frac{4+\langle M\rangle}{2} \quad (۵۰)$$

با توجه به اینکه احتمال فرستادن زوج های x,y مختلف از طرفِ چارلی برابر با $\frac{1}{4}$ است، خواهیم داشت

$$P(success) = \sum_{i,j} P(success|i,j)P(i,j) = \frac{4+\langle M\rangle}{8} \quad (۵۱)$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

■ تمرین: دقیقا استراتژی کوانتومی آلیس و باب را تعیین کنید و نشان دهید که با کاربرد آن آنها می توانند این بازی را با حداکثر احتمال برد برنده شوند.

۴.۳ آیا هر حالت درهم تنیده‌ای نامساوی بل را نقض می کند؟

آیا هر حالت درهم تنیده‌ای نامساوی بل را نقض می کند؟ برای پاسخ به این سوال دقت می کنیم که یک حالت دلخواه از دو ذره را می توانیم با استفاده از تجزیه اشمیت به صورت زیر بنویسیم:

$$|\psi\rangle = \alpha|0,0\rangle + \beta|1,1\rangle, \qquad (۵۲)$$

که در آن α و β اعداد مثبت و حقیقی هستند. از آنجا که $\alpha^2+\beta^2=1$ نتیجه می گیریم که کلی ترین حالتِ دو ذره ای به صورت زیر قابل بازنویسی‌است:

$$|\psi\rangle = \cos\theta|0,0\rangle + \sin\theta|1,1\rangle. \qquad (۵۳)$$

این حالت دارای خاصیت های زیراست:

$$\begin{aligned}
&\langle\psi|\sigma_1\otimes\sigma_1|\psi\rangle = \sin 2\theta\\
&\langle\psi|\sigma_3\otimes\sigma_3|\psi\rangle = 1\\
&\langle\psi|\sigma_1\otimes\sigma_3|\psi\rangle = \langle\psi|\sigma_3\otimes\sigma_1|\psi\rangle = 0.
\end{aligned} \qquad (۵۴)$$

مشاهده پذیر های آلیس و باب را به ترتیب زیر انتخاب می کنیم:

$$\mathbf{A}_1 := \cos\alpha\sigma_x + \sin\alpha\sigma_z$$

$$\mathbf{A}_2 := \cos\beta\sigma_x + \sin\beta\sigma_z$$

$$\mathbf{B}_1 := \cos\gamma\sigma_x + \sin\gamma\sigma_z$$
$$\mathbf{B}_2 := \cos\delta\sigma_x + \sin\delta\sigma_z. \quad (۵۵)$$

محاسبه سرراست نشان می دهد که

$$\langle\psi|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1|\psi\rangle = \cos\alpha\cos\gamma\sin 2\theta + \sin\alpha\sin\gamma$$
$$\langle\psi|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2|\psi\rangle = \cos\alpha\cos\delta\sin 2\theta + \sin\alpha\sin\delta$$
$$\langle\psi|\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1|\psi\rangle = \cos\beta\cos\gamma\sin 2\theta + \sin\beta\sin\gamma$$
$$\langle\psi|\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2|\psi\rangle = \cos\beta\cos\delta\sin 2\theta + \sin\beta\sin\delta. \quad (۵۶)$$

می خواهیم نشان دهیم که مقادیر $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ ,\ \delta$ را می توان چنان انتخاب کرد که عبارت $\langle\psi|A_1(B_1+B_2)+A_2(B_1-B_2)|\psi\rangle$ به ازای هر مقدار θ از ۲ بیشتر شود. برای سادگی قرار می دهیم $\alpha=0$ ، $\beta=\pi/2$ و $\gamma=-\delta$. درنتیجه خواهیم داشت

$$\langle\psi|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1|\psi\rangle = \cos\gamma\sin 2\theta$$
$$\langle\psi|\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2|\psi\rangle = \cos\gamma\sin 2\theta$$
$$\langle\psi|\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1|\psi\rangle = \sin\gamma$$
$$\langle\psi|\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2|\psi\rangle = -\sin\gamma. \quad (۵۷)$$

