

درس بیست و پنجم: پراکندگی در سه بعد

۱ مقدمه

بیشترین اطلاعاتی تاکنون از ساختمان اتم ها، هسته ها، هستک ها و ذرات و نیروهای بین آنها گرد آورده ایم از آزمایش های پراکندگی بدست آمده است. در یک آزمایش پراکندگی باریکه ای از ذرات تابنده با تکانه بسیار نزدیک به هم به ذرات هدف برخورد می کند. بسته به انرژی ذرات تابنده و نیروی بین ذره تابنده و ذره هدف، ذرات تابنده در زوایای مختلف پراکنده می شوند. برای ذرات تابنده با انرژی معین، طرح پراکندگی بستگی به شکل پتانسیل دارد. به یک معنا که در این درس به آن پی خواهیم برد، طرح پراکندگی تصویری از پتانسیل بین ذره تابنده و ذره هدف است. در این درس مسئله پراکندگی در سه بعد را بررسی می کنیم. این بررسی یک بررسی مقدماتی است. نخست باید تعریف دقیقی از اصطلاح سطح مقطع پراکندگی ارائه دهیم. از آنجا که این اصطلاح یک اصطلاح تجربی و آزمایشگاهی است، برای پراکندگی کلاسیک و کوانتومی به یکسان بکار می رود، اگر چه نحوه محاسبه آن متفاوت است.

سطح مقطع جزئی جهت تابش ذرات تابنده به هدف را k نشان می دهیم. فرض کنید که تعداد ذرات تابنده ای که در واحد زمان از واحد سطح عمود بر k می گذرند برابر باشد با I_0 . از آنجا که جهت سطح را عمود بر جهت حرکت ذرات تابنده گرفته ایم مقدار عددی I_0 با مقدار J_0 یعنی چگالی جریان ذرات برابر است اگر چه دیمانسیون آنها با هم متفاوت است.

$$I_0 = J_0 \quad (1)$$

تعداد ذراتی که در واحد زمان به المان زاویه فضایی $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ پراکنده می شوند برابر باشد با $dI(\theta, \phi)$. در واقع دهانه زاویه ای آشکارساز ما را تعیین می کند. مسلم است که dI متناسب است با I_0 . زیرا هرچه که تعداد ذرات باریکه تابنده بیشتر باشد، تعداد ذراتی که در هر جهتی پراکنده می شود نیز به همان نسبت بیشتر است. هم چنین، dI متناسب با اندازه زاویه ای فضایی $d\Omega$ است، زیرا هرچه که دهانه آشکارساز بیشتر باشد به همان نسبت تعداد بیشتری ذرات را آشکار می کند. بنابراین نسبت $\frac{I(\theta, \phi)}{I_0 d\Omega}$ تنها به پتانسیل پراکندگی و مشخصات ذرات بستگی دارد و هم چنین زاویه پراکندگی بستگی دارد. این نسبت در ضمن دارای بعد مساحت است. این نسبت را با $\sigma(\theta, \phi)$ نشان می دهیم. بنابراین می نویسیم

$$dI(\theta, \phi) = \sigma(\theta, \phi) I_0 d\Omega. \quad (2)$$

$\sigma(\theta, \phi)$ سطح مقطع پراکندگی جزئی نامیده می شود. سطح مقطع پراکندگی کلی عبارت است از تعداد کل ذراتی که در زوایای گوناگون پراکنده می شوند و به طریق زیر بدست می آید:

$$\sigma := \frac{1}{I_0} \int dI(\theta, \phi) = \int \sigma(\theta, \phi) d\theta d\phi. \quad (3)$$

در این فصل ما توجه خود را به حل مسئله پراکندگی برای پتانسیل های دارای تقارن کروی معطوف می کنیم. بنابراین ذره تابنده تحت تاثیر هامیلتونی زیر قرار می گیرد:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(r) \equiv H_0 + V(r), \quad (4)$$

که در آن μ جرم ذره است. فرض کرده ایم که ذره هدف ساکن است. نخست یک راه ساده برای حل مسئله پراکندگی پیشنهاد می کنیم. در این راه تنها ویژه حالت هایی را از هامیلتونی فوق پیدا می کنیم که در شرایط مرزی مناسب برای مسئله پراکندگی صدق کنند. در این راه حل هیچ نوع تحول زمانی وجود ندارد زیرا با یک ویژه حالت هامیلتونی سروکار داریم ولی می توانیم با داشتن این ویژه حالت ها سطح مقطع پراکندگی را پیدا کنیم. سپس در بخش بعد به تحول زمانی یک بسته موج می پردازیم و نشان می دهیم که آنچه را که با راه حل ساده خود بدست آورده ایم واقعاً همان چیزی است که با راه حل دقیق نیز بدست می آید.

