شناخت جهان واقعی، متغیرهای پنهان و مکانیک کوانتومی

وحیدکریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۱۹ بهمن ۱۳۹۱

۱ مقدمه

حالتی مثل

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle - |1,0\rangle) \qquad (۱)$$

را درنظربگیرید. فرض کنید که کیوبیت اول دست آلیس و دومی در دست باب است. حالت های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را برای نشان دادن ویژه حالت های اسپین در راستای z بکار برده‌ایم. اگر آلیس روی ذره خود یک اندازه گیری در راستای z انجام دهد و مقدار 0 بدست آورد، می تواند به طور قطع نتیجه اندازه گیری باب را پیش گویی کند زیرا باب درصورت اندازه گیری در همین پایه به طور قطع مقدار 1 را بدست خواهد آورد. بالعکس اگر آلیس مقدار 1 را بدست آورد، می تواند به طور قطع بگوید که باب نتیجه صفر را دراندازه گیری خود بدست خواهد آورد. چنین حالتی را یک حالت درهم تنیده [۱] می گویند. از نظر ریاضی یک حالت خالصِ درهم تنیده حالتی است که نتوان آن را به صورت ضرب تانسوری دوبردار نوشت. بنابراین هرگاه یک سیستم دو بخشی که از دو بخش A و B با فضاهای هیلبرتِ H_A و H_B تشکیل شده باشد، فضای هیلبرت کامل این سیستم عبارت خواهد بود از $H_A \otimes H_B$. دراین فضا بردارهایی که نتوان آنها را به صورت ضرب تانسوری دو بردار دیگر نوشت بردارهای درهم تنیده اند. به عبارت دیگر بردارهای درهم تنیده بردارهایی هستند که تعداد جملات موجود در تجزیه اشمیت آنها از یک بزرگتر باشد. تعداد جملات در تجزیه اشمیت عدد اشمیت خوانده می شود. حالت های درهم تنیده نتایج کاملا شگفت انگیزی

[۱] Entangled

در بردارند، زیرا چنانکه در مثال بالا گفتیم هرگاه روی یکی از ذرات ِ یک حالت درهم تنیده آزمایشی انجام دهیم، وضعیت ذره دیگر از قوه به فعل درمی آید و از حالت نامعینی که قبل از اندازه گیری داشت درآمده و به حالت معین و ثابتی می رسد که توسط آزمایش ما تعیین می شود. این تاثیر حتی در وضعیتی که اندازه گیری های آلیس و باب فاصله فضا گونه باهم دارند نیز برقرار است. از آنجا که دو رویداد با فاصله فضا گونه هیچ گونه رابطه علّی با یکدیگر ندارند، به نظر می رسد که یک نوع اثر ناموضعی در مکانیک کوانتومی وجود دارد که هیچ نوع سابقه ای در فیزیک کلاسیک ندارد. هم چنین به نظر می رسد که این نوع پدیده ها به نوعی نسببت خاص را نقض می کنند. اما می توان نشان داد که آلیس با اندازه گیری های خود تنها می تواند نتایج آزمایش های باب را پیش گویی کند و به هیچ روی نمی تواند علامت یا سیگنالی را به او مخابره کند. برای فهم این موضوع کافی است که ماتریس چگالی باب را قبل و بعد از اندازه گیری آلیس بدست آورده و با هم مقایسه کنیم. به طور کلی فرض کنید که حالتی که در دست آلیس و باب است حالتی کلی به شکل زیرباشد:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,\mu} \psi_{i\mu} |i,\mu\rangle, \qquad (۲)$$

بنابراین ذره‌ای که در دست باب قرار دارد در حالت زیر خواهد بود:

$$\rho_B = tr_A(|\Psi\rangle\langle\Psi|). \qquad (۳)$$

حال فرض کنید که آلیس یک اندازه گیری با عملگرهای $\{P_m\}$ روی ذره خودش انجام دهد. دراین صورت حالت دو ذره به حالت زیر تبدیل می شود:

$$\rho' = \sum_m (P_m \otimes I)|\Psi\rangle\langle\Psi|(P_m^\dagger \otimes I). \qquad (۴)$$

بعد از این اندازه گیری حالت ذره ای که در دست باب است برابرخواهد بود با:

$$\rho'_B = tr_A(\rho') = tr_A(\sum_m (P_m \otimes I)|\Psi\rangle\langle\Psi|(P_m \otimes I).) \qquad (۵)$$

اما دراین جا خواننده می تواند یک لم ساده را برای خود ثابت کند و آن اینکه tr_A به معنای زیر دارای خاصیت دوره‌ای است که درآن عملگر های X و Z روی فضای A عمل می کند و عملگر Y روی هر دو فضای A و B عمی می کند.

$$tr_A((X \otimes I)Y(Z \otimes I) = tr((Z \otimes I)(X \otimes I)Y) \qquad (۶)$$

با استفاده از این خاصیت خواهیم داشت:

$$\rho'_B = tr_A(\sum_m (P_m \otimes I)|\Psi\rangle\langle\Psi|) = tr_A(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \rho_B. \qquad (۷)$$

بنابراین حالت ذره ای که در دست باب است با اندازه گیری های آلیس تغییر نمی کند و درنتیجه اندازه گیری های آلیس به هیچ روی باعث تغییری در حالتِ ذره باب نخواهند شد و و درنتیجه هیچ نوع علامت یا اطلاعی به باب مخابره نمی شود. این امر ادعای ما را ثابت می کند که ناموضعیت به معنای نقض نسبیت خاص نیست. با این وجود حالت های درهم تنیده یعنی حالت هایی مثلِ 1 که نشان دهنده اثرات ناموضعی در مکانیک کوانتومی هستند، خصلت های غریبی دارند که آنها را شایسته مطالعه جدی و وسیع می کند. دردو دهه اخیر که موضوع کامپیوترها و اطلاعات کوانتومی گسترش یافته‌است نتایج فراوانی در مورد این نوع حالت ها بدست آمده است که در فصل های آینده به آنها خواهیم پرداخت. دراین فصل می خواهیم به یک جنبه خاص از این موضوع که در ۱۹۳۵ توسط اینشتین، پودولسکی و روزن طرح شده است توجه کنیم. چنانکه می دانیم اینشتین بدلیل علاقه و اعتقاد عمیقی که به نظریه فیزیکی به عنوان توصیف کننده جهان خارج داشت، یعنی جهانی واقعی که مستقل از مشاهدات و تصورات ما وجود عینی دارد هرگز نتوانست مکانیک کوانتومی را به عنوان یک نظریه فیزیکی کامل بپذیرد. او در ادامه‌ی انتقاد هایی که به این نظریه وارد می کرد سعی کرد که تعریفی از یک نظریه کامل و هم چنین تعریفی دقیق (به سیاق معمول در فیزیک و نه در چارچوب بحث و جدل فلسفی) ارائه کند و سپس به کمک آن نشان دهد که مکانیک کوانتومی یک نظریه کامل نیست. برای آنکه بحث اینشتین، پودولسکی و روزن را به خوبی درک کنیم، بهتراست نخست تفسیر ناگزیر و رایجی را که مکانیک کوانتومی از اندازه گیری خواص میکروسکوپی ارایه می دهد مرور کنیم.

بنابر مکانیک کوانتومی، یک خصلت معین از یک ذره، از قبل یک مقدار مشخص ندارد که توسط عمل اندازه گیری «مشاهده» یا «آشکار» شود، بلکه عمل اندازه گیری یکی از مقادیر کمیت مشاهده پذیر را «خلق» می کند. هرگاه که قائل به وجود چنین کمیتی به عنوان کمیتی واقعی و از قبل موجود شویم به تناقض های آشکاری با آزمایش ها مواجه خواهیم شد که در درس های مکانیک کوانتومی با نمونه هایی از آن آشناشده ایم. به عنوان مثال مولفه اسپین یک ذره در یک راستای معین، قبل از اندازه گیری مقدار معینی ندارد و نمی توان از مقدار «واقعی» آن قبل از اندازه گیری سخن گفت. زیرا می دانیم که نتایج اندازه گیری مولفه های اسپینِ یک ذره‌ی اسپین $\frac{1}{2}$ در هر راستایی همیشه دو مقدارِ $\frac{\hbar}{2}$ و $-\frac{\hbar}{2}$ را بدست می دهد، در صورتی که نمی توان برداری را تصور کرد که مولفه های آن در هر راستایی تنها همین دو مقدار را اختیار کند.
این یک سوال بسیار عمیق است که چه چیزی «واقعی» است و چه چیزی «واقعی» نیست و این که آیا فیزیک می بایست پدیده های عالَمِ واقعی و خارج از ذهن را توصیف کند یا تنها نتایج مشاهدات و اندازه گیری های ما در آزمایشگاه را نظم ببخشد و به کمک یک مدل نظری تبین کرده و قدرت پیشگویی به ما بدهد. برای آنکه به این سوال ها با زبان و روش دقیق

و خدشه ناپذیر فیزیک پاسخ دهیم می بایست صورت بندی روشن و محک پذیری از این دو سوال تدوین کنیم. بنابراین برای برای آنکه بفهمیم چه چیزی واقعی است و چه چیزی واقعی نیست، و نظریه کامل چیست، اینشتین، پوودولسکی و روزن ملاک های دقیقی به شرح زیر ارایه کردند.