با این انتخاب ها خواهیم داشت:

$$\langle\psi|A_1(B_1+B_2)+A_2(B_1-B_2)|\psi\rangle = 2\left(\sin\gamma + \cos\gamma\sin 2\theta\right). \quad (۵۸)$$

حال می خواهیم ببینیم آیا به ازای یک مقدار مناسب از γ طرف راست بزرگتر از ۲ می شود یا نه؟ عبارت داخل پرانتز مقدار فرینه[۲۳] ی خود را در نقطه‌ای انتخاب می کند که در آن

$$\cot\gamma = \sin 2\theta. \quad (۵۹)$$

دراین نقطه خواهیم داشت

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 2\theta}}, \qquad \cos\gamma = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{1+\sin^2 2\theta}} \quad (۶۰)$$

[۲۳] Exrtremum

و درنتیجه دراین نقطه خواهیم داشت

$$\langle\psi|A_1(B_1+B_2)+A_2(B_1-B_2)|\psi\rangle = 2\sqrt{1+\sin^2 2\theta} \qquad (۶۱)$$

که به ازای هرمقدارِ θ از ۲ بیشتر است. بنابراین هر حالتِ درهم تنیده‌ای حتماً نامساوی بل را نقض می کند. باید دقت کنیم که دراین جا حالت را خالص در نظر گرفته‌ایم. این امر برای حالت های آمیخته صحیح نیست. البته می بایست درهم تنیدگی را برای حالت های آمیخته تعریف کنیم. این کار را در تمرین ها انجام خواهیم داد.

۴ حالت های GHZ

چنانچه دیدیم نامساوی بل یک نامساوی در مورد متوسط مشاهده پذیرهاست. نقض این نامساوی به این معناست که همبستگی هایی که در این حالت های ناموضعی وجود دارد، از آن نوعی است که به هیچ وجه توسط یک تابع احتمال همبسته و کلاسیک قابل بیان نیستند. به عبارت دیگر هیچ نظریه متغیرهای پنهان و موضعی که قایل به مقادیر واقعی برای اسپین ها باشد قادر نیست این همبستگی ها را توضیح دهد. برای تحقیق نامساوی بل می بایست روی تعداد زیادی نمونه های یکسان از حالت های درهم تنیده اندازه گیری کرد و مقادیر متوسط مشاهده پذیرهای خاصی را حساب کرد. چندین سال بعد از ارائه نامساوی بل، گرین برگر[۲۴]، هورن [۲۵] و زایلینگر [۲۶] نشان دادند که حالت هایی وجود دارند که هرکدام به تنهایی امکان وجود نظریه متغیرهای پنهان موضعی را نقض می کنند. این حالت ها امروزه به حالت های GHZ معروفند. یک نمونه از آنها به شکل زیراست:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z+,z+,z+\rangle + |z-,z-,z-\rangle\right). \qquad (۶۲)$$

فرض کنید که ذره اول در دست آلیس ، ذره دوم در دست باب و ذره سوم در دست چارلی است. برای این سه نفر به ترتیب حروف A، B و C را به کار می بریم. هم چنین فرض می کنیم که این سه نفر هیچ نوع ارتباط علی با هم ندارند. هرگاه این سه نفر اندازه گیری های خود را در پایه Z انجام دهند به طور تصادفی به یکی از نتایج زیر دست می یابند:

