دینامیک سیستم های کوانتومی ـ نگاشت ها ی مثبت

وحیدکریمی پورـ دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

۱۹ اردیبهشت ۱۳۹۷

۱ مقدمه

می دانیم که کلی ترین توصیف حالت یک سیستم با یک ماتریس چگالی داده می شود، زیرا از یک طرف ممکن است که هنوز هیچ آزمایش مشخصی برای تهیه سیستم در یک حالت خالص انجام نداده باشیم و از طرف دیگر ممکن است که سیستم ِ درکنترل ِ ما بخشی از یک سیستم بزرگترباشد. مثلاً ممکن است که ما تنها به یک فوتون از یک زوج فوتون درهم تنیده دسترسی داشته باشیم که فوتون دوم کیلومترها دور از ماباشد. ما می توانیم بر روی سیستمی که دردست ماست انواع آزمایشها را انجام دهیم، مثلا می توانیم این سیستم را اندازه گیری کنیم، یا اینکه با ایجاد برهم کنش هایی آن را متحول کنیم، می توانیم سیستمی در کنار آن قرار داده و سپس روی هر دو سیستم اندازه گیری کنیم. این اندازه گیری ها و تحول ها می توانند موضعی یاسرتاسری باشند به این معنا که می توانند کل سیستم و یا تنها بخشی را که در دست ماست تحت تاثیر قرار دهند. نهایتاً همه این اعمال باعث می شوند که ماتریس چگالی سیستم ما یعنی ρ به یک ماتریس چگالی دیگر یعنی ρ' متحول شود. ماتریس چگالی سیستم دوم می تواند حتی مربوط به یک سیستم بزرگ تر باشد.

سوالی که در این درس به آن خواهیم پرداخت این است که ماتریس ρ' چه ربطی به ماتریس ِ ρ دارد و خواص نگاشتی که این دو را به هم ربط می دهد چیست؟ این نگاشت می بایست نشان دهنده کلی ترین عملی باشد که در چارچوب مکانیک کوانتومی بر یک ماتریس چگالی قابل تصور

است.

۲ نمادگذاری

فضای هیلبرت یک سیستم A را با H_A نمایش می دهیم. مجموعه تمام عملگرهای خطی بر روی این فضا را با $L(H_A)$ نمایش می دهیم. بنابراین $T \in L(H_A)$ به این معناست که $T : H_A \longrightarrow H_A$ یک عملگر خطی است. زیر مجموعه ای از $L(H_A)$ عبارت است از مجموعه تمام عملگرهای خطی هرمیتی و مثبت که رد آن ها برابر با یک است. این زیر مجموعه را با $D(H_A)$ نمایش می دهیم. $D(H_A)$ مجموعه تمام ماتریس های چگالی است و یک مجموعه محدب است و یک زیر فضای برداری نیست. هرگاه فضای H_A یک فضای d بعدی باشد، $L(H_A)$ یک فضای d^2 بعدی است. $D(H_A)$ یک زیر فضا نیست بلکه یک زیرمجموعه از $L(H_A)$ است که برای مشخص کردن هر نقطه از آن $d^2 - 1$ پارامتر حقیقی مورد نیاز است.

۳ نگاشت های مثبت، کاملا مثبت و کانال های کوانتومی

فرض کنید که نگاشتی که ρ را به ρ' می نگارد با $\mathcal{E}$ نشان دهیم. برای حفظ کلیت حتی می توان فرض کرد که بعدِ ρ و ρ' یکی نباشد. یعنی اینکه $\rho \in D(H_1)$ و $\rho' \in D(H_2)$. دراین صورت می نویسیم

$$\mathcal{E} : D(H_1) \longrightarrow D(H_2). \tag{۱}$$

خواصی که نگاشت خطی $\mathcal{E}$ دارد آن است که :

یک : ماتریس هرمیتی را به ماتریس هرمیتی می نگارد.

دو : ماتریس مثبت را به ماتریس مثبت می نگارد.

سه : رد ماتریس را حفظ می کند.

به چنین نگاشتی یک ابر عملگر [1] یا یک نگاشت مثبت و ردّ نگه دار $Trace\ Preserving\ Positive\ Map$ می گوییم. هم چنین به نگاشتِ $\mathcal{E}$ یک ابرعملگر[2] گفته می شود.

اما این ها تنها خواص ابر نگاشت $\mathcal{E}$ نیستند. ابرنگاشت $\mathcal{E}$ یک خاصیت مهم دیگر نیز دارد. برای فهم این خاصیت به شکل (**؟؟**) توجه می کنیم. در این شکل می بینیم که آلیس در آزمایشگاه خودش روی ذره ای که در اختیارش است عمل $\mathcal{E}$ را انجام می دهد. در خارج از آزمایشگاه آلیس هیچ اتفاقی نمی افتد. ممکن است که ذره ی در دست آلیس با ذره یا ذرات دیگری در خارج از آزمایشگاه آلیس، مثلا در درست باب، درهم تنیده باشد. سیستم آلیس را با A و سیستم باب را با B نشان می دهیم. در این صورت حالت ذراتی که در دست آلیس و باب هستند را با ρ_{AB} نشان می دهیم. عمل آلیس روی این حالت به صورت $\mathcal{E}\otimes I$ نشان داده می شود. این عمل ماتریس چگالی ρ_{AB} را به یک ماتریس چگالی دیگر تبدیل می کند. بنابراین ابرنگاشت $\mathcal{E}$ دارای این خاصیت است که گسترش آن نیز به شکل $\mathcal{E}\otimes I$ یک نگاشت مثبت است. از انجا که حالت باب و در نتیجه فضای هیلبرت سیستم او می تواند دلخواه باشد، به این نتیجه می رسیم که هر نوع گسترشی از ابر عملگر $\mathcal{E}$ (یعنی به هر بعدی)می بایست مثبت باشد. به این ترتیب به تعریف مهم زیر می رسیم:

■ تعریف: فرض کنید که $\mathcal{E}: L(V)\longrightarrow L(V)$ نگاشتی مثبت از فضای عملگرهای روی V به عملگرهای روی همان فضا باشد. دراین جا منظور از $L(V)$ فضای عملگرهای از V به V است. دراین صورت این نگاشت را کاملاً مثبت $Completely\ Positive$ می گوییم اگر به ازای هر فضای W نگاشت زیر نیز مثبت باشد:

$$\mathcal{E}\otimes I: L(V\otimes W)\longrightarrow L(V\otimes W). \tag{۲}$$

هرگاه این نگاشت رد را نیز حفظ کند آنگاه نگاشت را کاملا مثبت و رد نگه دار [3] می نامیم.

[1] Super Operator

[2] Superoperator

[3] Completely Positive Trace-preserving map (CPT)

واضح است که این شرط یعنی مثبت بودن هر نوع گسترشی از نگاشت $\mathcal{E}$ یک شرط کاملا غیر بدیهی است. بنابراین بسیاری از نگاشت های مثبت ممکن است کاملا مثبت نباشند. بهتراست مثالی از یک نگاشت مثبت ولی نه کاملاً مثبت ارایه دهیم تا معلوم شود که همه نگاشت های مثبت کاملاً مثبت نیستند. این مثال چیزی نیست جز عملگری که یک ماتریس را به ترانهاده آن می نگارد.

- **مثالی از یک عملگر مثبت که کاملاً مثبت نیست.** نگاشت ترانهاده را در نظر بگیرید که به صورت زیر عمل می کند:

$$\mathcal{E}:\rho\longrightarrow\rho^T \qquad (۳)$$

حال گسترش این نگاشت به طریقی که در شرط 2 آمده است به صورت زیر خواهد بود که درآن یک از این حقیقت استفاده کرده ایم که یک ماتریس دلخواهِ ρ را همواره می توان به صورت $\rho=\sum_i a_i\otimes b_i$ تجزیه کرد:

$$(\mathcal{E}\otimes I)(\rho)=(\mathcal{E}\otimes I)(\sum a_i\otimes b_i)=\sum a_i^T\otimes b_i=\rho^{T_A}. \qquad (۴)$$

این عملگر در واقع عناصر اول را در ضرب تانسوری ترانهاده می کند و عناصر دوم را دست نخورده باقی می گذارد. به همین دلیل آن را با نماد $\rho\longrightarrow\rho^{T_A}$ نمایش می دهیم. تعریف مشابهی برای $\rho\longrightarrow\rho^{T_B}$ وجود دارد. (دراین جا فرض کرده ایم که فضای برداری V و W به ترتیب فضاهای برداری سیستم های A و B هستند.) اثر ترانهاده جزیی به شکل صریح عبارت است از:

$$(\rho^{T_A})_{i\mu,j\nu}=(\rho)_{j\mu,i\nu},\qquad (\rho^{T_B})_{i\mu,j\nu}=(\rho)_{i\nu,j\mu}. \qquad (۵)$$

به عنوان مثال صریح تر اگر ρ به شکل ماتریس زیر باشد:

$$\rho=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ i & j & k & l\\ m & n & o & p\end{pmatrix} \qquad (۶)$$

آنگاه ماتریس های ρ^{T_A} و ρ^{T_B} به ترتیب عبارتند از:

$$\rho^{T_A} = \begin{pmatrix} a & b & i & j \\ e & f & m & n \\ c & d & k & l \\ g & h & o & p \end{pmatrix}, \tag{۷}$$

و

$$\rho^{T_B} = \begin{pmatrix} a & e & c & g \\ b & f & d & h \\ i & m & k & o \\ j & n & l & p \end{pmatrix}. \tag{۸}$$

حال دقت می کنیم که نگاشت ترانهاده واقعا یک نگاشت خطی و مثبت است زیرا ویژه مقادیر یک ماتریس را تغییر نمی دهد. اما توسعه این عملگر و تعریف ترانهاده جزیی یک عملگر مثبت نخواهد بود. برای مثال ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & x & y & \\ & y & x & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{۹}$$

ویژه مقادیر این ماتریس عبارتند از $1,\ 1,\ x+y,\ x-y$ که هرگاه $x > y > 0$ باشد همگی مثبت خواهند بود. اما اگر ترانهاده جزیی این ماتریس را حساب کنیم بدست می آوریم:

$$\rho^{T_A} = \begin{pmatrix} 1 & & & y \\ & x & & \\ & & x & \\ y & & & 1 \end{pmatrix} \tag{۱۰}$$

که ویژه مقادیرش عبارتند از $x,\ x,\ 1+y,\ 1-y$ که اگر $y > 1$ باشد می تواند مقدار منفی داشته باشد. با این مثال نشان داده‌ایم که

نگاشت ترانهاده یک نگاشت خطی مثبت است ولی کاملاً مثبت نیست.