ملاک واقعی بودن یک خاصیت : فرض کنید که می خواهیم خصلتی مثل رنگ یک سیب را تعیین کنیم. اگر کسی بتواند بدون اینکه مطلقاً روی اندازه گیری ما تاثیری بگذارد، پیش گویی کند که ما حتماً رنگ سیب را سرخ بدست خواهیم آورد و پیش بینی اش درست از آب درآید، حتماً رنگ سرخ سیب یک واقعیت خارجی و مستقل از اندازه گیری ماست. به عبارت دیگر اندازه گیری ما سرخی سیب را «خلق» نکرده است بلکه فقط آن را که یک واقعیت خارجی بوده است، «آشکار» کرده است. برای آنکه مطمئن شویم که شخص دوم هیچ گونه تاثیری روی اندازه گیری ما نداشته است ما می توانیم رابطه علّی اندازه گیری خودمان را با او بکلی قطع کنیم، یعنی کاری کنیم که اندازه گیری ما و عمل آن شخص در فاصله های فضاگونه انجام شود. به این ترتیب یک ملاک قاطع و از نظر فیزیکدانان عملی برای تشخیص عناصر واقعیت $Elements\ of\ Reality$ بدست می آید.

ملاک کامل بودن یک نظریه: اگر نظریه ای فراهم کنیم که تنها به بخشی از مشاهدات ما نظم و ترتیب دهد و برایمان قدرت پیشگویی فراهم کند و به وضوح در باره جنبه ها یا عناصری از جهان واقعی که می دانیم وجود دارند ساکت باشد، آنگاه می توانیم بگوییم که نظریه ما یک نظریه کامل نیست. به عبارت دیگر نظریه ای کامل است که هر عنصری از واقعیت در آن قابل توصیف باشد.

به کمک این دو تعریف و با ارایه یک آزمایش فکری که از این به بعد آن را آزمایش EPR می نامیم، اینشتین، پودولسکی و روزن سعی کردند نشان دهند که مکانیک کوانتومی یک نظریه کامل نیست. در بخش بعدی اساس آزمایش فکری و بحث آنها را توضیح می دهیم.

۲ آزمایش فکری EPR

حالت 1 یک حالتِ اسپین صفر است به این معنا که اسپین کل دو ذره درآن صفراست. چنین حالتی را اگر در هر پایه ای بسط دهیم شکلی مثل شکل 1 به خود خواهد گرفت یعنی درهر پایه ای به شکل زیراست:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{n}+, \mathbf{n}-\rangle - |\mathbf{n}-, \mathbf{n}+\rangle). \qquad (۸)$$

این موضوع را خواننده می تواند با یک محاسبه ساده نشان دهد. کافی است که دقت کند که

$$\begin{aligned} |z+\rangle &= a|\mathbf{n}+\rangle + b|\mathbf{n}-\rangle \\ |z-\rangle &= -b|\mathbf{n}+\rangle + a|\mathbf{n}-\rangle, \end{aligned} \qquad (۹)$$

که درآن $a^2 + b^2 = 1$. حال فرض کنید که آلیس اسپین ذره خود را در راستای z اندازه گیری کند. دراین صورت با احتمال $\frac{1}{2}$ مقدار آن را برابر با $\frac{\hbar}{2}$ بدست خواهد آورد و حالت $|\Psi\rangle$ تبدیل می شود به $|z+, z\rangle$ که درنتیجه آن وی می تواند بگوید که باب در صورت اندازه گیری اسپین ذره خود در راستای z حتماً مقدار $-\frac{\hbar}{2}$ بدست می آورد. بنابراین با توجه به ملاک اول، و باتوجه به اینکه اندازه گیری آلیس و باب در فاصله های فضا گونه انجام می شود، مولفه اسپین در راستای z یعنی S_z یک واقعیت خارجی و عینیِ مستقل از اندازه گیری است. این نتیجه‌ای است از ساختمان مکانیک کوانتومی بعلاوه تعریف دقیقی که از ملاک ا ول برای عنصرواقعی ارایه شده است. اما آلیس می توانست اندازه گیری اش را در هرراستای دیگری نیز انجام دهد و با توجه به رابطه ؟؟ و با همان استدلال بالا مولفه اسپین ذرهٔ باب را در آن راستا و قبل از اندازه گیری باب با دقت پیش گویی کند. بنابراین مولفه اسپین این ذره در راستای $\mathbf{n}$ یعنی $S_{\mathbf{n}}$ نیز واقعی است. اما این امر بوضوح بامکانیک کوانتومی در تناقض است زیرا مکانیک کوانتومی امکان اینکه هر سه مولفه اسپین در راستاهای x، y و z قبل از اندازه گیری مقادیر معین داشته باشند سازگار نیست. به ابن ترتیب اینشتین، پودولسکی و روزن نتیجه گرفتند که مکانیک کوانتومی یک نظریه کامل نیست زیرا این نظریه نتوانسته است، سه مولفه اسپین که کمیت های واقعی و عینی هستند را توصیف کند.

۳ شناسایی عالم واقعی ، موضعیت و متغیرهای پنهان

ادعای مکانیک کوانتومی و به تبع آن فیزیک جدید آن است که فیزیک کاری به شناسایی عالَمِ واقع ندارد، بلکه تنها به تنظیم داده های آزمایشگاهی که از طریق اندازه گیری های دقیق بدست می آیند و سپس تبیین آنها در یک چارچوب نظری سازگار و سرانجام پیش بینی پدیده ها به کمک این نظم نظری می پردازد. دراین دیدگاه، هرآنچه را که نتوان از طریق آزمایش، لااقل آزمایش ذهنی و ایده آل به محک اندازه گیری و سنجش درآورد به حوزه فیزیک تعلق ندارد. از طرفی مخالفان این تفسیر ادعا می کنند که عقل سلیم حکم می کند الکترون وقتی از یک فیلامان گرم ساطع شده و به روی یک پرده فلورسانس می نشیند، حتما در هر لحظه در نقطه ای از فضا بوده و درنتیجه مسیری را درفضا پیموده است. بنابراین مسیر الکترون یک واقعیتِ عالَم خارج است، مستقل از این که ما آن را مشاهده کنیم یا نکنیم. پاسخ تفسیر کپنهاگی از مکانیک کوانتومی، نامی که به تفسیر رایج از مکانیک کوانتومی داده شده است، آن است که ما وقتی بخواهیم مفهومی مثل « مسیر الکترون» را که جزء تصورات ذهنی ماست، حتی به صورت ذهنی مشاهده کنیم با شکست مواجه می شویم، زیرا تنها وقتی می توانیم مسیر یک الکترون را مشاهده کنیم که بدون مختل کردن سرعت آن در هر لحظه مکانش را «ببنیم» و می دانیم که این امر شدنی نیست. بنابراین وقتی که هیچ راهِ عملی برای محک زدن یک خصلتِ واقعی مستقل از مشاهده ما و جود ندارد، بهتراست از اصرار براینکه آن خصلت واقعی و مستقل از مشاهده است دست برداریم. موقعیتی که بوجود می آید موقعیت غریب و دردناکی است زیرا فیزیک همواره در جستجوی شناسایی و ادراک نظم پنهانی بوده است که در واقعیت و در پشت رویدادها پنهان است و این آلیس با کشف مکانیک کوانتومی با ناکامی نسبی مواجه شده است. فیزیک کلاسیک مبتنی براین خاصیت بود که آزمایش های یکسان نتایج یکسان دارند و فرض می شد که این خاصیت علی الاصول درسطح تک تک رویداد ها و ذرات وجود دارد. اما مکانیک کوانتومی به ما می گوید که نتایج آزمایش های یکسان بر ذرات یکسان یقینی نیستند بلکه تصادفی و تابع شانس و احتمال اند و این تصادفی بودن در ذات خود پدیده ها نهفته است و با ظریف و دقیق کردنِ هرچه بیشتر ابزار آزمایش و روش های تهیه ذرات از بین نمی رود.

اما شاید متغیرهای بسیار ظریف و پنهانی وجود داشته باشند که عدم اطلاع و کنترل ما بر آنها و درنتیجه پراکنده بودن آنها در آزمایش های گوناگون این تصور کاذب را در ما به وجود می آورد که ما واقعاً آزمایش های یکسان را بر ذرات یکسان انجام می دهیم و نتایج متفاوت را ناگزیر به شانس و احتمال نسبت می دهیم. اگر براین متغیرها آگاهی داشته باشیم ممکن است بتوانیم یک توصیف یقینی از پدیده ها ارائه کنیم. این ایده یک ایده بسیار جذاب برای رها شدن از شانس و تصادف و بازگشت

به چارچوب فیزیک کلاسیک است که در آن می توان با داشتن شرایط اولیه به طور دقیق آینده جهان را به طور کامل پیشگویی کرد. آیا واقعاً این کار امکان پذیراست؟ آیا متغیرهای پنهان وجود دارند؟ و می توان لااقل وجود آنها را فرض کرد و نتایج تصادفی ای را که در آزمایش های میکروسکوپی می گیریم به کمک فرض وجود آنها توضیح داد؟ باید دقت کنیم که دراین جا به نوع و میزان ظرافت و کوچکی این پارامترها کاری نداریم و فقط به امکان وجود آنها فکر می کنیم.