$$Z_aZ_bZ_c=(1,1,1) \qquad \text{یا} \qquad Z_aZ_bZ_c=(-1,-1,-1) \qquad (۶۳)$$

[۲۴] Greenberger
[۲۵] Horne
[۲۶] Zeilinger

این امر نشان دهنده یک نوع همبستگی غیرموضعی بین سه کمیت فوق است. ولی ممکن است که این همبستگی ناشی از وجود متغیرهای پنهانی باشد که سه کمیت واقعی Z_a، Z_b و Z_c را از قبل به هم وابسته کرده است مثل حالتی که در دستکش های چپ و راست داشتیم. برای فهم عمیق تر این مسئله و نوع همبستگی ای که بین این سه ذره وجود دارد، فرض کنید که این سه نفر اندازه گیری های خود را در پایه دیگری انجام دهند. فرض کنید که دو نفر اول اندازه گیری خود را در راستای Y و نفر سوم در راستای X انجام دهند. برای تعیین نتایج اندازه گیری ها می بایست حالتِ $|GHZ\rangle$ ددر پایه مناسبی بسط دهیم. برای این کار از روابط آشنای زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} |z+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x+\rangle + |x-\rangle) \qquad & |z-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x+\rangle - |x-\rangle) \\ |z+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|y+\rangle + |y-\rangle) \qquad & |z-\rangle &= \frac{-i}{\sqrt{2}}(|y+\rangle - |y-\rangle. \end{aligned} \tag{۶۴}$$

با استفاده از روابط بالا می توان براحتی نشان داد که حالت $|GHZ\rangle$ بسط زیر را دارد:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}\left(|y+,y+,x-\rangle + |y+,y-,x+\rangle + |y-,y+,x+\rangle + |y-,y-,x-\rangle\right) \tag{۶۵}$$

دقت کنید که حاصل اندازه گیری این سه نفر در مورد مولفه های اسپین دارای یک خصلت ویژه است و آن اینکه حاصل ضرب مولفه های سه ذره در راستای مربوطه برابر است با -1 . به عبارت دیگر داریم

$$Y_aY_bX_c = -1. \tag{۶۶}$$

یعنی مقادیر این کمیت های واقعی فیزیکی آنچنان است که حاصل ضربِ $Y_aY_bX_c$ همواره برابر با -1 است. اگر این سه نفر اندازه گیرهای خود را در راستاهای YXY یا XYY انجام می دادند و نتایجی مشابه بدست می آوردند که برای راحتی همه آنها را در رابطه‌ی زیر جمع می کنیم:

$$\begin{aligned} Y_aY_bX_c &= -1, \\ Y_aX_bY_c &= -1, \\ X_aY_bY_c &= -1. \end{aligned} \tag{۶۷}$$

اما ضرب این تساوی ها در هم به نتیجه زیر منجر می شود که

$$X_aX_bX_c = -1, \tag{۶۸}$$

که معنایش این است که سه خصلت X_a و X_b و X_c برای این سه ذره چنان هستند که حاصل ضرب آنها برابر با -1 است. اما اگر این حالت را در پایه‌ی XXX بسط دهیم نتیجه خلاف این خواهد بود. در واقع بسط حالت $|GHZ\rangle$ دراین پایه چنین است:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}\left(|x+,x+,x+\rangle + |x+,x-,x-\rangle + |x-,x+,x-\rangle + |x-,x-,x+\rangle\right). \tag{۶۹}$$

این بسط به این معناست که هرگاه روی سه ذره اندازه گیری های در پایه های فوق انجام دهیم همواره مقادیری که بدست می آوریم در رابطه $X_aX_bX_c = 1$ صدق می کند که آشکارا مخالف رابطه‌ی 68 است. بنابراین حالت های $|GHZ\rangle$ بدون نیاز به متوسط گیری روی تعداد زیادی اندازه گیری ها فرض وجود متغیرهای پنهان موضعی را نقض می کنند. اخیراً آزمایشهایی گزارش شده‌است که در آنها روی حالت های GHZ اندازه گیری های فوق انجام شده اند و نتایج بدست آمده در توافق با مکانیک کوانتومی و ناقض متغیرهای پنهان هستند.