۲ یک نگرش ساده بر پراکندگی در سه بعد

آنچه که در آزمایشگاه واقعاً رخ می دهد آن است که گروهی از ذرات بادقت نسبی هم جهت و هم سرعت شده و به سوی هدف تابنده می شوند. بنابراین در لحظه صفر حالت یک ذره تابنده چیزی نیست جز یک بسته موج که با تابع زیر تعریف می شود

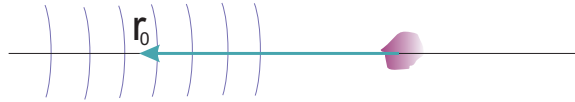
$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \int d^3k \phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}, \quad (5)$$

و در آن تابع $\phi(\mathbf{k})$ تابعی است که در یک نقطه مثل k_0 دارای بیشینه است و پهنای آن نسبت به k_0 بسیار کم است:

$$\frac{\Delta k}{k_0} \ll 1. \quad (6)$$

بنابراین سرعت حرکت این بسته موج برابر است با $v_0 = \frac{\hbar k_0}{m}$. در لحظه $t = 0$ مرکز بسته موج در نقطه \mathbf{r}_0 است. شکل ۱ بسته موج را در لحظه اولیه نشان می دهد.

برای آن که مسئله پراکندگی را به طور دقیق حل کنیم می بایست تحول این بسته موج را به دقت تعیین کنیم و ببینیم که وقتی که عمل گر $U = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}$ روی آن اثر می کند به چه شکل درمی آید. این کاری است که در بخش بعدی انجام خواهیم داد. در این بخش می خواهیم راه ساده تری را دنبال کنیم. وقتی که در بخش بعدی مسئله پراکندی را حل کردیم خواهیم دید که نتایج اش با این نتایج این راه ساده یکسان خواهد بود. این راه ساده تر بازم الهام گرفته از وضعیت آزمایشی است و متکی بر خطی بودن مکانیک کوانتومی است. فرض می کنیم که جریانی همیشگی و مداوم از ذرات که با امواج تخت توصیف می شوند به پتانسیل می تابند و به صورت امواج کروی پراکنده می شوند. چنین وضعیتی بنا بر همیشگی و مداوم بودن آن بستگی زمانی ندارد. بنابراین مثل این است که با یک ویژه حالت هامیلتونی سروکار داریم. بنابراین در این راه ساده تر بجای آنکه تحول زمانی



شکل ۱: بسته موجی که نشان دهنده ذره تابنده به سوی هدف است.

یک بسته موج را پیدا کنیم بدنبال ویژه حالت هایی از هامیلتونی هستیم که ترکیبی از امواج تخت با تکانه مشخص k_0 و امواج کروی برون رو باشند. آیا چنین ویژه حالت هایی وجود دارند؟ دربخش بعدی نشان خواهیم داد که واقعاً چنین ویژه حالت هایی وجود دارند و قیافه آن ها برای r های بزرگ یعنی r هایی که از برد پتانسیل بسیار بزرگ ترند، به شکل زیر است:

$$\psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \frac{e^{ikr}}{r} \right). \quad (7)$$

برای آنکه انرژی این ویژه حالت ها را پیدا کنیم کافی است که H را روی آنها اثر دهیم. باتوجه به اینکه در r های بسیار بزرگ جمله دوم این ویژه حالت قابل صرف نظر کردن می شود و هم چنین با توجه به این نکته که $V(r)$ نیز به سمت صفر میل می کند، نتیجه می گیریم که