۴ نامساوی بل

چگونه می توان درباره ایده هایی مثل مثل واقعیت، نظریه کامل و یا متغیرهای پنهان، و درست یا نادرست بودن آنها به صورت تجربی، آنچنانکه در علم جدید مرسوم است قضاوت کرد؟ چگونه می توان از این ایده های بعضاً مبهم و نا دقیق یک گزاره ابطال پذیر ساخت و آن را به محک تجربه سپرد؟ در بخش پیشین دیدیم که اینشتین، پودولسکی و روزن ملاک های دقیقی برای به تعریف و محک زدن واقعیت ارایه دادند. کار مهمِ جان بل در ۱۹۶۳ آن بود که راه دقیقی برای پاسخگویی به مسئله پارامترهای پنهان پیدا کرد، راهی که به کمک آن می توان به طور تجربی تعیین کرد که آیا این پارامتر ها وجود دارند یا نه؟ یا به عبارت بهتر آیا نتایج تجربی آزمایشگاهی ای را که ما می بینیم و آنهارا به شانس و تصادف تعبیر می کنیم، آیا می توانیم با پارامترهای پنهان توضیح دهیم یا خیر؟ دراین بخش کار بل را که منجر به یک نامساوی مشهور به نام خود وی شده است توضیح می دهیم.

نخستین و مهمترین چیزی را که باید در باره نامساوی بل به خاطر سپرد آن است که این نامساوی نتیجه مکانیک کوانتومی نیست و هیچ گزاره ای را نیز در باره مکانیک کوانتومی ارایه نمی دهد. بلکه این نامساوی نتیجه کاربرد عقل سلیم و استدلال بر مبنای دو فرض اساسی یعنی موضعیت و فرض وجود واقعیت خارجی است. موضعیت به این معناست که رویدادهای با فاصله فضاگونه رابطه علّی ندارند. وجود واقعیت خارجی نیز به این معناست که اشیأ خواص عینی ای دارند که عمل مشاهده آنها را تنها آشکار می کند و نه این که آنها را خلق کند. حال سوالی که بل طرح می کند آن است که آیا در جهانی با این دو خاصیت، رویدادهای تصادفی‌ای که ناشی از وجود پارامترهای پنهان هستند، چه نوع ویژگی ای دارند؟ وی این ویژگی را به صورت یک نامساوی بسیار ساده بیان کرد. هرگاه این نامساوی در آزمایشگاه نقض شود به معنای این است که یکی یا بیشتر از این فرض ها صحیح نسیتند. از آنجا که موضعیت یا نسبیت خاص مکرراً تست شده است ناچاریم که در وجود متغیرهای پنهان و یا واقعیت

شکل ۱: آزمایش ذهنی بل

خارجی تردید کنیم. بعد از این مقدمه به توصیف ازمایش ذهنی بل می پردازیم.

فرض کنید که زوج ذره های یکسانی داریم که بین آلیس و باب به اشتراک نهاده شده اند. آلیس فقط روی ذره اول و باب روی ذره دوم اندازه گیری می کند. این دو شخص آزمایش های خود را چنان انجام می دهند که هیچ گونه ارتباط علّی بین آنها وجود نداشته باشد. برای این کار آزمایش های خود را در فاصله فضاگونه انجام می دهند. فرض می کنیم که آلیس به طور تصادفی دو خصلت A و B (برای بعضی ذرات خصلت A و برای بعضی دیگر خصلت B) و باب نیزبه طور تصادفی دو خصلت C و D را اندازه گیری می کنند. می توان تصور کرد که هر بار که آلیس می خواهد روی ذره خود اندازه گیری کند سکه ای را پرتاب می کند و بنا بر روی سکه، خصلت A یا B را اندازه می گیرد. باب نیز به طور مشابه همین کار را می کند. مشاهده پذیر های A, B, C و D را چنان انتخاب می کنیم که مقادیر آنها را که با a, b, c و d نشان می دهیم فقط دو مقدار 1 و -1 را اختیار کنند. پارامترهای پنهان را مجموعاً با λ نشان می دهیم. هر جفت ذره ای که تهیه شده است مقدار مشخصی از λ دارد و خصلت های $A,\ B,\ C,\ D$ از این جفت ذره تابع این پارامترهاهستند.
خصلت های A, B از ذره ای که دست آلیس است قبل از اندازه گیری مقادیر مشخص $a(\lambda), b(\lambda)$ را دارد که توسط اندازه گیری وی اشکار می شوند. به همین نحو خصلت های C, D از ذره ای که دست باب است قبل از اندازه گیری مقادیر مشخص $c(\lambda), d(\lambda)$ را دارد که توسط اندازه گیری وی اشکار می شوند. این که آلیس تصمیم بگیرد کدام خصلت را اندازه بگیرد تغییری در مقدار آن خصلت یا خصلت دیگری ایجاد نمی کند. بنابراین اگر وی تصمیم بگیرد که خصلت A را اندازه بگیرد و مقدار $a(\lambda)$ بدست آورد، تغییری در مقدار مشاهده پذیر B یعنی $b(\lambda)$ ایجاد نمی کند. عین این حرف برای باب نیز درست است. (شکل 4):

حال نکته مهمی که از فرض واقعی بودن این متغیرها و هم چنین فرض موضعیت به دست می آید این است که همه مقادیر $a(\lambda)$ ، $b(\lambda)$ ، $c(\lambda)$ر و $d(\lambda)$ باهم وجود دارند. در نتیجه می توانیم به روابط بین آنها فکر کنیم. از جمله یک رابطه که وجود دارد این است که:

$$(a_\lambda + b_\lambda)c_\lambda + (a_\lambda - b_\lambda)d_\lambda = \pm 2 \qquad (۱۰)$$

درستی این رابطه را براحتی می توان تحقیق کرد. البته در هر بار که آلیس و باب اندازه گیری می کنند تنها به یکی از جملات چهارگانه این عبارت دسترسی پیدا می کنند. مثلا اگر آلیس خصلت A و باب خصلت C را اندازه بگیرند به مقدار $a(\lambda)c(\lambda)$ دسترسی پیدا می کنند که مقدار آن یا مساوی یک و یا مساوی منهای یک است. آنها نمی توانند به هر چهار مقدار برای یک زوج ذره دسترسی پیدا کنند زیرا محدودیت های آزمایش آنها را از این عمل منع می کنند به این معنا که وقتی آلیس می خواهد خصلت A را اندازه گیری کند می بایست دستگاه آزمایش را طوری بچیند که با وقتی می خواهد خصلت B را اندازه بگیرد فرق می کند. حال فرض کنید که آلیس و باب این آزمایش را برای تعداد بسیار بسیار زیادی از زوج ذرات انجام می دهند. سپس بعد از پایان اندازه گیری متوسط کمیت هایی را که اندازه گرفته اند حساب می کنند. مثلا برای محاسبه $\langle ac\rangle$ آنها دفعاتی را در نظر می گیرند که واقعا این دو خاصیت را اندازه گیری کرده اند. این متوسط برابر است با:

$$\langle AC\rangle = \frac{1}{N_{AC}}\sum_{i=1}^{N_{AC}} a_i c_i = \frac{1}{N_{AC}}\sum_{i=1}^{N_{AC}} a(\lambda_i)c(\lambda_i) \qquad (۱۱)$$

که در آن N_{AC} تعداد این دفعات است و a_i و c_i مقادیری است که در دفعه i ام بدست آورده اند. هم چنین وقتی که می خواهند متوسط $\langle ad\rangle$ را حساب کنند قرار می دهند

$$\langle AD\rangle = \frac{1}{N_{AD}}\sum_{j=1}^{N_{AD}} a_j d_j = \frac{1}{N_{AD}}\sum_{j=1}^{N_{AD}} a(\lambda_j)d(\lambda_j) \qquad (۱۲)$$

و الی آخر. نکته مهم این است که آن λ هایی که در عبارت اول وجود دارد الزاما با آن λ هایی که در عبارت دوم وجود دارند یکی نیستند و بنابراین اگر تعداد دفعات آزمایش کم باشد نمی توان از رابطه ۱۰ استفاده کرد. اما اگر تعداد دفعات آزمایش بسیار زیاد باشد، آنگاه در هر دو عبارت هر مقداری از λ وجود دارد و در واقع می توان هر دو متوسط را به شکل زیر نوشت:

$$\langle AC\rangle = \int d\lambda P(\lambda)a(\lambda)c(\lambda), \qquad (۱۳)$$

و

$$\langle AD\rangle = \int d\lambda P(\lambda)a(\lambda)d(\lambda), \tag{۱۴}$$

که در آن $P(\lambda)$ احتمال این است که متغیر پنهان مقدار λ داشته باشد. در نتیجه می توان نوشت:

$$\langle (A+B)C+(A-B)D\rangle = \int d\lambda P(\lambda)\left[a_\lambda + b_\lambda)c_\lambda + (a_\lambda - b_\lambda)d_\lambda\right] \tag{۱۵}$$

حال براحتی می توان نشان داد که

$$\begin{aligned} |\langle (A+B)C+(A-B)D\rangle| &= |\int d\lambda P(\lambda)|(a_\lambda + b_\lambda)c_\lambda + (a_\lambda - b_\lambda)d_\lambda| \\ &\le \int d\lambda P(\lambda)|(a_\lambda + b_\lambda)c_\lambda + (a_\lambda - b_\lambda)d_\lambda| \\ &= \int d\lambda P(\lambda)2 = 2. \end{aligned} \tag{۱۶}$$

به این ترتیب به نامساوی بل می رسیم یعنی برای چنین کمیت هایی حتماً نامساوی زیر می بایست برقرا باشد.

$$|\langle (A+B)C+(A-B)D\rangle| \le 2. \tag{۱۷}$$

باید اضافه کنیم که نامساوی اولیه بل به این شکل نبوده است و نامساوی فوق که نامساوی $CHSH$ خوانده می شود، نخستین بار توسط $Clauser,\ Horne,\ Shimony, Holt$ ارائه شده است.