۱.۴ حالت های GHZ و نا موضعیت

حالت های GHZ به شکل مستقیم تری خاصیت ناموضعی طبیعت را آشکار می کنند. این حالت ها در آزمایشگاه قابل تولید هستند و نتایج ناشی از آنها با آزمایش سازگار هستند. به همین دلیل می گوییم این حالت ها خاصیت ناموضعی طبیعت یا جهان بیرونی را و نه خاصیت غیرموضعی یک نظریه مثل مکانیک کوانتومی را آشکار می کنند. برای فهم این خاصیت بازهم یک بازی ساده را در نظر می گیریم. در این بازی که در شکل ۱.۴ نشان داده شده است، پیام سه عدد x ، y و z را به سه نفر به نام های آرزو، بابک و حمید ارسال می کند. این سه عدد مقدارهای 0 و 1 را اختیار می کنند. آرزو ، بابک و حمید می بایست به ترتیب اعداد a ، b و c را به پیام ارسال کنند. قواعد بازی این ها هستند:

یک ـ اعدادی که پیام ارسال می کند در شرط زیر صدق می کنند:

$$x \oplus y \oplus z = 0, \tag{۷۰}$$

بنابراین این اعداد فقط می توانند یکی از مجموعه های زیر باشند:

$$(x,\ y,\ z) \in \{(0\,0\,0),\ (0\,1\,1),\ (1\,0\,1),\ (1\,1\,0)\} \tag{۷۱}$$

دو ـ آرزو، بابک و حمید می توانند قبل از شروع بازی هر نوع استراتژی که می خواهند برای خود انتخاب کنند ولی در هنگام بازی این سه نفر هیچ نوع ارتباط علی با هم ندارند به این معنا که نمی توانند از بیت هایی که دریافت می کنند و یا بیت هایی که به پیام ارسال می کنند اطلاع

حاصل کنند. هرکسی فقط بیتی را که خودش از پیام دریافت کرده و بیتی را که خودش به پیام می فرستد می شناسد. هم چنین هیچ گونه امکان تبادل نظر بین آنها وجود ندارد. به عبارت بهتر هرکدام از این سه نفر یک مهلت برای ارسال بیت خود دارد و این مهلت چنان تنظیم شده است که امکان هیچ گونه ارتباط بین گیرندگان وجود نداشته باشد.

سه ـ هر دور بازی وقتی برده می شود که شرط زیر برقرار شود:

$$a \oplus b \oplus c = x \vee y \vee z, \tag{۷۲}$$

که در آن $\vee$ به معنای یای منطقی بین این سه بیت است.

سوال این است که آیا آرزو ، بابک و حمید می توانند یک استراتژی انتخاب کنند که همواره بازی فوق را ببرند؟ پاسخ این سوال منفی است. برای فهم این پاسخ بیت های ارسال شده توسط آروز را با a_0 و a_1 نشان می دهیم که در آن a_0 بیتی است که آرزو ارسال می کند وقتی که بیت 0 را دریافت کرده باشد (یعنی $x = 0$ باشد) و a_1 بیتی است که آرزو ارسال می کند وقتی که بیت 1 را دریافت کرده باشد (یعنی $x = 1$ باشد). همینطور بیت های b_0 ، b_1 ، c_0 و c_1 را تعریف می کنیم. در این صورت شرط این که تحت هر شرایطی (به ازای هر نوع بیت های دریافتی از طرف پیام) این سه نفر بازی را ببرند این است که هر چهار رابطه زیر همزمان برقرار باشند:

$$\begin{aligned} a_0 \oplus b_0 \oplus c_0 &= 0, \\ a_0 \oplus b_1 \oplus c_1 &= 1, \\ a_1 \oplus b_0 \oplus c_1 &= 1, \\ a_1 \oplus b_1 \oplus c_0 &= 1. \end{aligned} \tag{۷۳}$$

اما واضح است که هرچهار معادله را همزمان نمی توان برقرار کرد زیرا جمع طرف چپ برابر است با 0 و حال آنکه جمع طرف راست برابر است با 1. بهترین کاری که این سه نفر می توانند انجام بدهند این است که قبل از بازی تصمیم بگیرند که یکی از این معادله ها را نقض و سه دیگر را برقرار کنند و به این ترتیب در سه چهارم موارد می توانند بازی را ببرند. دقت کنید که اگر این سه نفر بتوانند با هم ارتباط علی برقرار کنند آنگاه همواره می توانند معادله ۷۲ را حل کنند و بازی را ببرند.