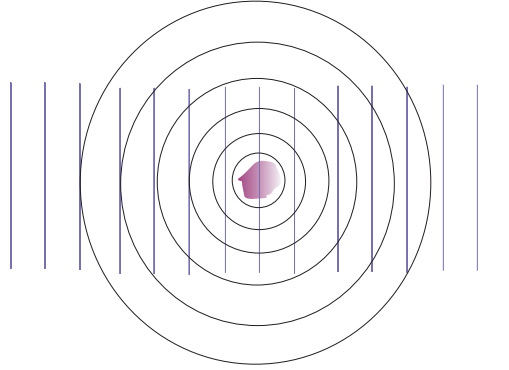
$$H\psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r}) = E\psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r}), \quad (8)$$

$$.E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \text{ در آن}$$

این تابع ترکیبی از دو تابع موج است. اولی یک موج تخت است با بردار موج \mathbf{k} که نشان دهنده ذره ای است که در جهت \mathbf{k} حرکت می کند. دومی یک موج کروی است که بدلیل کروی بودن دامنه آن به صورت $\frac{1}{r}$ کم می شود. دامنه آن البته متناسب است با $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ که به این معناست که دامنه آن بستگی به جهت نسبی بردار \mathbf{k} و بردار \mathbf{r} دارد. هرگاه جهت \mathbf{k} را جهت تکانه ذره تابنده بگیریم این ویژه حالت ها بخوبی نشان دهنده ویژه حالت هایی هستند که با شرایط مرزی مسئله پراکندگی توافق دارند. برای درک این نکته کافی است که تحول زمانی این ویژه حالت ها را در نظر بگیریم که آنها را به شکل زیر درمی آورد:

$$\psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r}, t) \sim \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} + f_{\mathbf{k}}(\hat{r}) \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} \right). \quad (9)$$

که در آن $\omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2\mu}$ بخصوص وقتی که \mathbf{k} را در جهت \hat{z} بگیریم این ویژه تابع را می توانیم به شکل زیر نشان دهیم:



شکل ۲: تابع موج $\psi_{\mathbf{k}}^+(r)$.

$$\psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r}, t) \sim \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(e^{ikz - i\omega t} + f_{\mathbf{k}}(\theta, \phi) \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} \right) = \psi_{in} + \psi_{sc}. \quad (10)$$

این موج ترکیبی از یک موج تخت است که در جهت مثبت z (یعنی جهت ذرات تابنده) در حال حرکت است و یک موج کروی که از مرکز به سمت بیرون دور می شود. بنابراین موج کروی را می توان ناشی از پراکنده شدن موج تخت اولیه در اثر برخورد با پتانسیل دانست، شکل ۲.

۱.۲ محاسبه سطح/مقطع پراکندگی

می توانیم برای هر یک از این دو موج چگالی جریان را محاسبه کنیم. برای موج تخت چگالی جریان متناسب با I_0 است و برابر است با:

$$J_{in} = \frac{\hbar}{2im} (\psi_{in}^* \nabla \psi_{in} - \psi_{in} \nabla \psi_{in}^*) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar k}{m} \hat{z}. \quad (11)$$

برای موج پراکنده شده دقت می کنیم که در دستگاه مختصات کروی عملگر ∇ به شکل زیر است

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (12)$$

با قرار دادن این عملگر در رابطه زیر

$$J_{sc} = \frac{\hbar}{2im} (\psi_{sc}^* \nabla \psi_{sc} - \psi_{sc} \nabla \psi_{sc}^*) \quad (13)$$

و نگاه داشتن جملات غالب در r های بزرگ بدست می آوریم

$$J_{sc} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{|f_{\mathbf{k}}|^2 \hbar k}{r^2 m} \hat{r}. \quad (14)$$

بادردست داشتن این دو جریان می توانیم سطح مقطع پراکندگی را بدست آوریم. با توجه به تعریف 2 داریم

$$\sigma(\theta, \phi) = \frac{dI(\theta, \phi)}{I_0 d\Omega} = \frac{J_{sc} r^2 d\Omega}{I_0 d\Omega} = \frac{J_{sc} r^2}{J_{in}} = |f_{\mathbf{k}}(\theta, \phi)|^2. \quad (15)$$

بنابراین سطح مقطع پراکندگی همان تابع $|f|^2$ است. در این بخش دو سوال باقی مانده است. اول اینکه f برحسب پتانسیل و انرژی ذرات تابنده چیست، دوم آنکه چگونه می توانیم ثابت کنیم که هامیلتونی H دارای ویژه حالت هایی مثل (7) است.