۵ آزمون تجربی نامساوی بل و مکانیک کوانتومی

از سال ۱۹۸۲ تا کنون آزمایشهای گوناگونی با فوتون هاانجام شده است که همگی نشان دهنده این هستند که نامساوی بل توسط طبیعت نقض می شود. برای انجام آزمایش عمدتاً از جفت فوتون هایی استفاده شده است که دریک حالتِ از نوع 1 هستند با این تفاوت که بجای $|0\rangle$ و $|1\rangle$ ، دو حالت از قطبش فوتون بکار رفته است. این امر به این معناست که رفتار تصادفی ای را که اشیای میکروسکوپی از خود نشان می دهند نمی توان با یک نظریه موضعی که قائل به خواص واقعی اشیا و متغیرهای نهان باشد توضیح داد. آیا نتایجِ مکانیک کوانتومی با آزمایش های فوق سازگار است؟ پاسخ این سوال مثبت است. مکانیک

کوانتومی نشان می دهد که اولاً نامساوی بل نقض می‌شود، ثانیاً مقداری که برای کمیت طرف چپ نامساوی بل پیشگویی می کند درست همانی است که در آزمایشگاه مشاهده می شود. برای درک این موضوع حالتی مثل حالت زیر را در نظر می گیریم.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle + |1,0\rangle) \tag{۱۸}$$

مشاهده پذیرهایی که آلیس و باب اندازه می گیرند جهت اسپین ذرات (یاقطبش فوتون ها) در راستاهای زیر است.

$$A = S_x, \quad B = S_z, \quad C = a\ S_x + b\ S_z, \qquad D = -b\ S_x + a\ S_z. \tag{۱۹}$$

پارامترهای a و b را چنان می گیریم که جهت های اندازه گیری C و D برهم عمود باشند. حال مطابق با مکانیک کوانتومی متوسط کمیت زیر را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned}
\langle (A+B)C + (A-B)D\rangle &= \langle (S_x+S_z)(a\ S_x + b\ S_z) + (S_x - S_z)(-b\ S_x + a\ S_z)\rangle \\
&= \langle\Psi|(\hat{S}_x + \hat{S}_z)\otimes(a\ \hat{S}_x + b\ \hat{S}_z) + (\hat{S}_x - \hat{S}_z)\otimes(-b\ \hat{S}_x + a\ \hat{S}_z)|\Psi\rangle \\
&= \langle\Psi|(a-b)(\hat{S}_x\otimes\hat{S}_x - \hat{S}_z\otimes\hat{S}_z) + (a+b)(\hat{S}_x\otimes\hat{S}_z + \hat{S}_z\otimes\hat{S}_x)|\Psi\rangle \\
&=: \langle\Psi|\Omega|\Psi\rangle.
\end{aligned} \tag{۲۰}$$

آخرین عبارت را براحتی می توان محاسبه کرد. فرم صریح ماتریس Ω برابراست با:

$$\Omega = \begin{pmatrix} -a+b & a+b & a+b & a-b \\ a+b & a-b & a-b & -a-b \\ a+b & a-b & a-b & -a-b \\ a-b & -a-b & -a-b & -a+b \end{pmatrix} \tag{۲۱}$$

و درنتیجه

$$\langle (A+B)C + (A-B)D\rangle = \langle\Psi|\Omega|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Omega\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2(a-b). \tag{۲۲}$$

به این ترتیب با انتخاب $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ به این نتیجه می رسیم که

$$\langle (A+B)C + (A-B)D\rangle = 2\sqrt{2} \tag{۲۳}$$

که بوضوح نامساوی بل را نقض می کند و این همان مقداری است که در آزمایشها نیز بدست می آید.

۱.۵ مقدار بیشینه‌ی نقض نامساوی بل

با کمی تغییر در روابط بالا می توان براحتی فهمید که حالت های

$$|\phi^{\pm}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle \pm |1,1\rangle)$$
$$|\psi^{\pm}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle \pm |1,0\rangle) \qquad (۲۴)$$

که اصطلاحاً حالت های بل [۲] نامیده می شوند، همگی نامساوی بل را به میزانِ $2\sqrt{2}$ نقض می کنند. سوالی که درپیش رو داریم آن است که آیا حالتی می توان تصور کرد که نامساوی بل به مقداری بیشتر از این هم نقض شود؟ دراین قسمت نشان می دهیم که هیچ حالتی وجود ندارد که نامساوی بل را بیش از این نقض کند. واضح است که در تمام این بحث خود را به سیستم های دوقسمتی که هر زیر سیستم آن نیز دو بعدی است منحصر کرده‌ایم.
در واقع نشان می دهیم که برای هر چهار مشاهده‌پذیر یا عملگر هرمیتیِ A, A', B, B' که ویژه مقادیر آن ها ± 1 باشد، و به ازای هر حالتِ $|\psi\rangle$ همواره رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\langle\psi|(A+A')\otimes B + (A-A')\otimes B'|\psi\rangle \leq 2\sqrt{2}. \qquad (۲۵)$$

این نامساوی به نامساوی $Cirelson$ یا حدِّ سیرلسون مشهور است. برای اثبات این رابطه قرار می دهیم:

$$a := A\otimes I, \qquad a' := A'\otimes I, \qquad b := I\otimes B, \qquad b' := I\otimes B'. \qquad (۲۶)$$

واضح است که این عملگرها در شرایط زیر صدق می کنند:

$$a^2 = a'^2 = b^2 = b'^2 = I,$$
$$[a,b] = [a',b] = [a,b'] = [a'b'] = 0. \qquad (۲۷)$$

حال با استفاده از این روابط و تعریف عملگر M به صورتِ

$$M := (a+a')b + (a-a')b'$$

---

[۲] Bell States

به رابطه زیر می رسیم:

$$M^2 = 4I - [a, a'][b, b']. \qquad (۲۸)$$

در این مرحله از یک تعریف برای اندازه عملگرها استفاده می کنیم که به شکل زیر است و عملگر $Sup\ Norm$ خوانده می شود:

$$||K||_{sup} := sup_{|\psi\rangle} \frac{||K|\psi\rangle||}{||\psi\rangle||}, \qquad (۲۹)$$

که درآن $||\psi\rangle|| := \langle\psi|\psi\rangle^{\frac{1}{2}}$ اندازه یک بردار و $sup_{|\psi\rangle}$ به معنای بیشینه گرفتن روی تمام بردارهای $|\psi\rangle$ است. درتمرین ها از خواننده می خواهیم که خواص زیر را نشان دهد:

الف: $||K||_{sup}$ برابر با قدرمطلق بزرگترین ویژه مقدار $\sqrt{K^\dagger K}$ است.

ب: این نوع اندازه در نامساوی های زیر صدق می کند:

$$||KL||_{sup} \leq ||K||_{sup}||L||_{sup}$$

$$||K + L||_{sup} \leq ||K||_{sup} + ||L||_{sup}. \qquad (۳۰)$$

حال با استفاده از این خواص و این که ویژه مقدارهای $a,\ a',\ b,\ b'$ همگی یک و منهای یک هستند، نتیجه می گیریم که

$$||M^2||_{sup} \leq 4 + ||[a, a']||_{sup}||[b, b']||_{sup} \leq 4 + 4 = 8. \qquad (۳۱)$$

از آنجا که M یک ماتریس هرمیتی است، این امر به این معناست که اندازه بالاترین ویژه مقدارِ M^2 برابر با 8 است و در نتیجه اندازه بزرگترین ویژه مقدارِ M برابر با $2\sqrt{2}$ است. بنابراین نتیجه می گیریم که به ازای هر حالتِ دلخواهِ $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|M|\psi\rangle \leq 2\sqrt{2}, \qquad (۳۲)$$

و درنتیجه

$$\langle\psi|A \otimes (B + B') + A' \otimes (B - B')|\psi\rangle \leq 2\sqrt{2}. \qquad (۳۳)$$

نامساوی $CHSH$ حد بیشینه‌ی همبستگی های کلاسیک بین نتایج اندازه گیری های این مشاهده پذیر ها و نامساوی سیرلسون حد بیشینه‌ی همبستگی های کوانتومی بین آنها را نشان می دهد. در بخش بعدی بازهم به این نامساوی ها و معنای آنها باز می گردیم.