اما نکته شگفت انگیز این جاست که اگر این سه نفر قبل از هر دور بازی یک حالت GHZ به اشتراک گذاشته باشند و هیچ گونه ارتباط

علی نیز در حین بازی نداشته باشند می توانند همواره بازی را ببرند. می دانیم که حالت GHZ دارای یک خاصیت ناموضعی است و این خاصیت ناموضعی به هیچ وجه به معنای ارتباط علی نیست یعنی با استفاده از این حالت این اشخاص نمی توانند با هم اطلاعاتی را مخابره کنند ولی با این وجود دسترسی به این حالت منجر به این می شود که این سه نفر بتوانند بازی ای را همواره ببرند که تنها با داشتن ارتباط علی قابل حصول است. این استراتژی که در آن از یک منبع کوانتومی مثل درهم تنیدگی استفاده می شود یک استراتژی کوانتومی است. به این منظور این سه نفر یک حالت درهم تنیده به این شکل به اشتراک می گذارند:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|y_+,y_+,y_+\rangle + |y_-,y_-,y_-\rangle), \qquad (۷۴)$$

که در آن کیوبیت اول ، دوم و سوم به ترتیب در اختیار آرزو، بابک و حمید است.

حال استراتژی ای که سه نفر اختیار می کنند به این نحو است که اگر هرکدام بیت 0 دریافت کرد، روی حالت فوق درپایه 0 و 1 یا پایه z اندازه گیری کرده و همان چیزی را که اندازه می گیرد به پیام می فرستد. و اگر بیت یک را دریافت کرد، آنگاه کیوبیت خود را در پایه X اندازه می گیرد و همان چیزی را که دریافت می کند به پیام می فرستد. با دنبال کردن این استراتژی می توان نشان داد که آنها همواره بازی را می برند.

- تمرین: نشان دهید که حالت فوق را اگر در پایه ZZZ بنویسید به شکل زیر در می آید:

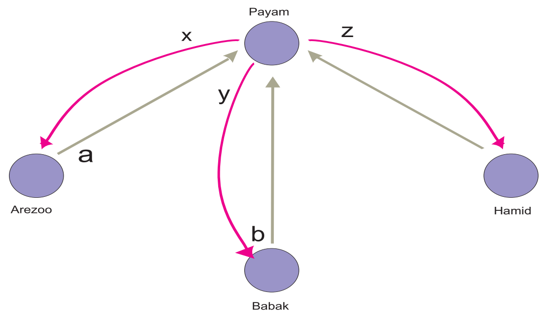
$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}(|0,0,0\rangle - |0,1,1\rangle - |1,0,1\rangle - |1,1,0\rangle). \qquad (۷۵)$$

- تمرین: نشان دهید که اگر حالت ۷۴را در پایه XXZ بنویسید به شکل زیر در می آید:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}(|\overline{1},\overline{0},0\rangle + |\overline{0},\overline{1},0\rangle + |\overline{0},\overline{0},1\rangle + |\overline{1},\overline{1},1\rangle) \qquad (۷۶)$$

که در آن منظور از $|\overline{0}\rangle$ حالت $|x_+\rangle$ و منظور از $|\overline{1}\rangle$ حالت $|x_-\rangle$ است.

حال به حالت های ۷۵ و ۷۶ نگاه می کنیم. اگر بیت های دریافتی توسط سه نفر برابر با 000 باشد هر سه نفر در پایه z اندازه گیری می کنند و بنابر رابطه ۷۵ آنچه که اندازه می گیرند و مطابق با استراتژی فوق ارسال می کنند در رابطه $a\oplus b\oplus c = 0$ صدق می کند. حال فرض کنید که



شکل ۴: بازی کوانتومی برای حالت های GHZ.