۲.۲ ویژه تابع های هامیلتونی

می خواهیم ویژه تابع هایی از هامیلتونی (4) با انرژی $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ پیدا کنیم. برای این کار معادله شرودینگر مستقل از زمان را به صورت زیر می نویسیم:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \quad (16)$$

که در آن $U = \frac{2\mu V}{\hbar^2}$. این چنین معادله ای را می توان با کمک گرفتن از توابع گرین حل کرد. برای عملگر $\nabla^2 + k^2$ تابع گرین، تابعی است که در معادله زیر صدق کند:

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (17)$$

با داشتن یک تابع گرین و نوشتن معادله (16) به صورت

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = \int U(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')d^3r' \quad (18)$$

و استفاده از خطی بودن معادله (16) همواره می توان حل عمومی آن را به شکل زیر نوشت:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_h(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')U(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'. \quad (19)$$

در این حل $\psi_h(\mathbf{r})$ یک حل عمومی از معادله همگن یعنی معادله $(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = 0$ است. نخست تابع گرین را پیدا می کنیم. این تابع با بسط فوریه $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ و $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ در طرفین (16) یافته می شود. داریم

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}, \quad G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q G(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \quad (20)$$

بنابراین معادله (16) به صورت زیر درمی آید:

$$(-q^2 + k^2)G(\mathbf{q}) = -4\pi \quad (21)$$

که حل زیر را به دنبال خواهد داشت:

$$G(\mathbf{q}) = \frac{4\pi}{q^2 - k^2}. \quad (22)$$

این حل در نقاطی از صفحه \mathbf{q} که در شرط $q^2 = k^2$ صدق کنند دارای تکینگی است. این تکینگی ناشی از این است که ما سعی کرده ایم عملگر $(\nabla^2 + k^2)$ که یک عملگر وارون ناپذیر است، وارون کنیم. درحقیقت توابع $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ویژه بردار این تابع با ویژه مقدار صفر هستند. راه فرار از این تکینگی ها آن است که $G(\mathbf{q})$ را به عنوان حدی از یک خانواده تابع گرین خوش تعریف در نظر بگیریم. به عنوان مثال می توانیم خانواده زیر را تعریف کنیم:

$$G_{+\epsilon}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi}{q^2 - k^2 - i\epsilon} \quad (23)$$

و قرار دهیم $G(\mathbf{q}) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_{+\epsilon}(\mathbf{q})$. نحوه حدگیری از تابع گرین، چنانکه خواهیم دید، شرایط مرزی معینی را روی تابع گرین اعمال خواهد کرد و ما می بایست با توجه به شرط مرزی مناسبی که احتیاج داریم، حدگیری را انجام دهیم. باین مقدمات تابع $G_{+\epsilon}$ را محاسبه می کنیم. داریم

$$\begin{aligned} G_{+\epsilon}(\mathbf{r}) &= 4\pi \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{q^2 - k^2 - i\epsilon} = \frac{1}{2\pi^2} \int q^2 dq d\cos\theta d\phi \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{q^2 - k^2 - i\epsilon} \\ &= \frac{1}{\pi} \int q^2 dq d\cos\theta \frac{e^{iqr\cos\theta}}{q^2 - k^2 - i\epsilon} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty q^2 dq \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \frac{1}{q^2 - k^2 - i\epsilon} \\ &= \frac{1}{i\pi r} \int_{-\infty}^\infty dq q e^{iqr} \frac{1}{q^2 - k^2 - i\epsilon} = \frac{-1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_{-\infty}^\infty dq e^{iqr} \frac{1}{q^2 - k^2 - i\epsilon} =: \frac{-1}{\pi r} \frac{d}{dr} I(r). \end{aligned} \quad (24)$$

انتگرال روی q را می توانیم به روش باقیمانده ها حساب کنیم. نخست قطب های انتگرال ده را پیدا می کنیم. برای این کار می نویسیم

$$q^2 = k^2 + i\epsilon \quad \longrightarrow \quad q = \pm k \left(1 + \frac{i\epsilon}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm \left(k + \frac{i\epsilon}{2k}\right) \equiv \pm(k + i\epsilon). \quad (25)$$

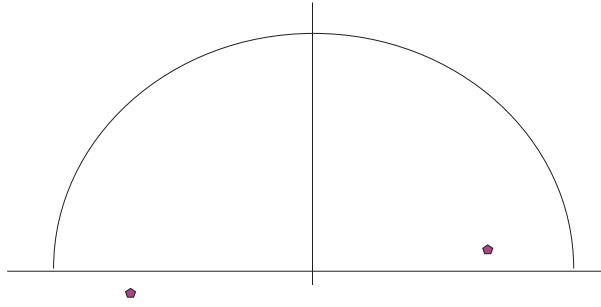
شکل (۳) محل قطب ها را نشان می دهد. حال می توان انتگرال را به صورت زیر حساب کرد:

$$I(r) = \int_{-\infty}^\infty dq e^{iqr} \frac{1}{q^2 - k^2 - i\epsilon} = 2\pi i \text{Rez} \left(e^{iqr} \frac{1}{q^2 - k^2 - i\epsilon} \right)_{q=k+i\epsilon} = 2\pi i \frac{e^{ikr}}{2k} \quad (26)$$