۲.۵ استراتژی های کلاسیک و کوانتومی

بهترین نحوه فهم تفاوتی که بین همبستگی های کلاسیک و کوانتومی وجود دارد آن است که معنای آنها را در مقیاس زندگی روزمره بفهمیم. برای این منظور به یک بازی فکری توجه می کنیم که مخصوصاً برای این منظور ابداع شده است. دراین نوع بازی ها که بعضاً به آنها بازی های کوانتومی [۳] نیز گفته می شود، نشان داده می شود که هرگاه بازیگران تنها از استراژی های کلاسیک استفاده کنند میزان برد آنها از یک مقدار معین هرگز تجاوز نمی کند. (منظور از یک استراتژی کلاسیک آن است که این افراد از هرنوع متغیرهای تصادفی هم بسته، برای تصمیم گیری های خود می توانند استفاده کنند.) اما هرگاه بازیگران از هم بستگی های کوانتومی مثلا یک زوج درهم تنیده و استفاده کنند و تصمیم گیری های خود را بر نتایج اندازه گیری بر روی این حالات استوار کنند، آنگاه قادر خواهند بود میزان برد خود را بیشتر کرده و از حد کلاسیک تجاوز کنند. در زیر با ساده ترین بازی کوانتومی آشنا می شویم.

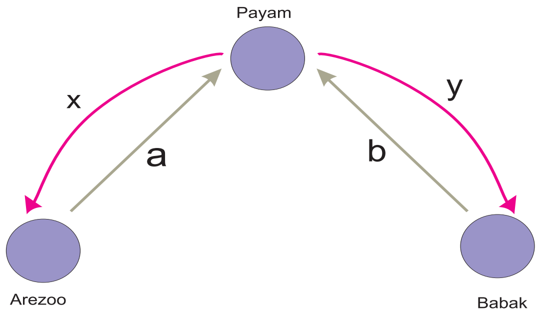
فرض کنید که شخص ثالثی به نام چارلی دو متغیر تصادفی x و y را به ترتیب به آلیس و باب ارسال می کند. در عوض آلیس و باب به ترتیب مقادیر a و b را به چارلی باز پس می فرستند. هربار که مقادیر متغیرها در رابطه‌ی زیر صدق کنند:

$$a \oplus b = x \wedge y, \tag{۳۴}$$

آلیس و باب این دور از بازی را برده و هر بار که غیراز این باشد، این دور را می بازند. دقت کنید که تمام متغیرهای $a,\ b,\ x,\ y$ مقادیر 0 یا 1 را اختیار می کنند. ضمناً آلیس و باب نمی توانند از مقادیری که چارلی برای دیگری فرستاده‌است اطلاع حاصل کنند، شکل ؟؟.

فرض کنید که چارلی مقادیر 0 و 1 را به طور تصادفی و با فراوانی یکسان برای آروز و باب می فرستد. براحتی می توان دید که با هیچ استراتژی ای آلیس و باب نمی توانند در همه موارد (به ازای همه مقادیر دریافتی از پیام) بازی را ببرند. برای

[۳] Quantum Game



شکل ۲: بازی کوانتومی ای که در متن درس توضیح داده شده است. دراین بازی بُرد وقتی حاصل می شود که $a\oplus b = x\wedge y$.

فهم این نکته متغیرهای a_0 و a_1 را مقادیری می گیریم که آلیس برای چارلی باز پس می فرستد اگر مقدار دریافتی x اش به ترتیب برابر با 0 و 1 باشند. به همین ترتیب متغیرهای b_0 و b_1 نیز تعریف می شوند. شرط برد آن است که هر چهار تساوی زیر برقرار شوند:

$$\begin{aligned} a_0\oplus b_0 &= 0\\ a_0\oplus b_1 &= 0\\ a_1\oplus b_0 &= 0\\ a_1\oplus b_1 &= 1. \end{aligned} \tag{۳۵}$$

با جمع کردن طرفین این تساوی ها و استفاده از خواص $\oplus$ به رابطه متناقضِ $0=1$ می رسیم و قضیه ثابت می شود. اما یک ترفند (استراتژی) وجود دارد که به بازیگران اجازه می دهد در سه چهارم موارد برنده باشند. این ترفند به این شکل است که قرار دهیم

$$a_0=a_1=0, \qquad b_0=b_1=0, \tag{۳۶}$$

به عبارت دیگر آلیس و باب مستقل از این که چه مقدارهایی از چارلی دریافت می کنند همواره بیت های صفر را به او ارسال می کنند. در چنین حالتی تساوی های چهارگانه‌ی بالا نشان می دهند که در سه مورد از چهار مورد آلیس و باب بازی را برده و در یک مورد می بازند. بنابراین در صورتی که چارلی بیت های خودش را به طور یکنواخت ارسال کند احتمال برد آلیس و باب ۳/۴ است.

حال سوال می کنیم که آیا هیچ استراتژی یا ترفند کلاسیک دیگری وجود دارد که احتمال بُردش بیشتر از ۴/۳ باشد؟ مثلاً آلیس و باب می توانند از یک رشته سکه که احتمال شیر و خط آمدن آنها به هم وابسته است استفاده کنند و پاسخ های خود را متکی به نتایج انداختن این سکه ها کنند. چنین چیزی به معنای آن است که آنها از همبستگی های کلاسیکی که در این متغیر پنهان (دراین جا زوج سکه‌ها) وجود دارد استفاده می کنند. می توان نشان داد که چنین استراتژی‌ای وجود ندارد و دلیلش هم چیزی نیست جز همان نامساوی $CHSH$ که در واقع حدی است بر همبستگی های کلاسیک. برای درک این قضیه متغیرهای زیر را تعریف می کنیم:

$$a := (-1)^{a_0}, \qquad a' := (-1)^{a_1}, \qquad b := (-1)^{b_0}, \qquad b' := (-1)^{b_1} \tag{۳۷}$$

این متغیرها مقادیر ± 1 را اختیار می کنند و بنابراین می توان نامساوی $CHSH$ را برای آنها بکار برد. بنابراین مطمئن هستیم که هر نوع استراتژی که آلیس و باب استفاده کنند، حتی اگر این استراتژی متکی بر همبستگی های کلاسیک باشد، متغیرهای فوق می بایست در نامساوی زیر صدق کنند:

$$\langle a(b+b') + a'(b-b')\rangle \leq 2, \tag{۳۸}$$

که آن را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\langle (-1)^{a_0+b_0} + (-1)^{a_0+b_1} + (-1)^{a_1+b_0} + (-1)^{a_1+b_1}\rangle \leq 2. \tag{۳۹}$$

اما متوسط های فوق را براحتی می توانیم محاسبه کنیم. به طور کلی داریم

$$\langle (-1)^{a\oplus b}\rangle = P_{a\oplus b=0} - P_{a\oplus b=1}. \tag{۴۰}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\langle (-1)^{a_0\oplus b_0}\rangle &= P_{a_0\oplus b_0=0} - P_{a_0\oplus b_0=1} = P_{00} - (1-P_{00}) = 2P_{00} - 1,\\
\langle (-1)^{a_0\oplus b_1}\rangle &= P_{a_0\oplus b_1=0} - P_{a_0\oplus b_1=1} = P_{01} - (1-P_{01}) = 2P_{01} - 1,\\
\langle (-1)^{a_1\oplus b_0}\rangle &= P_{a_1\oplus b_0=0} - P_{a_1\oplus b_0=1} = P_{10} - (1-P_{10}) = 2P_{10} - 1,\\
\langle (-1)^{a_1\oplus b_1}\rangle &= P_{a_1\oplus b_1=0} - P_{a_1\oplus b_1=1} = P_{11} - (1-P_{11}) = 2P_{11} - 1.
\end{aligned} \tag{۴۱}$$

با ترکیب این روابط و نامساوی $CHSH$ به نامساوی زیر می رسیم:

$$2P_{00} - 1 + 2P_{01} - 1 + 2P_{10} - 1 + 2P_{11} - 1 \leq 2, \tag{۴۲}$$

و با توجه به اینکه احتمال فرستادن زوج های x, y مختلف از طرفِ چارلی برابر با $\frac{1}{4}$ است، خواهیم داشت

$$\langle P_{success}\rangle = \frac{P_{00}+P_{01}+P_{10}+P_{11}}{4} \leq \frac{3}{4}. \qquad (۴۳)$$

بنابراین نتیجه می گیریم که هیچ نوع استراتژی وجود ندارد که احتمال برد آن بیشتر از $\frac{3}{4}$ باشد.

حال نشان می دهیم که اگر این دو نفر زوج های درهم تنیده‌ای در اختیار داشته باشند و تصمیم‌های خود را بر نتایج اندازه گیری روی این زوج ها بنا کنند می توانند احتمال موفقیت خود را بالاتر ببرند. این امر ناشی از آن است که هم بستگی هایی که در زوج های درهم تنیده وجود دارد فراتر از همبستگی های کلاسیک است. برای آنکه استراتژی مشخصِ آلیس و باب را بیان کنیم فرض می کنیم که آنها رشته‌ای از زوج های درهم تنیده‌ی یکسان دراختیار دارند، به نحوی که یکی از ذرات در اختیارِ آلیس و دیگری در اختیار باب است. آنها روی ذره خود اندازه گیری می کنند و بنابراین که چه مقداری برای کیوبیت خود اندازه بگیرند مقدار متغیری را که می بایست برای بفرستند تعیین می کنند. به عبارت بهتر رابطه ای که استفاده می کنند همان رابطه‌ی 37 است با این تفاوت که در این جا به عنوان مثال a مقداری است که آلیس در اندازه گیری روی ذره خودش بدست می آورد. (اگر مقدار 1 را بدست بیاورد عدد صفر را و اگر مقدارِ -1 را بدست بیاورد، عددِ 1 را برای چارلی می فرستد.) هرگاه از این استراتژی استفاده کنند، آنگاه بنابر محاسبات کوانتوم مکانیکی ای که قبلاً انجام دادیم نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned} & 2P_{00}-1+2P_{01}-1+2P_{10}-1+2P_{11}-1 \\ = & \ \langle(-1)^{a_0+b_0}+(-1)^{a_0+b_1}+(-1)^{a_1+b_0}+(-1)^{a_1+b_1}\rangle \\ = & \ \langle a(b+b')+a'(b-b')\rangle = 2\sqrt{2} \end{aligned} \qquad (۴۴)$$

و در نتیجه

$$\langle P_{success}\rangle = \frac{P_{00}+P_{01}+P_{10}+P_{11}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} = 0.853 \qquad (۴۵)$$

که از $\frac{3}{4}$ بیشتر است.