آرزو و بابک بیت 1 دریافت می کنند و حمید بیت 0 دریافت می کند. در این صورت مطابق با استراتژی فوق آنها در پایه xxz اندازه می گیرند و در نتیجه مطابق با حالت ۷۶ نتیجه اندازه گیری شان در رابطه $a \oplus b \oplus c = 1$ صدق می کند. بنابرتقارن اگر بیت هایی که در یافت می کنند به صورت 011 یا 101 نیز باشد بازهمین نتیجه حاصل می شود. بنابراین این سه نفر می توانند همواره بازی را ببرند. به این ترتیب و با استفاده از یک استراتژی کوانتومی می توانند از خاصیت ناموضعی کوانتومی استفاده کنند و بازی ای را که به جز مبادله اطلاعات کوانتومی و ارتباط علی نمی توانستند، همواره ببرند.

- تمرین: اگر حالت درهم تنیده ای که در دست بازیکنان است بجای حالت ۷۴ حالت ۶۲ باشد، تغییراتی در استراتژی بازیکنان و یا در صورت لزوم در قواعد بازی اعمال کنید تا برتری استراتژی کوانتومی به استراتژی کلاسیک نشان داده شود.

---

۵ تمرین ها:

- **قضیه بل برای بیش از دو مشاهده پذیر:** فرض کنید که آلیس مشاهده پذیرهای $A_1,\ A_3, \cdots A_{2n-1}$ و باب مشاهده پذیرهای $B_2,\ B_4, \cdots B_{2n}$ را اندازه می گیرند. مقادیر مشاهده پذیرهای A_i و B_j را با a_i و b_j نشان می دهیم. این مقادیر نیز ± 1 هستند.

الف: ثابت کنید که همواره نامساوی زیر برقراراست

$$|a_1b_2 + b_2a_3 + a_3b_4 + b_4a_5 + \cdots a_{2n-1}b_{2n} - b_{2n}a_1| \leq 2n-2, \qquad (۷۷)$$

و از آن نتیجه بگیرید که متوسط این مقادیر همواره در رابطه زیر صدق می کند:

$$|\langle a_1b_2 + b_2a_3 + a_3b_4 + b_4a_5 + \cdots a_{2n-1}b_{2n} - b_{2n}a_1|\rangle \leq 2n-2. \quad (۷۸)$$

ب: حال یک حالت درهم تنیده مثل

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+, z-\rangle - |z-, z+\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle - |1,0\rangle)$$

را در نظر بگیرید. مشاهده پذیرهای A_i و B_i را به شکل زیر تعریف کنید:

$$A_i := \mathbf{a}_i \cdot \vec{\sigma}_A, \qquad B_i := \mathbf{b}_i \cdot \vec{\sigma}_B. \quad (۷۹)$$

یعنی اینکه اندازه گیری A_i به معنی اندازه گیری اسپین ذره آلیس در راستای $\mathbf{a}_i$ و اندازه گیری B_i اندازه گیری اسپین ذره باب در راستای $\mathbf{b}_i$ است.

فرض کنید که بردارهای $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{b}_2$ ، $\mathbf{a}_3$ ، $\mathbf{b}_4$ تا $\mathbf{b}_{2n}$ به طور یکنواخت چیده شده باشند و فاصله هر دو بردار متوالی برابر با θ باشد. مقداری را که مکانیک کوانتومی برای متوسط

$$|\langle\psi|A_1B_2 + B_2A_3 + A_3B_4 + B_4A_5 + \cdots A_{2n-1}B_{2n} - B_{2n}A_1|\psi\rangle| \quad (۸۰)$$

پیش بینی می کند چقدراست؟ به ازای چه مقداری از θ این مقدار ماکزیمم می شود. این مقدار چقدر از مقداری که توسط نامساوی تعمیم یافته‌ی $CHSH$ یعنی 78 بدست آمده است بیشتر است؟