■ تمرین: نشان دهید که هرگاه $X \in L(H_A \otimes H_B)$ یک ماتریس به شکل بلوکی زیر باشد:

$$X = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \tag{۱۱}$$

انگاه داریم:

$$X^{T_A} = \begin{pmatrix} X^T & Q^T \\ R^T & S^T \end{pmatrix}, \qquad X^{T_B} = \begin{pmatrix} X & R \\ Q & S \end{pmatrix}. \tag{۱۲}$$

دقت کنید که اگرچه انگیزش تعریف نگاشت های کاملا مثبت و رد نگاه دار مربوط به حفظ شدن خواص فیزیکی ماتریس چگالی است اما به طور کلی این نوع نگاشت ها را می توان روی کل فضای تبدیلات خطی تعریف کرد. بنابراین یک بار دیگر این نگاشت ها را به صورت جامع تری تعریف می کنیم:

■ تعریف: یک نگاشت خطی $\mathcal{E} : L(H_A) \longrightarrow L(H_B)$ یک نگاشت کاملا مثبت رد نگه دار خوانده می شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}(X^\dagger) = (\mathcal{E}(X))^\dagger \\ &tr\left(\mathcal{E}(X)\right) = tr(X) \\ &\forall\ H_C, \quad \mathcal{E} \otimes id : L(H_A \otimes H_C) \longrightarrow L(H_B \otimes H_C) \geq 0. \end{aligned} \tag{۱۳}$$

به این نکته می بایست توجه کرد که

$$L(H_A \otimes H_C) = L(H_A) \otimes L(H_C). \tag{۱۴}$$

دقت کنید که شرط آخر به عنوان یک حالت خاص مثبت بودن خود نگاشت $\mathcal{E}$ را در بر دارد زیرا می توان H_C را برابر با فضای یک بعدی اعداد مختلط گرفت و از تساوی $V \otimes C \equiv V$ برای هر فضای برداری مختلط V استفاده کرد.

چگونه می توان نگاشت های CPT را شناسایی کرد؟ فرم کلی این نگاشت ها چگونه است؟ قضیه زیر پاسخی به این سوال است که در پایان این درس اثبات آن را بررسی می کنیم:

■ قضیه کراوس [۴] : هر نگاشت CPT به فرم زیر است:

$$\mathcal{E}(X) = \sum_m A_m X A_m^\dagger, \tag{۱۵}$$

که درآن

$$\sum_m A_m^\dagger A_m = I. \tag{۱۶}$$

نگاشت های CPT را اصطلاحات کانال های کوانتومی [۵] می گوییم.

■ تمرین: نشان دهید که هر نگاشتی که به صورت ۱۵ باشد، حتما یک نگاشت CPT است.

وقتی که نگاشت کاملا مثبت را روی یک ماتریس چگالی مثل ρ و به شکل بالا می نویسیم تعبیر فیزیکی خیلی روشنی پیدا می کند. برای فهم این تعبیر دقت می کنیم که هرکدام از عناصر $A_m\rho A_m^\dagger$ یک ماتریس چگالی نیست زیرا اگر چه مثبت و هرمیتی است ولی رد آن یک نیست. ولی می توانیم رابطه ۱۵ را به شکل زیر بنویسیم:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_m tr(A_m\rho A_m^\dagger)\frac{A_m X A_m^\dagger}{tr(A_m\rho A_m^\dagger)} \equiv \sum_m P_m \rho_m, \tag{۱۷}$$

که در آن

$$P_m \equiv tr(A_m\rho A_m^\dagger) \tag{۱۸}$$

ها احتمال و

$$\rho_m = \frac{A_m X A_m^\dagger}{tr(A_m\rho A_m^\dagger)} \tag{۱۹}$$

---

[۴] Kraus

[۵] Quantum Channel

شکل ۱: تمام اعمالی که آلیس روی سیستم خود انجام می دهد با یک نگاشت مثبت قابل بیان هستند.

ها ماتریس های چگالی هستند. در نتیجه می توان اثر یک نگاشت مثبت را به این صورت تعبیرکرد که حالت ρ تحت اثر این نگاشت به مخلوطی از حالت های چگالی هرکدام با احتمالات معین تبدیل می شود. می توانیم بگوییم که حالت ρ هنگام عبور از کانال با احتمال P_m دچار خطای A_m شده است و چون که نمی دانیم کدام خطا دقیقا رخ داده است حالت نهایی مخلوطی از تمام حالت های محتمل است.

- یک نکته در مورد نامگذاری: کانال کوانتومی یک نام کلی است که الزاما به ارسال یک حالت کوانتومی از جایی به جای دیگر اشاره نمی کند. کانال کوانتومی برای بیان هر نوع تغییر در حالت از جمله تحولات زمانی یا اندازه گیری نیز استفاده می شود.

۱.۳ ترکیب نگاشت های مثبت

ترکیب نگاشت های مثبت: فرض کنید که $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ دو نگاشت مثبت باشند. دراین صورت واضح است که ترکیب این دو نگاشت یعنی $\mathcal{E}\circ\mathcal{F}$ که به صورت زیر عمل می کند،

$$(\mathcal{E}\circ\mathcal{F})(\rho)=\mathcal{E}(\mathcal{F}(\rho)) \quad (۲۰)$$

نیز یک نگاشت مثبت است، زیرا همه خواص گفته شده برای یک نگاشت مثبت را در خود دارد. هم چنین واضح است که جمع محدب دو نگاشت مثبت بازهم مثبت است یعنی به ازای هر $0\le\lambda\le 1$ نگاشت زیر یک نگاشت مثبت است:

$$\mathcal{S}_\lambda(\rho)=\lambda\mathcal{E}(\rho)+(1-\lambda)\mathcal{F}(\rho). \quad (۲۱)$$

البته در حالت اخیر لازم است که دامنه و بردِ نگاشت های $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ یکی باشند.

■ تمرین: فرض کنید که نگاشت $\mathcal{E}$ دارای عناصر کراوس $\{A_\mu\}$ و نگاشت $\{\mathcal{F}\}$ دارای عناصر کراوس $\{B_\nu\}$ باشد. در این صورت عناصر کراوس نگاشت های فوق را پیدا کنید.

۴ مدل های کلی از نگاشت های کاملا مثبت

۱.۴ اندازه گیری به عنوان یک نگاشت کاملا مثبت

یک نمونه از نگاشت های مثبت اندازه گیری است که همانطور که دیده ایم به صورت زیر عمل می کند:

$$\rho \longrightarrow \mathcal{E}(\rho) = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger. \tag{۲۲}$$

در این نگاشت عملگرهای کراوس همان M_m ها هستند. هرگاه M_m یک عملگر از $H_W \longrightarrow H_V$ باشد، $\mathcal{E}$ یک نگاشت کاملا مثبت از $L(H_V)$ به $L(H_W)$ است.

۲.۴ رد و رد جزیی به عنوان یک نگاشت کاملا مثبت

دراین بخش نشان می دهیم که محاسبه‌ی ردّ و ردّ جزیی نیز به عنوان نگاشت های کاملا مثبت قابل درک هستند. ردّ یک ماتریسِ حالت را به صورت زیر حساب می کنیم که درآن عدد $tr(\rho)$ را با عملگر $tr(\rho)|0\rangle\langle 0|$ دریک فضای یک بعدی یکی گرفته‌ایم:

$$tr(\rho) \equiv |0\rangle\langle 0| tr(\rho) = \sum_{i=1}^N \langle i|\rho|i\rangle \equiv \sum_{i=1}^N |0\rangle\langle i|\rho|i\rangle\langle 0| = \sum_{i=1}^N E_i \rho E_i^\dagger, \tag{۲۳}$$

که نشان می دهد عملگرهای کراوس برای ردِّ جزیی عبارتند از:

$$E_i := |0\rangle\langle i|, \qquad E_i^\dagger = |i\rangle\langle 0|. \qquad (۲۴)$$

هم چنین می توان ردِّ جزیی یک عملگر را نیز به صورت یک کانال کوانتومی در نظر گرفت: داریم

$$tr_A(\rho) = \sum_{\mu=1}^{N}(I_A\otimes\langle\mu|)\rho(|I_A\otimes|\mu\rangle) \equiv \sum_{\mu=1}^{N}(I_A\otimes|0\rangle\langle\mu|)\rho(|I_A\otimes|\mu\rangle\langle 0|), \qquad (۲۵)$$

که نشان می دهد عملگرهای کراوس برای ردِّ جزیی عبارتند از:

$$E_\mu = I_A\otimes|0\rangle\langle\mu|, \qquad E_\mu^\dagger = I_A\otimes|\mu\rangle\langle 0|. \qquad (۲۶)$$

۳.۴ دینامیک سیستم های باز به عنوان یک نگاشت مثبت

در درس های مکانیک کوانتومی معمولاً گفته می شود که حالت یک سیستم کوانتومی یعنی $|\psi\rangle$ مطابق با معادله زیر در طول زمان تحول می یابد

$$\psi(t) = U(t)|\psi(0)\rangle, \qquad (۲۷)$$

که درآن $U(t)$ یک عملگر یکانی است که از روی هامیلتونی برهم کنش بدست می آید. این رابطه البته تاموقعی برقرار است که سیستم کوانتومی با یک بردار حالتِ خالص توصیف شود. در غیر این صورت یعنی وقتی که حالت سیستم خالص نیست بلکه با یک ماتریس چگالی تعریف می شود، چنانکه در مکانیک آماری نیز دیده‌ایم معمولاً گفته می شود که ماتریس چگالی مطابق با رابطه زیر متحول می شود:

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger. \qquad (۲۸)$$

این رابطه تحول زمانی ماتریس چگالی را تنها در یک حالت خاص بیان می کند و آن هنگامی است که برهم کنش بین سیستم کوانتومی و محیط آن ضعیف باشد و دراغلب موارد دیگر صحیح نیست. برای آنکه این موضوع را بخوبی دریابیم فرض کنید که در لحظه صفر، حالت سیستم که آن را با A نشان می دهیم و محیط آن که آن را با B نشان می دهیم به صورت زیر باشد:

$$\rho_{AB}(0) = \rho_A\otimes\rho_B. \qquad (۲۹)$$

حال اگر هامیلتونی سیستم و محیط به شکل زیر باشد

$$H_{AB} = H_A\otimes I_B + I_A\otimes H_B \qquad (۳۰)$$

دراین صورت عملگر تحول سیستم و محیط به شکل ساده زیر درخواهد آمد:

$$U_{AB}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{AB}t} = e^{-\frac{i}{\hbar}(H_A\otimes I_B + I_A\otimes H_B)t} = e^{-\frac{i}{\hbar}H_A t}\otimes e^{-\frac{i}{\hbar}H_B t} = U_A(t)\otimes U_B(t). \qquad (۳۱)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\rho_{AB}(t) &= U_{AB}(t)\rho_{AB}(0)U^\dagger_{AB}(t) = (U_A(t)\otimes U_B(t))\,\rho_{AB}(0)\left(U^\dagger_A(t)\otimes U^\dagger_B(t)\right)\\ &= \left(U_A(t)\rho_A(0)U^\dagger_A(t)\right)\otimes\left(U_B(t)\rho_B(0)U^\dagger_B(t)\right).\end{aligned} \qquad (۳۲)$$

درنتیجه ماتریس چگالی سیستم بعد از گذشت زمان t برابر می شود با

$$\rho_A(t) = tr_B(\rho_{AB}(t)) = U_A(t)\rho_A(0)U^\dagger_A(t). \qquad (۳۳)$$

که همان معادله 28 است. بنابراین ماتریس چگالی سیستم فقط موقعی به این صورتِ ساده تحول می یابد که برهم کنش بین سیستم و محیط برابر با صفر باشد و یااینکه فوق العاده کوچک باشد. حالت اخیر همانی است که در مکانیک آماری با آن مواجه هستیم. دراین درس می خواهیم دینامیک یک سیستم کوانتومی را برای وقتی که برهم کنش بین سیستم و محیط کوچک نیست بررسی کنیم. اهمیت این موضوع بدین سبب است که در کامپیترهای کوانتومی و به طور کلی در سیستم های کوانتومی ای که در سالها و دهه های آینده با آن سروکار خواهیم داشت، یک سیستم کوانتومی می تواند تنها از یک یا چند اتم یا یون تشکیل شده باشد و برای چنین سیستمی برهم کنش های درون سیستم به همان اندازه مهم هستند که برهم کنش های بین سیستم و محیط.

برای آنکه دینامیک کلی یک سیستم را بررسی کنیم فرض می کنیم که در لحظه صفر سیستم در یک حالت $\rho_A(0)$ و محیط در یک حالت خالص $|e\rangle$ قرار دارد. در آینده در باره میزان اعتبار این فرض ها توضیح خواهیم داد. تحت این شرایط ماتریس چگالی سیستم ومحیط در لحظه t برابر خواهد بود با

$$\rho_{AB}(t) = U(t)(\rho_A(0)\otimes|e\rangle\langle e|)U^\dagger(t), \qquad (۳۴)$$

که درآن $U(t)$ عملگر تحول سیستم ومحیط است. ماتریس چگالی سیستم با محاسبه ردّ جزیی روی محیط بدست می آید. درنتیجه بدست می آوریم

$$\rho_A(t) = tr_B(\rho_{AB}(t)) = tr_B(U(t)(\rho_A(0)\otimes|e\rangle\langle e|)U^\dagger(t)) \qquad (۳۵)$$

با کمی محاسبه می توان طرف راست را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_A(t) = \sum_m M_m \rho_A(0) M_m^\dagger, \tag{۳۶}$$

که درآن

$$M_m := \langle m|U(t)|e\rangle, \tag{۳۷}$$

و $\{|m\rangle\}$ یک پایه متعامد یکه برای محیط است. دقت کنید که M_m ها عملگرهایی هستند که روی سیستم اثر می کنند. به این ترتیب دینامیک عمومی سیستم کوانتومی بدست می آید. عملگرهای M_m عملگرهای کراوس [۶] خوانده می شوند و تعداد آنهاحداکثر برابر با بعد فضای هیلبرت محیط است. از تعریف این عملگرها یعنی رابطه 37 براحتی می توان نشان داد که دارای خاصیت زیر هستند.

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I. \tag{۳۸}$$

آیا می توان هر نوع نگاشت مثبتی را به این شکل در نظر گرفت؟ پاسخ این سوال در واقع مثبت است و محتوی قضیه ای را تشکیل می دهد که به انبساط اشتاین_اشپرینگ مشهور است .

---

۵ انبساط اشتاین_اشپرینگ

یکی از مهمترین قضایا در باره نگاشت های کاملا مثبت یا کانال های کوانتومی انبساط اشتاین اشپیرینگ [۷] نامیده می شود. برای فهم این قضیه نخست به کانال های ساده و سه گانه زیر توجه می کنیم که طی آنها یک ماتریس چگالی $\rho \in D(H_A)$ می تواند به روش های زیر تغییر کند:

یک ـ (انبساط یا توسعه) به این معنا که ماتریس چگالی به شکل زیر و با قرار گرفتن در کنار یک ماتریس چگالی دیگر توسعه یابد:

$$\rho \longrightarrow \rho \otimes \sigma,$$

که در آن $\sigma \in D(H_B)$ یک ماتریس چگالی دلخواه است.

[۶] Kraus Operators

[۷] Steinspring Dilation

دو_ (تحول یکانی) به همان معنای متداول یعنی اینکه

$$\rho \longrightarrow U\rho U^\dagger.$$

و بالاخره

سه: (رد جزئی) به این معنا که :

$$\rho \longrightarrow tr_A(\rho)$$

که در آن روی قسمتی از یک ماتریس چگالی رد گرفته و یک ماتریس چگالی در یک فضای کوچک تر بدست آورده ایم.

قضیه اشتاین اشپرینگ بیان می کند که هر نگاشت کاملا مثبت را می توان به صورت ترکیبی از این سه نگاشت مثبت در نظر گرفت. به این معنا که به ازای هر نگاشت کاملا مثبت $\mathcal{E}\ :\ D(H_A) \longrightarrow D(H_A)$ حتما یک فضای برداری $\mathcal{K}$ ، یک حالت مشخص مثل $\sigma \in D(K)$ و (که نباید با ماتریس پاوولی اشتباه گرفته شود) و هم چنین یک ماتریس یکانی $U : H_A\otimes K \longrightarrow H_A\otimes K$ وجود دارد به قسمی که

$$\mathcal{E}(\rho) = tr_{\mathcal{K}}\left[U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger\right]. \tag{۳۹}$$

این قضیه هم چنین بیان می کند که بعد فضای K را می توان به d^2 تقلیل داد که در آن d بعد فضای H_A است.

به این ترتیب می بینیم که مدل تحول سیستم باز در واقع می تواند هر نوع نگاشت کاملا مثبت را در بر گیرد.

■ تمرین: کانال بیت_برگردان را در نظر بگیرید. این کانال به صورت

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p\ X\rho X$$

تعریف می شود. انبساط اشتاین اشپرینگ را برای این کانال پیدا کنید. (راهنمایی: سیستم K را می توانید دو بعدی در نظر بگیرید و حالت σ را نیز برابر با یک حالت خالص مثلا $|0\rangle\langle 0|$ انتخاب کنید.

■ تمرین: مسئله قبلی را برای کانال فاز برگردان انجام دهید. همان راهنمایی در این جا نیز مفید است.

■ تمرین: تمرین قبلی را برای کانال واقطبش انجام دهید. در اینجا می بایست فضای K را چهار بعدی انتخاب کنید. راهنمایی: شاید بهتر باشد که حالت σ را برابر با یک حالت کاملا آمیخته انتخاب کنید.

۶ مثال های خاص از نگاشت های کاملا مثبت

در این بخش بعضی کانال های خاص را که از نظر کاربردی اهمیت بسیار دارند بررسی می کنیم. به همین دلیل عمده توجه ما در این بخش متوجه کانال هایی است که بر روی کیوبیت ها اثر می کنند، اگر چه در بعضی موارد تعمیم این نوع کانال ها را به ابعاد دیگر نیز بررسی می کنیم.

۱.۶ کانال بیت ـ برگردان

دراین کانال با احتمال $1-p$ حالتِ یک کیوبیت تغییر نمی کند و با احتمال p عملگر $X\equiv \sigma_x$ روی آن اثر می کند و بیت را برمی گرداند . یادآوری می کنیم که اثر عملگر پاوولی X روی یک کیوبیت چنین است: $X(a|0\rangle+b|1\rangle=a|1\rangle+b|0\rangle)$. بنابراین اثر این کانال با نگاشت زیر تعریف می شود.

$$\mathcal{E}(\rho)=(1-p)\rho+pX\rho X \qquad (۴۰)$$

عملگرهای کراوس عبارتند از:

$$M_0:=\sqrt{1-p}I,\qquad M_1:=\sqrt{p}X. \qquad (۴۱)$$

براحتی معلوم می شود که این کانال یک حالت که با بردارِ $\mathbf{r}=(x,y,z)$ در کره بلوخ مشخص می شود را به حالتی دیگر با بردارِ $\mathbf{r}'$ می نگارد. یعنی

$$\mathcal{E}:(x,y,z)\longrightarrow(x,(1-2p)y,(1-2p)z). \qquad (۴۲)$$

بنابراین کانال بیت برگردان کره بلوخ را درامتداد صفحه عمود بر محور x به طور یکسان فشرده می کند. هرگاه $p = \frac{1}{2}$ باشد، کره بلوخ کاملاً تبدیل به یک پاره خط در امتداد محور x می شود و تمامی اطلاعات در جهات دیگر از بین می رود.

