

تمرین سری سیزدهم درس مکانیک کوانتومی

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

موعد تحویل: سه شنبه، ۶ آذرماه ۱۳۸۶

۱- در لحظه $t = 0$ یک ذره باردار به جرم m و بار الکتریکی e در حالت

$$|\psi(0)\rangle = A \int dp e^{-ap^2} |p, +\rangle + B \int dp e^{-bp^2} |p, -\rangle, \quad (1)$$

قرار دارد که در آن A و B متادیر ثابت و $|\pm\rangle$ ویژه حالت های S_z هستند. این ذره در سه بعد حرکت می کند و تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی یک نواخت به اندازه B نیز هست.

الف: ثابت های A و B را برحسب پارامترهای a و b پیدا کنید.

ب: حالت ذره را در لحظه دلخواه t بدست آورید.

ج: اگر در لحظه t تکانه ذره را اندازه بگیریم، چگالی احتمالی این که تکانه را صفر بدست بیاوریم چقدر است؟

د: اگر در لحظه t مکان ذره را اندازه بگیریم، احتمال اینکه آن را در داخل کره ای به شعاع $1/R$ پیدا کنیم چقدر است؟

ه: اگر در لحظه t اسپین ذره را در راستای x اندازه بگیریم، احتمال این که اندازه آن را $+\hbar/2$ بدست بیاوریم چقدر است؟

۲- هامیلتونی یک ذره اسپین یک دوم به صورت زیر است:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 - \mathcal{E} X \sigma_z. \quad (2)$$

می توان تصور کرد که این هامیلتونی حرکت یک ذره را در یک پتانسیل هارمونیک نشان می دهد که در عین حال تحت تاثیر یک نیروی الکتریکی قرار دارد، اما مقدار این نیروی الکتریکی به جهت اسپین ذره نیز بستگی دارد.

الف: ویژه حالت ها و ویژه انرژی های این ذره را بدست آورید. آیا حالت های انرژی واگنی دارند؟ (راهنمایی: هامیلتونی را به صورت یک ماتریس دو بعدی و قطری بنویسید که هر کدام از درایه های آن یک نوسانگر هارمونیک معمولی است.)

فرض کنید که ذره در لحظه صفر در حالت زیر قرار دارد:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |1\rangle \\ |0\rangle \end{pmatrix} \quad (3)$$

که در آن $|1\rangle$ و $|0\rangle$ ویژه حالت های نوسانگرهای هارمونیک هستند. (دقت کنید که این دو نوسانگر یکسان نیستند.) حال به سوالات زیر پاسخ دهید:

ب: اگر اسپین ذره را در راستای x اندازه گیری کنیم، احتمال اینکه مقدار آن را $\frac{\hbar}{2}$ بدست آوریم چقدر است؟

ج: اگر مکان ذره را اندازه گیری کنیم، احتمال آنکه آن را در فاصله $(-R, R)$ پیدا کنیم چقدر است؟

د: اگر بجای لحظه $t = 0$ در لحظه t اندازه گیری اسپین را در راستای x انجام دهیم، احتمال آن که مقدار آن $\frac{\hbar}{2}$ بدست آوریم چقدر خواهد بود.

۳- یک ذره اسپین $1/2$ در حالت زیر قرار دارد.

$$\Psi(r) = \begin{pmatrix} \psi_+(r) \\ \psi_-(r) \end{pmatrix} \quad (4)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \psi_+(r) &= R(r) \left[Y_{0,0}(\theta, \phi) + \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{1,0}(\theta, \phi) \right] \\ \psi_-(r) &= \frac{R(r)}{\sqrt{3}} [Y_{1,1}(\theta, \phi) - Y_{1,0}(\theta, \phi)]. \end{aligned} \quad (5)$$

الف: تابع $R(r)$ چه شرایطی می بایست داشته باشد تا حالت $\Psi(r)$ بهنجار باشد؟

ب: اگر اسپین ذره را در راستای z اندازه بگیریم، چه نتایجی و با چه احتمالاتی بدست خواهد آمد؟

ج: اگر تکانه زاویه‌ای L_z را اندازه بگیریم، چه مقادیری و با چه احتمالاتی بدست می‌آید؟

د: اندازه‌گیری تکانه زاویه‌ای کل این ذره یعنی L^2 مقدار صفر را بدست داده‌است. بلافاصله بعد از این اندازه‌گیری حالت ذره چیست؟ اگر این اندازه‌گیری به جای مقدار صفر، مقدار $2\hbar^2$ را بدست داده بود، حالت بلافاصله بعد از اندازه‌گیری چه حالتی می‌بود؟