بنابراین بدست می آوریم:

$$G_+(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (27)$$

و یا



شکل ۳: کانتورانتگرال را روی هرکدام از نیمدایره های بالا یا می توان بست. زیرا انتگرال روی این نیمدایره ها برابر با صفر است. اگر ϵ را منفی می گرفتیم قطب سمت چپ در داخل کانتور و قطب سمت راست در خارج آن قرار می گرفت و یک تابع گرین درون رو (موجی که از بی نهایت به طرف مرکز حرکت می کند) بدست می آوردیم.

$$G_+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (28)$$

حال ویژه تابع هامیلتونی با انتخابی که به فرم $\phi_h(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{ikz}$ برای قسمت همگن جواب می کنیم به شکل زیر درمی آید:

$$\psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (29)$$

اما قسمت غیر همگن یعنی جمله دوم را می توان برای $r' \gg r$ به شکل ساده تری نوشت. برای این کار درمخرج تقریب $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r$ را به کار می بریم. اما در صورت بدلیل اینکه $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ در آرگومان یک فاز قرار گرفته است و تغییرات این فاز می تواند بسیار سریع باشد می بایست احتیاط بیشتری به خرج دهیم:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^{\frac{1}{2}} \approx (r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^{\frac{1}{2}} \approx r - \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'. \quad (30)$$

بنابراین قرار می دهیم

$$e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx e^{ikr - ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}. \quad (31)$$

در نتیجه بدست می آوریم

$$\psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} f_{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (32)$$

که در آن

$$f_{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r}') d^3r'. \quad (33)$$

دیده می شود که f تابعی از جهت بردار \mathbf{r} و هم چنین انرژی ذره یعنی k است. بنابراین یک نماد مناسب برای آن $f_{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{r}})$ یا $f_{\mathbf{k}}(\theta, \phi)$ است.

۳.۲ تقریب بورن

نشان دادیم که واقعا ویژه حالت هایی از هامیلتونی با شرایط مرزی مناسب برای مسئله پراکندگی وجود دارند و شکل این توابع را به دست آوردیم. رابطه 33 تابع $f(\mathbf{r})$ را نشان می دهد. اما این تابع به شکل ضمنی داده شده است به این معنا که در طرف راست آن $\psi_{\mathbf{k}}^+$ وجود دارد. این امر به این معناست که تابع 32 به صورت یک رابطه تکرار است که می توان آن را به صورت یک سری نیز نوشت. در تقریب موسوم به بورن که کاربرد بسیار وسیعی در مسائل پراکندگی دارد، تنها جمله اول این بسط در نظر گرفته می شود. به این معنا که قرار می دهیم که در آن

$$f_{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d^3r'. \quad (34)$$

در این تقریب تابع f معنای خیلی ساده ای دارد. هرگاه تکانه ذره پراکنده شده را با \mathbf{k}' و تکانه ذره تابنده را با \mathbf{k} نشان دهیم، تکانه منتقل شده به هدف عبارت است از $\mathbf{q} := \mathbf{k} - \mathbf{k}'$. در این صورت تابع f در تقریب بورن به شکل زیر درمی آید:

$$f_{\mathbf{k}} := -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d^3r. \quad (35)$$

به عبارت دیگر تابع f منهای یک ضریب، تبدیل فوریه تابع پتانسیل است. تقریب بورن برای وقتی که انرژی ذرات تابنده نسبت به پتانسیل برهم کنش زیاد باشد تقریب بسیار خوبی است و به همین دلیل به عنوان اولین محاسبه تقریبی از سطح مقطع پراکندگی کاربردهای فراوانی در فیزیک اتمی و هسته ای یافته است.