- تمرین: دو کانال بیت برگردان با پارامترهای p و q یکی پس از دیگری روی یک کیوبیت اثر می کنند. کانال نهایی از چه نوعی است؟

- تمرین: یک تار نوری که برای انتقال فوتون ها به کار می رود قطبش فوتون ها را با احتمال p کاملا عوض می کند (از حالت عمودی به افقی در می آورد و بالعکس) و با احتمال $1-p$ قطبش را عوض نمی کند. در آزمایشگاه روی یک متر از این تار نوری آزمایش می کنیم و متوجه می شویم که برای یک متر احتمال p برابر است با 0.001. هرگاه یک کیلومتر از این تار نوری داشته باشیم احتمال تعویض قطبش برای آن چقدر است؟ در باره معنای پاسخ خود می بایست دقت کنید زیرا یک کانال بیت برگردان که با احتمال ۱ بیت ها را برگرداند به اندازه کانالی که اصلا خطا ایجاد نمی کند می تواند مفید باشد ، زیرا در خروجی تمام بیت های دریافتی را برمی گردانیم تا بیت های ارسال شده بدست آید.

۲.۶ کانال فاز ـ برگردان

دراین کانال بجای خطای برگرداندن بیت، خطای تغییر فاز رخ می دهد به این معنا که با احتمالِ p عملگرِ $Z \equiv \sigma_z$ روی کیوبیت اثر می کند. درنتیجه اثر کانال با نگاشت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + pZ\rho Z \qquad (۴۳)$$

عملگرهای کراوس عبارتند از:

$$M_0 := \sqrt{1-p}I, \qquad M_1 := \sqrt{p}Z. \qquad (۴۴)$$

$$\mathcal{E} : (x, y, z) \longrightarrow ((1-2p)x, (1-2p)y, z). \qquad (۴۵)$$

۳.۶ کانال واقطبش

در این کانال با احتمال $1-p$ حالت اولیه سالم به مقصد می رسد و با احتمالِ p تمام اطلاعات آن از بین می رود و به یک حالتِ کاملاً مخلوط تبدیل می شود. بنابراین اثر کانال به صورت زیراست:

$$\mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p\frac{I}{2} \tag{۴۶}$$

این کانال به صورت زیر روی کره بلوخ اثر می کند:

$$\mathcal{E} : \mathbf{r} \longrightarrow (1-p)\mathbf{r}. \tag{۴۷}$$

یعنی کانال واقطبش کره بلوخ را به صورت همسانگرد منقبض می کند. برای پیدا کردن عملگرهای کراوس از اتحاد زیر که خواننده خود می تواند براحتی آن را ثابت کند، استفاده می کنیم:

$$\rho + X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z = 2I \qquad \forall\rho \tag{۴۸}$$

باجایگذاری این رابطه در 46 به رابطه زیر می رسیم:

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1-3p}{4}\rho + \frac{p}{4}X\rho X + \frac{p}{4}Y\rho Y + \frac{p}{4}Z\rho Z. \tag{۴۹}$$

بنابراین عملگرهای کراوس عبارتند از:

$$M_0 := \sqrt{\frac{1-3p}{4}}I, \qquad M_1 := \sqrt{\frac{p}{4}}X \qquad M_2 := \sqrt{\frac{p}{4}}Y, \qquad M_3 := \sqrt{\frac{p}{4}}Z. \tag{۵۰}$$

بنابراین در کانال واقطبش هر سه خطای X, Y, Z با احتمال یکسان عمل می کنند. سه کانال گفته شده در بالا حالت های خاصی از کانال پاوولی هستند که در آن خطاهای گفته شده می توانند با احتمالات متفاوت رخ دهند.

■ تمرین: یک تار نوری که برای انتقال فوتون ها به کار می رود قطبش فوتون ها را با احتمال $1-p$ عوض نمی کند و با احتمال p کاملا قطبش را از بین می برد. در آزمایشگاه روی یک متر از این تار نوری آزمایش می کنیم و متوجه می شویم که برای یک متر احتمال p برابر است با 0.001. هرگاه یک کیلومتر از این تار نوری داشته باشیم احتمال از بین بردن قطبش برای آن چقدر است؟

۴.۶ کانال میراکننده دامنه

فرض کنید که می خواهیم فوتون هایی تک رنگ را از یک نقطه به یک نقطه دیگر از طریق یک فیبر نوری یا هوا بفرستیم. حالت ورودی یا حالت سیستم برابر است با:

$$|\psi_A\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |n\rangle. \tag{۵۱}$$

دراین رابطه $|n\rangle$ نشان دهنده حالتی است که دقیقاً دارای n فوتون و $|0\rangle$ نشان دهنده خلأ است. دربین راه ممکن است این فوتون ها جذب محیط شده واز سیستم خارج شوند. کانال میراکننده دامنه کانالی است که چنین تحولی را نشان می دهد. برای سادگی حالت سیستم و محیط را در ابتدا به صورت زیر درنظرمی گیریم:

$$|\psi\rangle_A = a|0\rangle + b|1\rangle, \qquad |\psi\rangle_B = |0\rangle. \tag{۵۲}$$

بنابراین حالت سیستم بعلاوه محیط برابر خواهد بود با:

$$|\psi\rangle_{A,B} = a|0,0\rangle + b|1,0\rangle. \tag{۵۳}$$

حال فرض کنید که عملگر یکانی زیر روی سیستم و محیط اثر کند:

$$\begin{aligned} |0,0\rangle &\longrightarrow |0,0\rangle \\ |0,1\rangle &\longrightarrow \cos\theta|0,1\rangle - \sin\theta|1,0\rangle \\ |1,0\rangle &\longrightarrow \sin\theta|0,1\rangle + \cos\theta|1,0\rangle \\ |1,1\rangle &\longrightarrow |1,1\rangle \end{aligned} \tag{۵۴}$$

درنتیجه‌ی اثر این عملگر حالت نهایی سیستم و محیط عبارت خواهد بود از:

$$|\psi'\rangle_{A,B} = a|0,0\rangle + b\sin\theta|0,1\rangle + b\cos\theta|1,0\rangle. \tag{۵۵}$$

دقت کنید که شکل صریح حالت اولیه عبارت است از:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} \\ b\bar{a} & b\bar{b} \end{pmatrix} \tag{۵۶}$$

و شکل صریح حالت نهایی برابر است با:

$$\rho'_s = tr_e(|\psi'\rangle_{s,e}\langle\psi'|) = \begin{pmatrix} a\bar{a} + b\bar{b}\sin^2\theta & a\bar{b}\cos\theta \\ b\bar{a}\cos\theta & b\bar{b}\cos^2\theta \end{pmatrix} \quad (۵۷)$$

با مقایسه این دو ماتریس و کمی محاسبه می توان عملگرهای کراوس برای این کانال را بدست آورد.

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (۵۸)$$

ازآنجا که دراین کانال فوتون های سیستم جذب محیط می شوند و شدت نور ورودی کاهش می یابد به آن نام کانال میراکننده دامنه داده شده است.

۵.۶ کانال میراکننده دامنه در دمای غیر صفر

در مثال قبلی فرض کردیم که محیط در دمای صفرباشد و به همین دلیل هیچ فوتونی نداشته باشد. هرگاه محیط در دمای غیر صفر باشد حالت آن مخلوطی از حالت های $|0\rangle\langle 0|$ و $|1\rangle\langle 1|$ است که نسبت این دو حالت را در مخلوط، دما تعیین می کند. بنابراین فرض کنید که حالت اولیه محیط برابرباشد با:

$$\rho_e = (1-p)|0\rangle\langle 0| + p|1\rangle\langle 1|. \quad (۵۹)$$

دراین صورت براحتی می توان نشان داد که تحت تاثیر همان عملگریکانیِ مثال قبل ماتریس چگالی سیستم دچار تحول زیر می شود:

$$\rho = E_0\rho E_0^\dagger + E_1\rho E_1^\dagger + E_2\rho E_2^\dagger + E_3\rho E_3^\dagger. \quad (۶۰)$$

که درآن عملگرهای کراوس عبارتند از:

$$E_0 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad E_1 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_4 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (۶۱)$$

به این کانال، گاهی اوقات کانال تعمیم یافته میراکننده دامنه *Generalized Amplitude Damping Channel* نیز می گویند.

۶.۶ کانال میراکننده فاز

حالتِ $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ را در نظر بگیرید. این حالت ترکیب خطی دو حالتِ پایه $\langle 0|$ و $\langle 1|$ بایک فازِ نسبی مشخص است. باورود به این کانال فاز نسبی این دو حالت بتدریج از بین می رود و حالت خروجی یک حالت مخلوط است. برای مدل سازی چنین کانالی فرض می کنیم که عملگری مثل $R_z(\theta)$ که روی حالت های ورودی $\langle 0|$ و $\langle 1|$ اختلاف فازِ θ ایجاد می کند به طور نامنظم و بایک تابع توزیع گاووسی روی حالت اثر کند. درنتیجه عمل این کانال به شرح زیراست:

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int R_z(\theta)|\psi\rangle\langle\psi|R_z^{\dagger}(\theta)e^{-\frac{\theta^2}{4\lambda}}d\theta. \qquad (۶۲)$$

ماتریس چگالی حالت ورودی که یک ماتریس چگالی خالص است به شکل زیراست:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} \\ b\bar{a} & b\bar{b} \end{pmatrix} \qquad (۶۳)$$

داریم

$$R_z(\theta)\rho R_z^{\dagger}(\theta) = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{i\theta} \\ b\bar{a}e^{-i\theta} & b\bar{b} \end{pmatrix} \qquad (۶۴)$$

بامحاسبه انتگرال بدست می آوریم

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{i\theta} \\ b\bar{a}e^{-i\theta} & b\bar{b} \end{pmatrix} e^{-\frac{\theta^2}{4\lambda}}d\theta \\ &= \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{-\lambda} \\ b\bar{a}e^{-\lambda} & b\bar{b} \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (۶۵)$$

که نشان می دهد جملات غیرقطری ماتریس چگالی با پارامترِ $e^{-\lambda}$ دچار میرایی می شوند.

۷.۶ کلی ترین ابر عملگری که بر یک کیوبیت اثر می‌کند.