■ **حالت های GHZ و یک نامساوی بل برای آنها** حالت n تایی GHZ را در نظر بگیرید:

$$|GHZ_n\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\cdots 0\rangle + |111\cdots 1\rangle\right). \quad (۸۱)$$

الف: تحقیق کنید که این حالت ویژه بردار همزمان عملگرهای زیراست:

$$z \otimes z \otimes I \otimes I \otimes I \cdots I \otimes I$$

$$I \otimes z \otimes z \otimes I \otimes I \cdots I \otimes I$$

$$I \otimes I \otimes z \otimes z \otimes I \cdots I \otimes I$$

$$\cdots$$

$$I \otimes I \otimes I \otimes I \otimes I \cdots z \otimes z$$

$$x \otimes x \otimes x \otimes x \otimes x \cdots x \otimes x. \qquad (۸۲)$$

ب: نشان دهید که این حالت ویژه بردار عملگرِ زیراست و ویژه مقدارآن را بدست آورید:

$$A := (x+iy)^{\otimes n} + (x-iy)^{\otimes n}. \qquad (۸۳)$$

پ: اگر به متغیرهای پنهان اعتقاد داشته باشیم، باید قبول کنیم که برای یک مقدار معین از متغیرهای پنهان ، مشاهده پذیرهای x وy همزمان مقدارهای معینی دارند. اگر چنین باشد، اندازه (یا قدر مطلقِ) مشاهده پذیرهای $(x+iy)^{\otimes n}$ و $(x-iy)^{\otimes n}$ چقدراست. با توجه به این مقدارها، مشاهده پذیر A یک مقدار ماکزیمم خواهد داشت. این مقدار ماکزیمم را بدست آورید. نتیجه خود را با آنچه که در قسمت ب بدست آوردید مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می گیرید؟

■ یک راه برای آنکه نشان دهیم حالت های بل واقعاً دارای خاصیتِ غیر موضعی هستند این است که نشان دهیم با اندازه گیری های موضعی هرگز نمی توان حالت های بل را از یک دیگر تشخیص داد. صحت این موضوع را تحقیق کنید.

■ حالتِ $\rho = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که این حالت را می توان به صورت مخلوطی از دو حالت بل نیز نوشت.

تمرین: نشان دهید با عمل موضعی (اندازه گیری، تبدیل یکانی) همراه با مبادله کلاسیک اطلاعات در صورت لزوم همواره می توان یک حالت بل را به هر حالت دو کیوبیتی دلخواه دیگری تبدیل کرد.

■ تمرین: حالت زیر را که به حالت ورنر موسوم است در نظر بگیرید:

$$\rho_W = \frac{1-t}{4} I + t|\psi\rangle\langle\psi|. \qquad (۸۴)$$

که در آن $|\psi\rangle$ یکی از حالت های بل است.

الف: از ملاک پرز استفاده کنید (به ضمیمه مراجعه کنید) و تعیین کنید به ازای چه مقادیری از t این حالت یک حالت جدایی پذیراست؟

ب: حالت ρ_W را برحسب ماتریس های پاوولی و حاصل ضرب های تانسوری آنها بسط دهید.

پ: نشان دهید که عملگرهای زیر عمل گرهای تصویری هستند:

$$P_x^{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm \sigma_x), \qquad P_y^{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm \sigma_y), \qquad P_z^{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm \sigma_z). \tag{۸۵}$$

ت : به ازای مقادیری از t که حالت ورنر یک حالت جدایی پذیر است از روابطی که در قسمت (پ) پیدا کردید استفاده کنید و حالت ورنر را به صورت یک ترکیب خطی محدب از ماتریس های چگالی بنویسید. به این ترتیب به طور صریح نشان داده اید که واقعا حالت ورنر به ازای این مقادیر یک حالت جدایی پذیر است.