۳.۵ آیا هر حالت درهم تنیده‌ای نامساوی بل را نقض می کند؟

آیا هر حالت درهم تنیده‌ای نامساوی بل را نقض می کند؟ برای پاسخ به این سوال دقت می کنیم که یک حالت دلخواه از دو ذره را می توانیم با استفاده از تجزیه اشمیت به صورت زیر بنویسیم:

$$|\psi\rangle = \alpha|0,0\rangle + \beta|1,1\rangle, \tag{۴۶}$$

که در آن α و β اعداد مثبت و حقیقی هستند. از آنجا که $\alpha^2+\beta^2=1$ نتیجه می گیریم که کلی ترین حالتِ دو ذره ای به صورت زیر قابل بازنویسی‌است:

$$|\psi\rangle = \cos\theta|0,0\rangle + \sin\theta|1,1\rangle. \tag{۴۷}$$

این حالت دارای خاصیت های زیراست:

$$\begin{aligned}
&\langle\psi|\sigma_1\otimes\sigma_1|\psi\rangle = \sin 2\theta\\
&\langle\psi|\sigma_3\otimes\sigma_3|\psi\rangle = 1\\
&\langle\psi|\sigma_1\otimes\sigma_3|\psi\rangle = \langle\psi|\sigma_3\otimes\sigma_1|\psi\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{۴۸}$$

مشاهده پذیر های آلیس و باب را به ترتیب زیر انتخاب می کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &:= \cos\alpha\sigma_x + \sin\alpha\sigma_z\\
\mathbf{a}' &:= \cos\beta\sigma_x + \sin\beta\sigma_z\\
\mathbf{b} &:= \cos\gamma\sigma_x + \sin\gamma\sigma_z\\
\mathbf{b}' &:= \cos\delta\sigma_x + \sin\delta\sigma_z.
\end{aligned} \tag{۴۹}$$

محاسبه سرراست نشان می دهد که

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\mathbf{ab}|\psi\rangle &= \cos\alpha\cos\gamma\sin 2\theta + \sin\alpha\sin\gamma\\
\langle\psi|\mathbf{ab}'|\psi\rangle &= \cos\alpha\cos\delta\sin 2\theta + \sin\alpha\sin\delta\\
\langle\psi|\mathbf{a}'\mathbf{b}|\psi\rangle &= \cos\beta\cos\gamma\sin 2\theta + \sin\beta\sin\gamma\\
\langle\psi|\mathbf{a}'\mathbf{b}'|\psi\rangle &= \cos\beta\cos\delta\sin 2\theta + \sin\beta\sin\delta.
\end{aligned} \tag{۵۰}$$

می خواهیم نشان دهیم که مقادیر $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ ,\delta$ را می توان چنان انتخاب کرد که عبارتِ $\langle\psi|a(b+b')+a'(b-b')|\psi\rangle$ به ازای هر مقدار θ از ۲ بیشتر شود. برای سادگی قرار می دهیم $\alpha=0$ ، $\beta=\pi/2$ و $\gamma=-\delta$. درنتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\mathbf{ab}|\psi\rangle &= \cos\gamma\sin 2\theta\\
\langle\psi|\mathbf{ab'}|\psi\rangle &= \cos\gamma\sin 2\theta\\
\langle\psi|\mathbf{a'b}|\psi\rangle &= \sin\gamma\\
\langle\psi|\mathbf{a'b'}|\psi\rangle &= -\sin\gamma.
\end{aligned} \tag{۵۱}$$

با این انتخاب ها خواهیم داشت:

$$\langle\psi|a(b+b')+a'(b-b')|\psi\rangle = 2\left(\sin\gamma+\cos\gamma\sin 2\theta\right). \tag{۵۲}$$

حال می خواهیم ببینیم آیا به ازای یک مقدار مناسب از γ طرف راست بزرگتر از ۲ می شود یا نه؟ عبارت داخل پرانتز مقدار فرینه[۴] ی خود را در نقطه‌ای انتخاب می کند که در آن

$$\cot\gamma = \sin 2\theta. \tag{۵۳}$$

دراین نقطه خواهیم داشت

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 2\theta}}, \qquad \cos\gamma = \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{1+\sin^2 2\theta}} \tag{۵۴}$$

و درنتیجه دراین نقطه خواهیم داشت

$$\langle\psi|a(b+b')+a'(b-b')|\psi\rangle = 2\sqrt{1+\sin^2 2\theta} \tag{۵۵}$$

که به ازای هرمقدار θ از ۲ بیشتر است. بنابراین هر حالتِ درهم تنیده‌ای حتماً نامساوی بل را نقض می کند. باید دقت کنیم که دراین جا حالت را خالص در نظر گرفته‌ایم. این امر برای حالت های آمیخته صحیح نیست. البته می بایست درهم تنیدگی را برای حالت های آمیخته تعریف کنیم. این کار را در تمرین ها انجام خواهیم داد.

[۴] Exrtremum

۴.۵ حالت های GHZ

چنانچه دیدیم نامساوی بل یک نامساوی در مورد متوسط مشاهده پذیرهاست. نقض این نامساوی به این معناست که همبستگی هایی که در این حالت های ناموضعی وجود دارد، از آن نوعی است که به هیچ وجه توسط یک تابع احتمال همبسته و کلاسیک قابل بیان نیستند. به عبارت دیگر هیچ نظریه متغیرهای پنهان و موضعی که قایل به مقادیر واقعی برای اسپین ها باشد قادر نیست این همبستگی ها را توضیح دهد. برای تحقیق نامساوی بل می بایست روی تعداد زیادی نمونه های یکسان از حالت های درهم تنیده اندازه گیری کرد و مقادیر متوسط مشاهده پذیرهای خاصی را حساب کرد. چندین سال بعد از ارائه نامساوی بل، گرین برگر[۵]، هورن [۶] و زایلینگر [۷] نشان دادند که حالت هایی وجود دارند که هرکدام به تنهایی امکان وجود نظریه متغیرهای پنهان موضعی را نقض می کنند. این حالت ها امروزه به حالت های GHZ معروفند. یک نمونه از آنها به شکل زیراست:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z+,z+,z+\rangle + |z-,z-,z-\rangle\right). \tag{۵۶}$$

فرض کنید که ذره اول در دست آلیس ، ذره دوم در دست باب و ذره سوم در دست چارلی است. برای این سه نفر به ترتیب حروف A، B و C را به کار می بریم. هم چنین فرض می کنیم که این سه نفر هیچ نوع ارتباط علی با هم ندارند. هرگاه این سه نفر اندازه گیری های خود را در پایه Z انجام دهند به طور تصادفی به یکی از نتایج زیر دست می یابند:

$$Z_aZ_bZ_c = (1,1,1) \qquad \text{یا} \qquad Z_aZ_bZ_c = (-1,-1,-1) \tag{۵۷}$$

این امر نشان دهنده یک نوع همبستگی غیرموضعی بین سه کمیت فوق است. ولی ممکن است که این همبستگی ناشی از وجود متغیرهای پنهانی باشد که سه کمیت واقعی Z_a، Z_b و Z_c را از قبل به هم وابسته کرده است مثل حالتی که در دستکش های چپ و راست داشتیم. برای فهم عمیق تر این مسئله و نوع همبستگی ای که بین این سه ذره وجود دارد، فرض کنید که این سه نفر اندازه گیری های خود را در پایه دیگری انجام دهند. فرض کنید که دو نفر اول اندازه گیری خود را در راستای Y و نفر سوم در راستای X انجام دهند. برای تعیین نتایج اندازه گیری ها می بایست حالتِ $|GHZ\rangle$ ددر پایه مناسبی بسط دهیم. برای این

[۵] Greenberger

[۶] Horne

[۷] Zeilinger

کار از روابط آشنای زیر استفاده می کنیم:

$$|z+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x+\rangle + |x-\rangle) \qquad |z-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x+\rangle - |x-\rangle)$$
$$|z+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|y+\rangle + |y-\rangle) \qquad |z-\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}(|y+\rangle - |y-\rangle. \tag{۵۸}$$

با استفاده از روابط بالا می توان براحتی نشان داد که حالت $|GHZ\rangle$ بسط زیر را دارد:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}\left(|y+, y+, x-\rangle + |y+, y-, x+\rangle + |y-, y+, x+\rangle + |y-, y-, x-\rangle\right) \tag{۵۹}$$