دراین بخش کلی ترین نگاشت مثبت بر روی یک کیوبیت را مطالعه می کنیم. می دانیم که کلی ترین حالت یک کیوبیت به صورت زیر قابل بیان است:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \mathbf{w}\cdot\sigma) = \frac{1}{2}(I + w_1 X + w_2 Y + w_3 Z) \tag{۶۶}$$

که درآن $\mathbf{w}$ یک بردار در کره بلوخ است. نیز می دانیم که کلی ترین نگاشت مثبت روی یک کیوبیت به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_m A_m \rho A_m^\dagger, \tag{۶۷}$$

که درآن A_m ها عملگرهای دلخواهی هستند که تنها می بایست در شرط زیر صدق کنند:

$$\sum_m A_m^\dagger A_m = I. \tag{۶۸}$$

یک عملگرِ A_m به شکل زیراست:

$$A_m = a_m^0 + a_m^1 X + a_m^2 Y + a_m^3 Z, \tag{۶۹}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{2}\sum_m (a_m^0 + a_m^1 X + a_m^2 Y + a_m^3 Z)(I + w_1 X + w_2 Y + w_3 Z)(\overline{a_m^0} + \overline{a_m^1} X + \overline{a_m^2} Y + \overline{a_m^3} Z), \tag{۷۰}$$

مسلماً طرف راست یک ماتریس چگالی برای یک کیوبیت است و می توان آن را به صورت $\mathcal{E}(\rho) = \frac{1}{2}(I + \mathbf{w}'\cdot\sigma) = \frac{1}{2}(I + w_1' X + w_2' Y + w_3' Z)$ نوشت که درآن $\mathbf{w}'$ برحسب $\mathbf{w}$ و پارامترهای a_m^i بدست می آید. با استفاده از خواص ماتریس های پاوولی می توان عبارت طرف راست را ساده کرد ولی بدون انجام محاسبات نیز می توان دریافت که این رابطه به شکل زیراست:

$$\mathbf{w}' = M\mathbf{w} + \mathbf{c} \tag{۷۱}$$

که درآن M یک ماتریس مربعی سه بعدی و $\mathbf{c}$ یک بردار است. این تبدیل یک تبدیل خطی غیر همگن [۸] است. از آنجا که $\mathbf{w}$ و $\mathbf{w}'$ همواره حقیقی اند، نتیجه می گیریم که M و $\mathbf{c}$ نیز همواره حقیقی اند. برای آنکه تصویر روشن تری از تغییری که نگاشتِ $\mathcal{E}$ روی کره بلوخ بوجود می

[۸] Affine Linear Transformation

آورد پیدا کنیم، به ترتیب زیر عمل می کنیم. ماتریس ِ M را می توان به صورت $M = O\hat{M}$ تجریه قطبی کرد که درآن $\hat{M}$ یک ماتریس هرمیتی و O یک ماتریس یکانی است. با توجه به رابطه‌ی $M = O\hat{M}$، ماتریس ِ $\hat{M}$ برابر است با $\sqrt{M^TM} = \sqrt{M^\dagger M}$. بنابراین ماتریس $\hat{M}$ یک ماتریس ِ حقیقی، و متقارن است. در نتیجه ماتریس ِ O نیز حقیقی خواهد بود، زیرا هم M و هم $\hat{M}$ حقیقی هستند. پس O یک ماتریس متعامد است یعنی $OO^T = O^TO = I$. خوب حالا می توانیم ماتریس $\hat{M}$ را با یک ماتریس متعامد دیگر مثل S قطری کنیم و بنویسیم

$$M = OS^{-1}DS$$

که درآن D یک ماتریس قطری و S یک ماتریس متعامد است. درنتیجه خواهیم داشت

$$\mathbf{w}' = OS^{-1}DS\mathbf{w} + \mathbf{c}. \tag{۷۲}$$

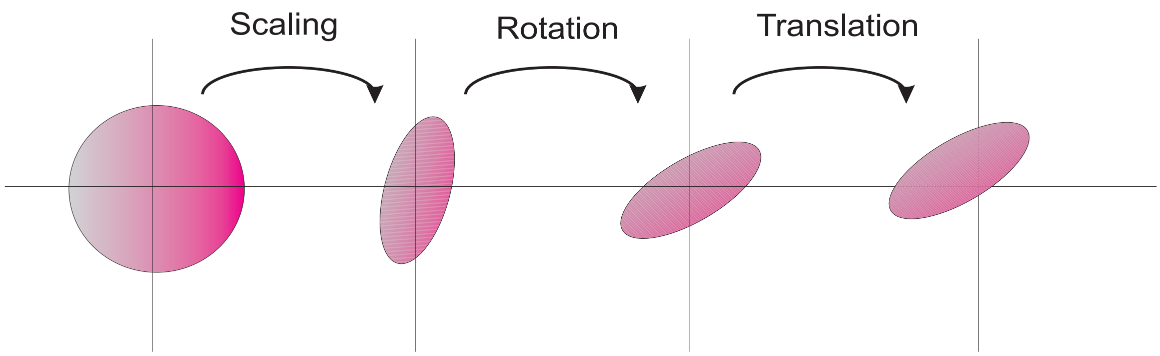
و یا با چرخش دستگاه مختصات با ماتریس ِ متعامد ِ S،

$$S\mathbf{w}' = SOS^{-1}DS\mathbf{w} + S\mathbf{c}. \tag{۷۳}$$

در دستگاه مختصات جدید خواهیم داشت

$$\hat{\mathbf{w}}' = \hat{O}D\hat{\mathbf{w}} + \hat{\mathbf{c}}. \tag{۷۴}$$

که درآن $\hat{O} = SOS^{-1}$ و $\hat{\mathbf{w}} = S\mathbf{w}$ و الی آخر. از آنجا که D یک ماتریس قطری است و $\hat{O} = SOS^{-1}$ یک ماتریس متعامد یعنی یک دوران است، تعبیر این رابطه این است که کره بلوخ در راستاهای اصلی تعیین شده توسط ماتریس ِ $\hat{M}$ (بسته به مقادیر ویژه‌ی این ماتریس) منبسط یا منقبض شده و سپس به اندازه ماتریس ِ $\hat{O}$ دوران پیدا می کند. دست آخر نیز به اندازه بردار ِ $\hat{\mathbf{c}}$ انتقال می یابد. بنابراین کاری که کلی ترین نگاشت مثبت بر روی کره‌ی بلوخ انجام می دهد، آن است که آن را در جهات معینی تغییر مقیاس می دهد، سپس حول محوری به اندازه مشخص دوران می دهد و بالاخره آن را به اندازه معینی منتقل می کند، شکل ??.



شکل ۲: کلی ترین عملی که یک نگاشت مثبت روی کره بلوخ انجام می دهد.

۷ یکسانی چوی- یامیولکوسکی و اثبات قضیه کرواس

یکی از مهمترین قضایای مربوط به نگاشت های مثبت مربوط به یکسانی چوی ـ یامیولکوسکی [۹] است. به ازای هر نگاشت مثبتِ

$$\mathcal{E} : L(H_A) \longrightarrow L(H_A)$$

(نه الزاما کاملا مثبت) می توان یک ماتریس به شکل زیر تعریف کرد:

$$R_{\mathcal{E}} := (\mathcal{E} \otimes I)|\phi\rangle\langle\phi| \qquad (۷۵)$$

که در آن $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}(\sum_i |i, \hat{i}\rangle)$ یک حالت است که در فضای $H_A \otimes H_B$ تعریف شده است. H_B یک فضای برداری با همان بعد H_A یعنی d است. بردارهای $\{|i\rangle \quad i = 1 \ldots d\}$ و $\{|\hat{i}\rangle \quad \hat{i} = 1 \ldots d\}$ پایه های متعامد و بهنجار برای فضاهای H_A و H_B هستند.

بنابراین داریم

$$R_{\mathcal{E}} = \frac{1}{d}\sum_i \mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) \otimes |\hat{i}\rangle\langle\hat{j}| \qquad (۷۶)$$

در نتیجه بدست می آوریم

$$\langle\hat{i}|R_{\mathcal{E}}|\hat{j}\rangle = \frac{1}{d}\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|). \qquad (۷۷)$$

---
[۹] Choi-Jamiolkowski

با استفاده از این رابطه می توانیم اثر کانال $\mathcal{E}$ را روی یک حالت دلخواه حساب کنیم. نخست فرض کنید که این حالت یک حالت خالص است. در این صورت داریم

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \psi_i\psi_j^*\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) = \psi_i\psi_j^*\langle\hat{i}|R_{\mathcal{E}}|\hat{j}\rangle = \langle\psi^*|R_{\mathcal{E}}|\psi^*\rangle \tag{۷۸}$$

که در آن

$$|\psi^*\rangle = \sum_i \psi^*|\hat{i}\rangle, \quad , \quad \langle\psi^*| = \sum_i \psi_i\langle\hat{i}|. \tag{۷۹}$$

بردارهایی در فضای دوم هستند.

■ تمرین: ماتریس چوی را برای کانال های بیت برگردان، و واقطبش بدست آورید و نشان دهید که این ماتریس ها مثبت هستند. هم چنین رد آنها را حساب کنید.

■ تمرین: ماتریس چوی را برای کانال های میراکننده دامنه و میراکننده فاز بدست آورید. نشان دهید که این ماتریس ها مثبت هستند . رد آنها را حساب کنید.

■ تمرین: نشان دهید که

یک ـ هرگاه نگاشت $\mathcal{E}$ یک نگاشت رد نگه دار باشد، آنگاه رد ماتریس $R_{\mathcal{E}}$ برابر با یک است.

دو ـ هرگاه نگاشت $\mathcal{E}$ یک نگاشت کاملا مثبت باشد، آنگاه ماتریس $R_{\mathcal{E}}$ یک ماتریس مثبت است.

سه ـ هرگاه نگاشت $\mathcal{E}$ یک نگاشت مثبت به معنایی که در رابطه () گفته ایم باشد، آنگاه ماتریس $R_{\mathcal{E}}$ یک ماتریس هرمیتی است.