د : فرض کنید که پارامتر t در ناحیه زیر قرار دارد:

$$\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{7}{8\sqrt{2}-1} \tag{۸۶}$$

نشان دهید که چنین حالت هایی نامساوی بل را نقض نمی کنند. بنابراین نشان داده اید که حالت های آمیخته اگر چه درهم تنیدگی دارند ولی لزوما نامساوی بل را نقض نمی کنند.

■ تمرین: یک حالت جدایی پذیر حالتی است که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\rho_{AB} = \sum_i P_i \rho_i \otimes \sigma_i, \tag{۸۷}$$

که در آن P_i مقادیر مثبتی هستند با شرط $\sum_i P_i = 1$ و ρ_i ها و σ_i ماتریس های چگالی هستند. ثابت کنید یک حالت جدایی پذیر هرگز نامساوی بل را نقض نمی کند.

۶ ضمیمه: حالت های درهم تنیده آمیخته

حالت درهم تنیدگی خالص تعریف خیلی ساده ای دارد. اما حالت درهم تنیده آمیخته احتیاج به دقت بیشتری دارد. یک حالت ضربی به صورت زیر مشخص می شود:

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B. \tag{۸۸}$$

در چنین حالتی هیچ نوع همبستگی بین نتایج اندازه گیری های آلیس و باب وجود ندارد. یک حالت جدایی پذیر [۲۷] به حالتی گفته می شود که به شکل زیر نوشته می شود:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^{(i)} \otimes \rho_B^{(i)} \tag{۸۹}$$

که در آن p_i ها یک توزیع احتمال را تشکیل می دهند و $\rho_A^{(i)}$ ها و $\rho_B^{(i)}$ ها ماتریس چگالی هستند. برای چنین حالتی نتایج اندازه گیری های آلیس و باب همبستگی دارند ولی این همبستگی کلاسیک است یعنی اینکه توسط متغیرهای موضعی قابل توضیح هستند.

حالت درهم تنیده آمیخته حالتی است که نمی توان آن را به شکل بالا نوشت.

بر خلاف حالت های خالص تشخیص حالت های درهم تنیده آمیخته دشوار است زیرا معلوم نیست که بتوانیم براحتی تجزیه یک حالت را به صورت ۸۹ بنویسیم. در سال ۱۹۹۶ اشر پرز [۲۸] یک ملاک ساده معرفی کرد که شرط لازم برای جدایی پذیری است. برای فهم ملاک پرز به حالت ۸۹ توجه می کنیم. با توجه به ساختار خاص این حالت که از ترکیب محدب ماتریس های چگالی ساخته شده است می دانیم که اگر تنها

[۲۷] Separable State
[۲۸] Asher Peres

از یکی از قسمت های A یا B ترانهاده بگیریم، [۲۹] آنگاه حالت بدست آمده هم چنان مثبت خواهد بود . بنابراین اگر یک حالت دو بخشی داشته باشیم که ترانهاده جزئی آن مثبت نباشد آنگاه مطمئن هستیم که این حالت جدایی پذیر نیست. نشان داده شده است که برای سیستم های 2×2 بعدی و 2×3 بعدی ملاک پرز هم شرط لازم است و هم شرط کافی. در ابعاد دیگر چنین نیست.

■ تمرین: حالت

$$\rho_{AB} = (1-p)|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + p|0,0\rangle\langle 0,0| \tag{۹۰}$$

را در نظر بگیرید که در آن

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle + |1,1\rangle) \tag{۹۱}$$

. محدوده ای از p را تعیین کنید که به ازای آن حالت فوق جدایی پذیر است. برای این محدوده این حالت را به شکل ۸۹ بنویسید.

■ تمرین: حالت

$$\rho_{AB} = (1-p)|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + p|\phi^-\rangle\langle\phi^-| \tag{۹۲}$$

را در نظر بگیرید که در آن

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle \pm |1,1\rangle) \tag{۹۳}$$

. محدوده ای از p را تعیین کنید که به ازای آن حالت فوق جدایی پذیر است. برای این محدوده این حالت را به شکل ۸۹ بنویسید.

---

[۲۹] Partial Transpose