دقت کنید که حاصل اندازه گیری این سه نفر در مورد مولفه های اسپین دارای یک خصلت ویژه است و آن اینکه حاصل ضرب مولفه های سه ذره در راستای مربوطه برابر است با -1 . به عبارت دیگر داریم

$$Y_aY_bX_c = -1. \tag{۶۰}$$

یعنی مقادیر این کمیت های واقعی فیزیکی آنچنان است که حاصل ضرب $Y_aY_bX_c$ همواره برابر با -1 است. اگر این سه نفر اندازه گیرهای خود را در راستاهای YXY یا XYY انجام می دادند و نتایجی مشابه بدست می آوردند که برای راحتی همه آنها را در رابطه‌ی زیر جمع می کنیم:

$$\begin{aligned} Y_aY_bX_c &= -1, \\ Y_aX_bY_c &= -1, \\ X_aY_bY_c &= -1. \end{aligned} \tag{۶۱}$$

اما ضرب این تساوی ها در هم به نتیجه زیر منجر می شود که

$$X_aX_bX_c = -1, \tag{۶۲}$$

که معنایش این است که سه خصلت X_a و X_b و X_c برای این سه ذره چنان هستند که حاصل ضرب آنها برابر با -1 است. اما اگر این حالت را در پایه‌ی XXX بسط دهیم نتیجه خلاف این خواهد بود. در واقع بسط حالت $|GHZ\rangle$ دراین پایه چنین است:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}\left(|x+, x+, x+\rangle + |x+, x-, x-\rangle + |x-, x+, x-\rangle + |x-, x-, x+\rangle\right). \tag{۶۳}$$

این بسط به این معناست که هرگاه روی سه ذره اندازه گیری های در پایه های فوق انجام دهیم همواره مقادیری که بدست می آوریم در رابطه $X_aX_bX_c = 1$ صدق می کند که آشکارا مخالف رابطه‌ی 62 است. بنابراین حالت های $|GHZ\rangle$ بدون نیاز

به متوسط گیری روی تعداد زیادی اندازه گیری ها فرض وجود متغیرهای پنهان موضعی را نقض می کنند. اخیراً آزمایشهایی گزارش شده‌است که در آنها روی حالت های GHZ اندازه گیری های فوق انجام شده اند و نتایج بدست آمده در توافق با مکانیک کوانتومی و ناقض متغیرهای پنهان هستند.

۶ حالت های GHZ و نا موضعیت

حالت های GHZ به شکل مستقیم تری خاصیت ناموضعی طبیعت را آشکار می کنند. این حالت ها در آزمایشگاه قابل تولید هستند و نتایج ناشی از آنها با آزمایش سازگار هستند. به همین دلیل می گوییم این حالت ها خاصیت ناموضعی طبیعت یا جهان بیرونی را و نه خاصیت غیرموضعی یک نظریه مثل مکانیک کوانتومی را آشکار می کنند. برای فهم این خاصیت بازهم یک بازی ساده را در نظر می گیریم. در این بازی که در شکل ۶ نشان داده شده است، پیام سه عدد x ، y و z را به سه نفر به نام های آرزو، بابک و حمید ارسال می کند. این سه عدد مقدارهای 0 و 1 را اختیار می کنند. آرزو ، بابک و حمید می بایست به ترتیب اعداد a ، b و c را به پیام ارسال کنند. قواعد بازی این ها هستند:

یک ـ اعدادی که پیام ارسال می کند در شرط زیر صدق می کنند:

$$x \oplus y \oplus z = 0, \qquad (۶۴)$$

بنابراین این اعداد فقط می توانند یکی از مجموعه های زیر باشند:

$$(x,\ y,\ z) \in \{(0\ 0\ 0),\ (0\ 1\ 1),\ (1\ 0\ 1),\ (1\ 1\ 0)\} \qquad (۶۵)$$

دو ـ آرزو، بابک و حمید می توانند قبل از شروع بازی هر نوع استراتژی که می خواهند برای خود انتخاب کنند ولی در هنگام بازی این سه نفر هیچ نوع ارتباط علی با هم ندارند به این معنا که نمی توانند از بیت هایی که دریافت می کنند و یا بیت هایی که به پیام ارسال می کنند اطلاع حاصل کنند. هرکسی فقط بیتی را که خودش از پیام دریافت کرده و بیتی را که خودش

به پیام می فرستد می شناسد. هم چنین هیچ گونه امکان تبادل نظر بین آنها وجود ندارد. به عبارت بهتر هرکدام از این سه نفر یک مهلت برای ارسال بیت خود دارد و این مهلت چنان تنظیم شده است که امکان هیچ گونه ارتباط بین گیرندگان وجود نداشته باشد.

سه ـ هر دور بازی وقتی برده می شود که شرط زیر برقرار شود:

$$a \oplus b \oplus c = x \vee y \vee z, \tag{۶۶}$$

که در آن $\vee$ به معنای یای منطقی بین این سه بیت است.

سوال این است که آیا آرزو ، بابک و حمید می توانند یک استراتژی انتخاب کنند که همواره بازی فوق را ببرند؟ پاسخ این سوال منفی است. برای فهم این پاسخ بیت های ارسال شده توسط آروز را با a_0 و a_1 نشان می دهیم که در آن a_0 بیتی است که آرزو ارسال می کند وقتی که بیت 0 را دریافت کرده باشد (یعنی $x = 0$ باشد) و a_1 بیتی است که آرزو ارسال می کند وقتی که بیت 1 را دریافت کرده باشد (یعنی $x = 1$ باشد). همینطور بیت های b_0 ، b_1 ، c_0 و c_1 را تعریف می کنیم. در این صورت شرط این که تحت هر شرایطی (به ازای هر نوع بیت های دریافتی از طرف پیام) این سه نفر بازی را ببرند این است که هر چهار رابطه زیر همزمان برقرار باشند:

$$\begin{aligned} a_0 \oplus b_0 \oplus c_0 &= 0, \\ a_0 \oplus b_1 \oplus c_1 &= 1, \\ a_1 \oplus b_0 \oplus c_1 &= 1, \\ a_1 \oplus b_1 \oplus c_0 &= 1. \end{aligned} \tag{۶۷}$$

اما واضح است که هرچهار معادله را همزمان نمی توان برقرار کرد زیرا جمع طرف چپ برابر است با 0 و حال آنکه جمع طرف راست برابر است با 1. بهترین کاری که این سه نفر می توانند انجام بدهند این است که قبل از بازی تصمیم بگیرند که یکی از این معادله ها را نقض و سه دیگر را برقرار کنند و به این ترتیب در سه چهارم موارد می توانند بازی را ببرند. دقت کنید که اگر این سه نفر بتوانند با هم ارتباط علی برقرار کنند آنگاه همواره می توانند معادله ۶۶ را حل کنند و بازی را ببرند.

اما نکته شگفت انگیز این جاست که اگر این سه نفر قبل از هر دور بازی یک حالت GHZ به اشتراک گذاشته باشند و هیچ گونه ارتباط علی نیز در حین بازی نداشته باشند می توانند همواره بازی را ببرند. می دانیم که حالت GHZ دارای یک خاصیت ناموضعی است و این خاصیت ناموضعی به هیچ وجه به معنای ارتباط علی نیست یعنی با استفاده از این حالت این اشخاص نمی توانند با هم اطلاعاتی را مخابره کنند ولی با این وجود دسترسی به این حالت منجر به این می شود که این سه نفر بتوانند بازی ای را همواره ببرند که تنها با داشتن ارتباط علی قابل حصول است. این استراتژی که در آن از یک منبع کوانتومی مثل درهم تنیدگی استفاده می شود یک استراتژی کوانتومی است. به این منظور این سه نفر یک حالت درهم تنیده به این شکل به اشتراک می گذارند:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|y_+, y_+, y_+\rangle + |y_-, y_-, y_-\rangle), \tag{۶۸}$$

که در آن کیوبیت اول ، دوم و سوم به ترتیب در اختیار آرزو، بابک و حمید است.

حال استراتژی ای که سه نفر اختیار می کنند به این نحو است که اگر هرکدام بیت 0 دریافت کرد، روی حالت فوق درپایه 0 و 1 یا پایه z اندازه گیری کرده و همان چیزی را که اندازه می گیرد به پیام می فرستد. و اگر بیت یک را دریافت کرد، آنگاه کیوبیت خود را در پایه X اندازه می گیرد و همان چیزی را که دریافت می کند به پیام می فرستد. با دنبال کردن این استراتژی می توان نشان داد که آنها همواره بازی را می برند.

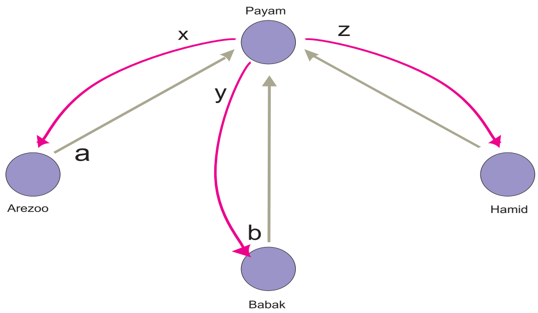
تمرین: نشان دهید که حالت فوق را اگر در پایه ZZZ بنویسید به شکل زیر در می آید:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}(|0,0,0\rangle - |0,1,1\rangle - |1,0,1\rangle - |1,1,0\rangle). \tag{۶۹}$$

تمرین: نشان دهید که اگر حالت ۶۸را در پایه XXZ بنویسید به شکل زیر در می آید:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}(|\bar{1},\bar{0},0\rangle + |\bar{0},\bar{1},0\rangle + |\bar{0},\bar{0},1\rangle + |\bar{1},\bar{1},1\rangle) \tag{۷۰}$$

که در آن منظور از $|\bar{0}\rangle$ حالت $|x_+\rangle$ و منظور از $|\bar{1}\rangle$ حالت $|x_-\rangle$ است.