■ تمرین : نشان دهید که هرگاه ماتریس $R_{\mathcal{E}}$ هرمیتی باشد، آنگاه نگاشت $\mathcal{E}$ دارای خاصیت زیر است:

$$\mathcal{E}(X^\dagger) = (\mathcal{E}(X))^\dagger . \tag{۸۰}$$

اکنون برای بیان و اثبات قضیه کراوس آماده‌ایم.

قضیه کراوس: فرض کنید که $\mathcal{E} : L(V_A) \to L(V_A)$ یک ابر عملگر خطی و کاملاً مثبت و ردّ نگهدار باشد. دراین صورت حتماً این عملگر را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_m A_m \rho A_m^\dagger, \tag{۸۱}$$

که درآن

$$\sum_m A_m^\dagger A_m = I$$

. بالعکس هر عملگری که مطابق با رابطه بالا تعریف شود حتماً یک عملگر خطی کاملاً مثبت و ردّ نگهداراست.

اثبات: نخست ثابت می کنیم که هر نگاشتِ به صورت 81 حتماً یک نگاشتِ کاملاً مثبت ردّ نگه دار است. مثبت بودن و ردّ نگهدار بودن این نگاشت واضح است. تنها ثابت می کنیم که این نگاشت کاملاً مثبت است. برای این کار فرض کنید که $\rho \in L(V_A) \otimes L(V_B)$ یک ماتریس چگالی باشد. دراین صورت داریم

$$(\mathcal{E} \otimes I)(\rho) = \sum_m (A_m \otimes I)\rho(A_m^\dagger \otimes I). \tag{۸۲}$$

حال یک بردار دلخواه $|v\rangle \in V_A \otimes V_B$ در نظر می گیریم و عنصر ماتریسی زیر را حساب می کنیم، بدست می آوریم

$$\langle v|(\mathcal{E} \otimes I)(\rho)|v\rangle = \sum_m \langle v|(A_m \otimes I)\rho(A_m^\dagger \otimes)|v\rangle = \sum_m \langle \psi_m|\rho|\psi_m\rangle \geq 0. \tag{۸۳}$$

که درآن بردارهای $|\psi_m\rangle$ را به صورت زیر تعریف کرده $|\psi_i\rangle = (A_m^\dagger \otimes I)|v\rangle$ و از مثبت بودن ماتریس چگالی ρ استفاده کرده ایم. حال به جهت دیگر قضیه توجه می کنیم یعنی ثابت می کنیم که هر نگاشت کاملاً مثبت ردّ نگه دار را می توان به صورتِ 81 نوشت.

برای این کار به رابطه (۷۸) توجه م یکنیم. توجه می کنیم. دیدیم که اثر چنین نگاشتی روی هر حالت خالصی به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \langle \psi^*|R_{\mathcal{E}}|\psi^*\rangle. \tag{۸۴}$$

حال دقت می کنیم که $R_{\mathcal{E}}$ از آنجا که درست مثل یک ماتریس چگالی است دارای یک تجزیه است: (البته توجه داریم که این تجزیه یکتانیست.)

$$R_{\mathcal{E}} = \sum_m |s_m\rangle\langle s_m| \quad (۸۵)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \langle\psi^*|R_{\mathcal{E}}|\psi^*\rangle = \sum_m \langle\psi^*|s_m\rangle\langle s_m|\psi^*\rangle \quad (۸۶)$$

حال عملگرهای A_m را به شکل زیر تعریف می کنیم. دقت کنید که این عملگرها خطی اند.

$$A_m|\psi\rangle := \langle\psi^*|s_m\rangle, \quad (۸۷)$$

با توجه به این رابطه بدست می آوریم

$$\mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_m A_m|\psi\rangle\langle\psi|A_m^\dagger. \quad (۸۸)$$

با توجه به این که هر ماتریس چگالی را می توان به شکل مخلوطی از حالت های خالص تجزیه کرد، خواهیم داشت:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_m A_m\rho A_m^\dagger. \quad (۸۹)$$

واین رابطه قضیه را ثابت می کند.

۱.۷ آزادی در انتخاب عملگرهای کراوس

آیا عملگرهای کراوسی که یک ابرعملگرکوانتومی را ایجاد می کنند یکتا هستند؟ پاسخ این سوال منفی است. برای درک پاسخ این سوال می توان به منشاء تعریف عملگرهای کراوس در یکی از نمونه های کانال ها که نشان دهنده دینامیک یک سیستم باز است توجه کرد. دیدیم که این عملگرها به شکل زیر تعریف می شوند:

$$E_i := \langle i|U|0\rangle \quad (۹۰)$$

که درآن $\{|i\rangle\}$ ها تشکیل یک پایه برای فضای هیلبرت محیط را می دهند که برای محاسبه‌ی ردّ روی این فضا بکار رفته اند و $|0\rangle$ حالت اولیه محیط است. از آنجا که پایه های مختلفی می توانستیم برای محاسبه رد انتخاب کنیم معلوم می شود که عملگرهای کراوس نیز یکتا نیستند. اگر یک پایه متعامد دیگر انتخاب مثل $\{|i'\rangle\}$ برای فضای هیلبرت محیط انتخاب کنیم عملگرهای کراوس عبارت خواهند شد:

$$F_i = \langle i'|U|0\rangle \quad (۹۱)$$

اما از آنجا که هردو پایه متعامد هستند خواهیم داشت

$$|i'\rangle = \sum_j S^*_{i,j}|j\rangle, \longrightarrow \langle i'| = \sum_j S_{i,j}\langle j| \tag{۹۲}$$

و درنتیجه

$$F_i = \sum_j S_{i,j}E_j. \tag{۹۳}$$

بنابراین با انتخاب پایه های متفاوت می توانیم به مجموعه های متفاوتی از عملگرهای کراوس برای بیان یک ابرعملگر کوانتومی برسیم. این مجموعه عملگرهای کراوس به صورت بالا به هم مرتبط هستند که درآن S یک عملگر یکانی است. دراین جا فرض کرده ایم که تعداد هردو مجموعه عملگرهای کراوس یکسان است که این امر را همواره می توان با اضافه کردن عملگرهای صفر به مجموعه‌ای که تعداد عناصرش کمتراست به انجام رساند. در بررسی ای که تا کنون انجام دادیم از یک مدل خاص برای کانال کوانتومی استفاده کردیم که مبتنی بر دینامیک سیستم های باز بود. در ادامه این بررسی را به صورت کلی و مجردی که از اثبات قضیه کراوس یادگرفته ایم انجام می دهیم. سوال پیش روی ما این است که آیا همه عملگرهای کراوس که یک ابر عملگرِ کوانتومی را بیان می کنند به شکل بالا به هم مرتبط هستند یا نه؟ پاسخ این سوال در قضیه زیر داده شده است.

قضیه: هردو مجموعه عملگرهای کراوس که یک ابرعملگرکوانتومی $\mathcal{E}$ را بیان کنند، با یک ماتریس یکانی مطابقِ رابطه‌ی 93 با یکدیگر مرتبط هستند.

اثبات : اگر $F_i = \sum_j S_{ij}E_j$ باجایگذاری مستقیم در رابطه های $\mathcal{E}(\rho) := \sum_i E_i\rho E_i^\dagger$ و $\mathcal{F}(\rho) := \sum_i F_i\rho F_i^\dagger$ بدست می آوریم

$$\mathcal{F}(\rho) = \mathcal{E}(\rho). \tag{۹۴}$$

بالعکس، اگر به ازای هر ρ داشته باشیم $\mathcal{E}(\rho) = \mathcal{F}(\rho)$، با استفاده از این تساوی برای یک حالت خالصِ $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ نتیجه می گیریم که

$$\langle\tilde{\psi}|R_{\mathcal{E}}|\tilde{\psi}\rangle = \langle\tilde{\psi}|R_{\mathcal{F}}|\tilde{\psi}\rangle \tag{۹۵}$$

درنتیجه بدست می آوریم که $R_{\mathcal{E}} = R_{\mathcal{F}}$. بنابراین تجزیه های $R_{\mathcal{E}}$ و $R_{\mathcal{F}}$ را در نظر می گیریم.

$$R_{\mathcal{E}} = \sum_i |s_i\rangle\langle s_i| \qquad R_{\mathcal{F}} = \sum_i |t_i\rangle\langle t_i| \tag{۹۶}$$

اما از درس های قبلی در مورد تجزیه ماتریس های چگالی می دانیم که هر دو تجزیه ای از یک ماتریس چگالی به شکل زیر به هم مربوط اند

$$|t_i\rangle = \sum_j S_{ij}|s_j\rangle. \quad (۹۷)$$

و در نتیجه

$$F_i|\psi\rangle = \langle\tilde{\psi}|t_i\rangle = \sum_j S_{ij}\langle\tilde{\psi}|s_j\rangle = S_{ij}E_j|\psi\rangle. \quad (۹۸)$$

از آنجا که این تساوی برای هر حالتِ دلخواهِ $|\psi\rangle$ برقراراست نتیجه می گیریم که

$$F_i = \sum_j U_{ij}E_j, \quad (۹۹)$$

که همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

۲.۷ تعداد عملگرهای کراوس

از آنچه که تاکنون گفته‌ایم به نظر می رسد که تعداد عملگرهای کراوس به اندازه بعد محیط است. اما با توجه به آزادی ای که درانتخاب عملگرهای کراوس وجود دارد می توان همواره کاری کرد که یک ابرعملگر کوانتومی را با تعداد خیلی کمتری از عملگرهای کراوس بیان کرد. درواقع قضیه زیر نشان می دهد که تعداد عملگرهای کراوس می تواند بسیار کمتر از بعد محیط باشد. یادآوری می کنیم که یک سیستم مثل یک کیوبیت می تواند دو بعدی بوده و درحمامی از فوتون ها که یک فضای هیلبرت بی نهایت بعدی دارد قرار گرفته باشد. قضیه زیر بیان می کند که برای توصیف کلی ترین ابرعملگرکوانتومی حداکثر به چهار عملگر کراوس نیاز داریم.

قضیه: هر ابر عملگر کوانتومی روی یک سیستم d بعدی را می توان با تعداد کمتر یا مساوی d^2 عملگرِ کراوس بیان کرد.

اثبات: اثبات این قضیه بسیار ساده است. کافی است توجه کنیم که ماتریس چگالیِ $R_{\mathcal{E}}$ را که ابرعملگرِ $\mathcal{E}$ را توصیف می کند، همواره می توان در پایه به صورت زیر تجزیه طیفی کرد و تجزیه طیفی چنین عملگری بیشتر از d^2 ویژه مقدار غیر صفر ندارد.

$$R_{\mathcal{E}} = \sum_{i=1}^{d^2} |\lambda_i\rangle\langle\lambda_i| \quad (۱۰۰)$$

حال اگر به رابطه 87 و نحوه تعریف عملگرهای کراوس دقت کنیم اثبات قضیه کامل می شود.

۸ معادله لیندبلد

تا کنون به کانال های کوانتومی تنها با توجه به رابطه حالت های ورودی و خروجی آنها نگاه کرده ایم. این که حالت خروجی در چه زمانی تولید می شود، یا به عبارت دقیق تر دینامیک این نگاشت در طول زمان، مورد توجه و علاقه ما نبوده است. به شکل دقیق تر باید بنویسیم:

$$\rho(t) = \mathcal{E}_t(\rho(0)). \tag{۱۰۱}$$

به یک معنا می توان این معادله را جایگزین رابطه $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$ برای حالت های باز در نظر گرفت به این معنا که تحول یک حالت را در یک زمان متناهی که لزوما بی نهایت کوچک نیست، تعیین می کند. برای سیستم های بسته تحول در زمان های بی نهایت کوچک از همین رابطه ی $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$ و با در نظر گرفتن یک زمان بی نهایت کوچک $t \longrightarrow \delta t$ بدست می آید. برای سیستم های باز هم می توانیم این کار را انجام دهیم و معادله تحول سیستم های باز را در زمان کوچک بدست بیاوریم. آنچه که بدست می آوریم معادله لیندبلد [۱۰] نامیده می شود. این معادله به یک معنا جایگزین

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle \tag{۱۰۲}$$

می شود. البته باید توجه کنیم که معادله لیندبلد با تقریب هایی بدست می آید و در حالت کلی معادله دینامیکی یک سیستم باز با معادله لیندبلد توصیف نمی شود. به این تقریب ها در استخراج معادله لیندبلد اشاره می کنیم. برای شروع معادله تحول کوانتومی را برای یک بازه بی نهایت کوچک به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$\rho(t+\epsilon) = \sum_{i=1}^{n} A_i(t,\epsilon)\rho(t)A_i^\dagger(t,\epsilon). \tag{۱۰۳}$$

حال می خواهیم بستگی عملگرهای کراووس را به ϵ تعیین کنیم. می دانیم که عملگرهای کراوس به ترتیب زیر از عملگر یکانی ای که روی سیستم بزرگ تر عمل کند بدست می آیند:

$$A_i(t,\epsilon) = \langle i|U(t,t+\epsilon)|0\rangle. \tag{۱۰۴}$$

[۱۰] Lindblad Equation

از جمله داریم:

$$A_0(t,\epsilon) = \langle 0|U(t,t+\epsilon)|0\rangle = \langle 0|I - i\epsilon H(t)|0\rangle = I - i\epsilon L_A(t). \tag{۱۰۵}$$

عملگر L_A هرمیتی نیست. بنابراین می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$L_A = H_0 + iL_0 \tag{۱۰۶}$$

که در آن H_0 و L_0 هرمیتی اند. حال از شرط بهنجارشِ

$$A_0^\dagger A_0 + \sum_i A_i^\dagger A_i = I$$

استفاده می کنیم و با جایگذاری A_0 در آن بدست می آوریم:

$$2\epsilon L_0 + \sum_i A_i^\dagger A_i = 0. \tag{۱۰۷}$$

این رابطه نشان می دهد که عملگرهای A_i متناسب با $\sqrt{\epsilon}$ هستند و بنابراین می نویسیم:

$$A_i = \sqrt{\epsilon} L_i. \tag{۱۰۸}$$

حال می توانیم همه این عملگرها را در رابطه اصلی کراوس جایگذاری کنیم و بدست بیاوریم:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H_0,\rho] + \sum_i L_i\rho L_i^\dagger - \frac{1}{2}L_i^\dagger L_i\rho - \frac{1}{2}\rho L_i^\dagger L_i. \tag{۱۰۹}$$

این معادله، معادله لیندبلد خوانده می شود. معنای این معادله چیست؟ جمله اول این معادله همان تحول یکانی سیستم کوانتومی را نشان می دهد. اما جملات بعدی نشان می دهند که حالت سیستم در اثر اختلالات محیط دچار نوعی پرش بین حالت های مختلف می شود. توجه به یک مثال این موضوع را روشن می کند: یک اتم دو ترازه را که ترازهای انرژی آن را با $|g\rangle$ و $|e\rangle$ نشان می دهیم در نظر بگیرید. هامیلتونی این سیستم را می توان در همین پایه انرژی به صورت زیر نوشت: $H = \sigma_z = |g\rangle\langle g| - |e\rangle\langle e|$. در عین حال برهم کنش با محیط باعث می شود که گذارهایی بین حالت پایه و حالت برانگیخته بوجود آید. عملگرهای لیندبلد متناظر با این پرش ها یا گذار ها عبارت اند از:

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g|, \qquad \sigma_- = |g\rangle\langle e|. \tag{۱۱۰}$$

■ تمرین: نشان دهید که معادله لیندبلد برای این اتم دو ترازه پس از ساده کردن به شکل زیر در می آید.

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[\sigma_z,\rho] + \sigma_+\rho\sigma_- + \sigma_-\rho\sigma_-\rho. \tag{۱۱۱}$$

دقت کنید که در استخراج معادله لیندبلد تقریب های مهمی را در نظر گرفته ایم. مهمترین این تقریب ها این است که فرض کرده ایم در لحظه $t+\epsilon$ حالت سیستم یعنی $\rho(t+\epsilon)$ از روی حالت سیستم در لحظه t قابل تعیین کردن است. اگر دقت کرده باشید در استخراج معادله تحول برای سیستم های باز فرض کردیم که در لحظه اولیه حالت سیستم و حالت محیط از یکدیگر جدا هستند و حالت کل سیستم به صورت $\rho_S(0)\otimes\rho_E(0)$ قابل نوشتن است. با درست بودن این شرط بود که به تجزیه کراوس از یک تحول کوانتومی سیستم باز رسیدیم. در استخراج معادله لیندبلد فرض کردیم که این شرط در هر لحظه برقرار است. این فرض به این معناست که همبستگی های ایجاد شده بین سیستم و محیط خیلی سریع از بین می روند و محیط به دلیل بزرگی فوق العاده اش هیچگاه با سیستم درهم تنیده نمی شود. با چنین فرضی به این نتیجه می رسیم که حالت سیستم در هر لحظه به حالت همان سیستم در لحظه قبل بستگی دارد و به همبستگی های سیستم و محیط وابسته نیست. به عبارت دیگر به این نتیجه می رسیم که تحول این سیستم حافظه مند نیست. چنین تحولاتی را تحول مارکوفی [11] می نامند. موضوع تحول غیرمارکوفی یک موضوع پژوهش روز است که خواننده علاقمند می تواند برای فهم آن به مقالات روز مراجعه کند.

۹ تمرین ها:

.

- در بعد دلخواه d کانال واقطبش به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{E}(\rho)=p\rho+(1-p)\frac{I}{d} \tag{۱۱۲}$$

الف: فرض کنید که یک خالص $|\psi\rangle$ را به این کانال وارد می کنیم. ویژه حالت های ماتریس چگالی خروجی را پیدا کنید.

ب: ماتریس های تعمیم یافته پاوولی را به شکل زیر تعریف کنید

$$X=\sum_{j=1}^{d}|j+1\rangle\langle j|,\qquad Z=\sum_{j=1}\omega^j|j\rangle\langle j|, \tag{۱۱۳}$$

که درآن همه جمع ها به سنج d انجام می شود $(d+k\equiv k)$ و $\omega^d=1$. این ماتریس ها تعمیم σ_x و σ_z هستند. نشان دهید که

$$ZX=\omega XZ, \tag{۱۱۴}$$

[11] Markovian Dynamics

نشان دهید که ماتریس های $X^m Z^n$ برای $m, n = 0, \cdots d-1$ یک پایه برای ماتریس های d بعدی تشکیل می دهند.

ج: با استفاده از این ماتریس ها یک نمایش کراوس برای کانال واقطبش بدست آورید.

- H یک فضای برداری n بعدی و $\mathcal{D}(H)$ فضای برداری ماتریس های چگالی روی آن است. چه تعداد پارامتر حقیقی لازم است که یک ابرعملگر $\mathcal{E} : \rho \longrightarrow \mathcal{E}(\rho)$ را که در فضای $\mathcal{D}(H)$ اثر می کند، به طور کامل تعیین کند؟ (راهنمایی: برای پاسخ می بایست تعیین کنید که چه تعداد پارامتر لازم است که یک ماتریس هرمیتی را مشخص کند و سپس چه تعداد پارامتر لازم است که یک نگاشت خطی ردّ نگهدار را بین این ماتریس ها تعیین کند.)

- هرگاه حالت اولیه سیستم و محیط به صورت $|\phi\rangle \otimes |e\rangle$ باشد که در آن $|e\rangle$ یک حالت مشخص از محیط باشد، و عملگر یکانی U روی سیستم و محیط اثر کند، می توان عملگرهای کراوس را برای ابر عملگری که تحول سیستم را مشخص می کند، بدست آورد. این کار را در کلاس انجام دادیم.

الف: فرض کنید که حالت اولیه سیستم به صورتِ $\rho_s \otimes |e\rangle\langle e|$ است. نشان دهید که عملگرهای کراوس بازهم به همان صورت قبلی باقی خواهند ماند.

ب: فرض کنید که حالت اولیه سیستم به صورتِ $\rho_s \otimes \rho_e$ است. عملگرهای کراوس را با استفاده از تجزیه طیفی ρ_e بدست آورید.

- عملگر زیر روی دو کیوبیت اثر می کند. کیوبیت اول به منزله سیستم و کیوبیت دوم به منزله محیط است:

$$U = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X, \qquad (۱۱۵)$$

الف: هرگاه که حالت اولیه‌ی محیط $|0\rangle$ باشد، عملگرهای کراوس را برای تحول سیستم پیدا کنید.