شکل ۳: بازی کوانتومی برای حالت های GHZ.

حال به حالت های ۶۹ و ۷۰ نگاه می کنیم. اگر بیت های دریافتی توسط سه نفر برابر با 000 باشد هر سه نفر در پایه z اندازه گیری می کنند و بنابر رابطه ۶۹ آنچه که اندازه می گیرند و مطابق با استراتژی فوق ارسال می کنند در رابطه $a \oplus b \oplus c = 0$ صدق می کند. حال فرض کنید که آرزو و بابک بیت 1 دریافت می کنند و حمید بیت 0 دریافت می کند. در این صورت مطابق با استراتژی فوق آنها در پایه xxz اندازه می گیرند و در نتیجه مطابق با حالت ۷۰ نتیجه اندازه گیری شان در رابطه $a \oplus b \oplus c = 1$ صدق می کند. بنابرتقارن اگر بیت هایی که در یافت می کنند به صورت 011 یا 101 نیز باشد بازهمین نتیجه حاصل می شود. بنابراین این سه نفر می توانند همواره بازی را ببرند. به این ترتیب و با استفاده از یک استراتژی کوانتومی می توانند از خاصیت ناموضعی کوانتومی استفاده کنند و بازی ای را که به جز مبادله اطلاعات کوانتومی و ارتباط علی نمی توانستند، همواره ببرند.

۷ تمرین ها:

.

۱ ـ **قضیه بل برای بیش از دو مشاهده پذیر:** فرض کنید که آلیس مشاهده پذیرهای $A_1,\ A_3, \cdots A_{2n-1}$ و باب مشاهده پذیرهای $B_2,\ B_4, \cdots B_{2n}$ را اندازه می گیرند. مقادیر مشاهده پذیرهای A_i و B_j را با a_i و b_j نشان می دهیم. این مقادیر نیز ± 1 هستند.

الف: ثابت کنید که همواره نامساوی زیر برقراراست

$$|a_1b_2 + b_2a_3 + a_3b_4 + b_4a_5 + \cdots a_{2n-1}b_{2n} - b_{2n}a_1| \leq 2n - 2, \tag{۷۱}$$

و از آن نتیجه بگیرید که متوسط این مقادیر همواره در رابطه زیر صدق می کند:

$$|\langle a_1b_2 + b_2a_3 + a_3b_4 + b_4a_5 + \cdots a_{2n-1}b_{2n} - b_{2n}a_1|\rangle \leq 2n - 2. \tag{۷۲}$$

ب: حال یک حالت درهم تنیده مثل

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+, z-\rangle - |z-, z+\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 1\rangle - |1, 0\rangle)$$

را در نظر بگیرید. مشاهده پذیرهای A_i و B_i را به شکل زیر تعریف کنید:

$$A_i := \mathbf{a}_i \cdot \vec{\sigma}_A, \qquad B_i := \mathbf{b}_i \cdot \vec{\sigma}_B. \tag{۷۳}$$

یعنی اینکه اندازه گیری A_i به معنی اندازه گیری اسپین ذره آلیس در راستای $\mathbf{a}_i$ و اندازه گیری B_i اندازه گیری اسپین ذره باب در راستای $\mathbf{b}_i$ است.

فرض کنید که بردارهای $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{b}_2$ ، $\mathbf{a}_3$ ، $\mathbf{b}_4$ تا $\mathbf{b}_{2n}$ به طور یکنواخت چیده شده باشند و فاصله هر دو بردار متوالی برابر با θ باشد. مقداری را که مکانیک کوانتومی برای متوسط

$$|\langle\psi|A_1B_2 + B_2A_3 + A_3B_4 + B_4A_5 + \cdots A_{2n-1}B_{2n} - B_{2n}A_1|\psi\rangle| \tag{۷۴}$$

پیش بینی می کند چقدراست؟ به ازای چه مقداری از θ این مقدار ماکزیمم می شود. این مقدار چقدر از مقداری که توسط نامساوی تعمیم یافته‌ی $CHSH$ یعنی 72 بدست آمده است بیشتر است؟

۲ ـ **نامساوی بل برای فضای N بعدی** . برای سادگی N را زوج می گیریم. فرض کنید که یک حالت درهم تنیده به صورت $|\psi\rangle \in H_A \otimes H_B$ داریم که هرکدام از فضاهای H_A و H_B، N بعدی هستند. حالتِ $|\psi\rangle$ دارای تجزیه اشمیت زیر است:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i v_i \otimes w_i, \tag{۷۵}$$

که درآن $\{v_i\}$ و $\{w_i\}$ به ترتیب پایه های متعامد یکه برای H_A و H_B هستند و c_i ها اعداد نامنفی هستند. طبعی است که این اعداد را می توان به شکل زیر مرتب کرد: $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \cdots \geq c_N$. حال ماتریس های بلوکه قطری زیر را در نظر بگیرید

که در آن σ_x و σ_z ماتریس های پاوولی هستند:

$$\Gamma_x = block\ diagonal\,(\sigma_x, \sigma_x, \sigma_x, \cdots, \sigma_x,)\,, \qquad ,\Gamma_z = block\ diagonal\,(\sigma_z, \sigma_z, \sigma_z, \cdots, \sigma_z,)\,. \tag{۷۶}$$

مشاهده پذیر های $A(\alpha)$ و $B(\beta)$ را به شکل زیر تعریف کنید:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \Gamma_x \sin\alpha + \Gamma_z \cos\alpha, \\ B(\beta) &= \Gamma_x \sin\beta + \Gamma_z \cos\beta. \end{aligned} \tag{۷۷}$$

نشان دهید که

$$\langle ab\rangle := \langle\psi|A(\alpha)\otimes B(\beta)|\psi\rangle = (1-\gamma)\cos\alpha\cos\beta + \gamma + K\sin\alpha\sin\beta, \tag{۷۸}$$

که درآن

$$K = 2(c_1c_2 + c_3c_4 + \cdots), \qquad \gamma = c_N^2.$$

سپس مقادیر زاویه ها را به شکل زیر در نظر بگیرید و طرف راست نامساوی $CHSH$ را برای آن حساب کنید:

$$\alpha = 0, \quad \alpha' = \pi/2, \quad \beta = -\beta'. \tag{۷۹}$$

نشان دهید که هرگاه قرار دهیم $\beta = \tan^{-1}(\frac{K}{1-\gamma})$، آنگاه خواهیم داشت

$$\langle ab + a'b + ab' - a'b'\rangle = \langle\psi|A(\alpha)\otimes B(\beta) + A(\alpha')\otimes B(\beta) + A(\alpha)\otimes B(\beta') - A(\alpha')\otimes B(\beta')|\psi\rangle > 2. \tag{۸۰}$$

۳ ـ **حالت های GHZ و یک نامساوی بل برای آنها** حالت n تایی GHZ را در نظر بگیرید:

$$|GHZ_n\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\cdots 0\rangle + |111\cdots 1\rangle\right). \tag{۸۱}$$

الف: تحقیق کنید که این حالت ویژه بردار همزمان عملگرهای زیراست:

$$\begin{aligned} & z\otimes z\otimes I\otimes I\otimes I\cdots I\otimes I \\ & I\otimes z\otimes z\otimes I\otimes I\cdots I\otimes I \\ & I\otimes I\otimes z\otimes z\otimes I\cdots I\otimes I \\ & \cdots \\ & I\otimes I\otimes I\otimes I\otimes I\cdots z\otimes z \end{aligned}$$

$$x \otimes x \otimes x \otimes x \otimes x \cdots x \otimes x. \qquad (۸۲)$$

ب: نشان دهید که این حالت ویژه بردار عملگر زیراست و ویژه مقدارآن را بدست آورید:

$$A := (x+iy)^{\otimes n} + (x-iy)^{\otimes n}. \qquad (۸۳)$$

پ: اگر به متغیرهای پنهان اعتقاد داشته باشیم، باید قبول کنیم که برای یک مقدار معین از متغیرهای پنهان ، مشاهده پذیرهای x و y همزمان مقدارهای معینی دارند. اگر چنین باشد، اندازه (یا قدر مطلق) مشاهده پذیرهای $(x+iy)^{\otimes n}$ و $(x-iy)^{\otimes n}$ چقدراست. با توجه به این مقدارها، مشاهده پذیر A یک مقدار ماکزیمم خواهد داشت. این مقدار ماکزیمم را بدست آورید. نتیجه خود را با آنچه که در قسمت ب بدست آوردید مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می گیرید؟

۴ ـ یک راه برای آنکه نشان دهیم حالت های بل واقعاً دارای خاصیتِ غیر موضعی هستند این است که نشان دهیم با اندازه گیری های موضعی هرگز نمی توان حالت های بل را از یک دیگر تشخیص داد. صحت این موضوع را تحقیق کنید.

۵ ـ حالتِ $\rho = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که این حالت را می توان به صورت مخلوطی از دو حالت بل نیز نوشت.