ب: هرگاه که حالت اولیه محیط یک حالت گرمایی باشد یعنی حالت $\rho_e = \frac{1}{Z}(e^{-\beta E_0}|0\rangle\langle 0| + e^{-\beta E_1}|1\rangle\langle 1|)$ که درآن $Z = e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_1}$، عملگرهای کراوس را پیدا کنید.

■ عملگر زیر روی دو کیودیت [۱۲] اثر می کند. کیودیت تعمیمی از کیوبیت است که فضای برداری مربوطه‌اش به جای دو بعد، d بعد دارد. کیودیت اول به منزله سیستم و کیو دیت دوم به منزله محیط است:

$$U = \sum_{k=0}^{d-1} |k\rangle\langle k| \otimes X^k, \tag{۱۱۶}$$

که X همان عملگری است که درتمرین ۲ تعریف شد.

الف: هرگاه که حالت اولیه‌ی محیط $\langle 0|$ باشد، عملگرهای کراوس را برای تحول سیستم پیدا کنید.

ب: هرگاه عملگر یکانی به صورت زیر باشد، عملگرهای کراوس را بدست آورید:

$$U = \sum_{k,l=0}^{d-1} |k\rangle\langle k| \otimes Z^k, \tag{۱۱۷}$$

Z نیز در تمرین ۲ تعریف شده است.

■ یک کانال واقطبش برای کیوبیت ها در نظر بگیرید:

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho) = (1-p)\rho + p\frac{I}{2}$$

نشان دهید که

$$tr(\rho'^2) \leq tr(\rho^2).$$

[۱۲] Qudit

این نامسای به شکل زیر نیز تعمیم می یابد:

$$tr(\rho'^k) \leq tr(\rho^k) \qquad \forall\, k \geq 1.$$

ولی من هنوز اثبات ساده ای برای آن پیدا نکرده ام. دانشجویی که بتواند این نامساوی تعمیم یافته را ثابت کند یک امتیاز مثبت خواهد گرفت.

■ یک کانال در دست داریم که ماتریس های چگالی $\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}$ را به ماتریس های زیر تبدیل می کند:

$$\mathcal{E}(\rho) = \begin{pmatrix} 1-(1-\gamma)(1-a) & b\sqrt{1-\gamma} \\ b^*\sqrt{1-\gamma} & c(1-\gamma) \end{pmatrix}. \tag{۱۱۸}$$

عملگرهای کراوس را برای این کانال بدست آورید. (راهنمایی: در بسیاری از موارد می توان با سعی و خطا عملگرهای کراوس را بدست آورد.)

■ یک کانال به شکل زیر تعریف شده است:

$$\rho \longrightarrow \mathcal{E}(\rho) = A_0\rho A_0^\dagger + A_1\rho A_1^\dagger, \tag{۱۱۹}$$

که درآن

$$A_0 = \sqrt{p}X, \qquad A_1 = \sqrt{1-p}Y, \tag{۱۲۰}$$

و X و Y هم ماتریس های پاوولی هستند. فرض کنید که این سیستم در تماس با محیطی بوده است که تنها از یک کیوبیت تشکیل شده است. یک عملگریکانی مثل U بدست آورید که این ابرعملگر ناشی از تحول سیستم و محیط تحت آن عملگرباشد. (راهنمایی: دقت کنید که تنها شرط روی U می بایست این باشد که $A_m = \langle m|U|e\rangle$).

■ یک کانال با عملگرهای کراوس زیر داده شده است:

$$M_0 = \sqrt{1-p}I, \qquad M_1 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{۱۲۱}$$

الف: نشان دهید که این کانال را با دو عملگر کرواسِ N_1 و N_2 نیز می توان نمایش داد.

ب: با اضافه کردن یک عملگر $N_0 = 0$، نشان دهید که M_i ها با N_μ ها توسط یک ماتریس یکانیِ U مرتبط هستند، یعنی

$$M_i = \sum_\mu U_{i\mu} N_\mu.$$

- فرض کنید که یک کانال بیت ـ برگردان با پارامترِ p، n بار روی یک کیوبیت اثر کند. نشان دهید که کانال حاصل بازهم یک کانال بیت برگردان است. پارامتر این کانال را برحسب p و n بدست آورید.

- مثالی از یک کانال ارائه دهید که اگر دو بار روی یک کیوبیت اثر کند، کانال حاصل تبدیل به یک کانال از نوع متفاوت می شود.

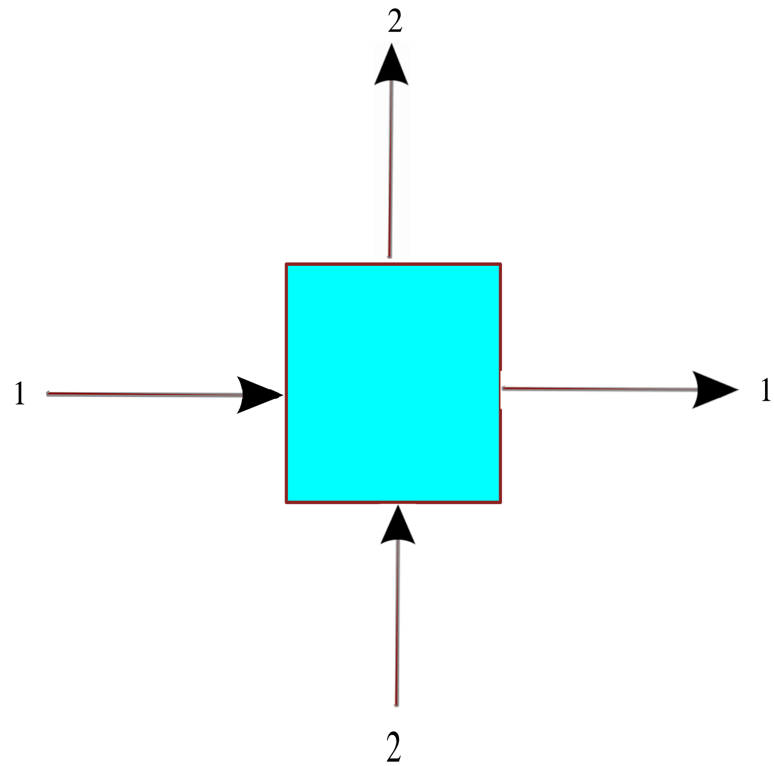
- یک Beam Splitter یک وسیله اپتیکی است که دو درگاه ورودی و دو درگاه خروجی دارد و به صورت نشان داده شده در شکل (۹) نشان داده می شود. در واقع این دستگاه روی دو مود فوتونی اثر می کند و آنها را مطابق با هامیلتونی بالا به دو مود فوتونی دیگر تبدیل می کند که در خروجی ظاهر می شوند.

$$\begin{aligned} |1,0\rangle &\longrightarrow \cos\theta|1,0\rangle + \sin\theta|0,1\rangle, \\ |0,1\rangle &\longrightarrow -\sin\theta|1,0\rangle + \cos\theta|0,1\rangle. \end{aligned} \quad (۱۲۲)$$

در عبارت بالا معنای $|1,0\rangle$ در طرف چپ این است که یک فوتون وارد درگاه ورودی شماره یک شده است و معنای همین کت در طرف راست این است که یک فوتون از درگاه شماره یک خارج شده است. همین تعبیر برای کت های $|0,1\rangle$ در طرف چپ و راست نیز درست است. از روی روابط بالا می توان گفت که این وسیله عملگرهای خلق فوتون ها را به شکل زیر تبدیل می کند:

$$\begin{aligned} a^\dagger &\longrightarrow \cos\theta a^\dagger + \sin\theta b^\dagger \\ b^\dagger &\longrightarrow -\sin\theta a^\dagger + \cos\theta b^\dagger, \end{aligned} \quad (۱۲۳)$$

که در آن $a^\dagger$ نشان دهنده عملگرهای خلق در درگاه های شماره یک و $b^\dagger$ نشان دهنده عملگرهای خلق در درگاه های شماره دو هستند.



شکل ۳: شمای یک Beam Splitter.

یک ـ با استفاده از این روابط پیدا کنید که حالت های زیر تحت عمل Beam Splitter به چه حالت هایی تبدیل می شوند:

$$|2,0\rangle, \quad |3,0\rangle, \quad |1,1\rangle, \quad |2,2\rangle, \quad |m,n\rangle. \tag{۱۲۴}$$

دو ـ با استفاده از این روابط پیدا کنید که حالت زیر به چه حالتی تبدیل می شوند:

$$|\alpha,\beta\rangle \tag{۱۲۵}$$

که در آن $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ نشان دهنده دو حالت همدوس هستند.

سه ـ آیا این وسیله می تواند روی دو حالت همدوس ورودی در هم تنیدگی ایجاد کند؟

■ می خواهیم فوتون هایی را از یک فیبر نوری عبور دهیم. می دانیم که در ابتدا محیط دارای هیچ فوتونی نیست. هم چنین می دانیم که هامیلتونی حاکم بر فوتون های داخل فیبر نوری و محیط به صورت زیر است:

$$H = \theta(ab^\dagger + a^\dagger b) \tag{۱۲۶}$$

که در آن $(a,\ a^\dagger)$ و $(b,\ b^\dagger)$ عملگرهای فوتونی مربوط به فیبر و محیط هستند.

یک ــ هرگاه حالت ورودی فیبر به صورت

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle \tag{۱۲۷}$$

باشد، حالت خروجی فیبر را حساب کنید. عمل این فیبر را به صورت یک کانال کوانتومی نشان داده و عملگرهای کراوس آن را بنویسید.

دو ــ هرگاه حالت ورودی فیبر به صورت

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n |n\rangle \tag{۱۲۸}$$

باشد، حالت خروجی فیبر را حساب کنید. بازهم عمل فیبر را به صورت یک کانال نشان داده و عملگرهای کراوس آن را بدست آورید.

■ تمرین: دو کانال میراکننده دامنه با پارامترهای γ و γ' را در نظر بگیرید. ترکیب این دو کانال پشت سرهم چه نوع کانالی است؟