برای آنکه خواننده از پس این روابط طولانی دستورالعمل مشخصی برای حل مسایل پراکندگی در تقریب بورن داشته باشد روابط اصلی را در زیر تکرار می کنیم. برای هر پتانسیل دارای تقارن کروی V سطح مقطع پراکندگی از رابطه زیر بدست می آید :

$$\sigma(\theta, \phi) = |f_{\mathbf{k}}(\theta, \phi)|^2 \quad (36)$$

که در آن

$$f_{\mathbf{k}}(\theta, \phi) := -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d^3r \quad (37)$$

و $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$. در این رابطه \mathbf{k}' برداری است با همان اندازه \mathbf{k} ولی جهت آن در امتداد $\hat{\mathbf{r}}$ یعنی جهت θ, ϕ است.

۳ نگاه دقیق تر به مسئله پراکندگی

همانطور که در مقدمه گفتیم راه دقیق برای مطالعه پراکندگی آن است که تحول بسته های موج را در زمان نگاه کنیم. برای این منظور بسته موجی را که نشاندهنده تابع موج یک ذره تابنده است در نظری می گیریم. داریم

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} d^3k \quad (38)$$

اگر بتوان این تابع موج را بر حسب یک دسته کامل از ویژه توابع هامیلتونی H به شکل زیر بسط داد:

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \sum_n c_n \psi_n(\mathbf{r}) \quad (39)$$

آنگاه شکل بسته موج در زمانهای دلخواه برابر خواهد بود با:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n \psi_n(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad (40)$$

در نگاه اول به نظری می رسد که تابع $\psi(\mathbf{r}, 0)$ بسطی از ویژه حالت های هامیلتونی به شکل $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ است:

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \int \phi(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \quad (41)$$

و بنابراین مقصود بالا از قبل حاصل شده است. اما مسئله این است که توابع $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ویژه حالت هامیلتونی H_0 هستند و نه هامیلتونی کامل $H = H_0 + V$ و بنابراین نمی توان تحول زمانی بسط فوق را به راحتی بدست آورد. اما در این جا یک نکته مهم به کمک ما می آید و آن اینکه در بخش آینده نشان می دهیم بسته موج اولیه با همین ضرایب بسط بر حسب ویژه توابع هامیلتونی H یعنی توابع $\psi_k^+(\mathbf{r})$ که در بخش های قبلی پیدا کردیم نوشته می شود، به این معنا که

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \int \phi(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f_{\mathbf{k}}(\hat{r}) \frac{e^{ikr}}{r} \right) d^3k. \quad (42)$$

از آنجا که توابع موج $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ دارای انرژی $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = \hbar\omega$ هستند تحول این تابع موج به سادگی بدست می آید، یعنی

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \phi(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} + f_{\mathbf{k}}(\hat{r}) \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} \right) d^3k =: \psi_1(\mathbf{r}, t) + \psi_2(\mathbf{r}, t). \quad (43)$$

حال ساختمان این تابع موج را بررسی می کنیم. نخست دقت می کنیم که با نوشتن \mathbf{k} به صورت $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) = \mathbf{k}_0 + \Delta\mathbf{k}$ و توجه به این نکته که $\frac{\Delta k}{k_0} \ll 1$ می توانیم بنویسیم

$$k^2 = (\mathbf{k}_0 + \Delta\mathbf{k})^2 \approx k_0^2 + 2\mathbf{k}_0 \cdot \Delta\mathbf{k}, \quad (44)$$

و در نتیجه

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2\mu} \approx \frac{\hbar}{2\mu} (k_0^2 + 2\mathbf{k}_0 \cdot \Delta\mathbf{k}) = \omega_0 + \frac{\hbar \mathbf{k}_0}{\mu} \cdot \Delta\mathbf{k}. \quad (45)$$

با توجه به اینکه $\frac{\hbar \mathbf{k}_0}{\mu} = \mathbf{v}_0$ می توان رابطه بالا را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\omega \approx \omega_0 + \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) = \omega_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k} - 2\omega_0 = -\omega_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k}. \quad (46)$$

بنابراین تابع موج $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i[-\omega_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k}]t} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t) - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 + i\omega_0 t} \phi(\mathbf{k}) d^3 k. \end{aligned} \quad (47)$$

مقایسه این تابع با بسته موج اولیه یعنی $\psi(\mathbf{r}, 0)$ نشان می دهد که

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = e^{i\omega_0 t} \psi_{in}(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t, 0). \quad (48)$$

بنابراین $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ چیزی نیست جز همان بسته موج اولیه ذره تابنده که با سرعت \mathbf{v}_0 در فاصله زمانی از صفر تا t به سمت جلو حرکت کرده است. حال تابع $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ را نگاه می کنیم:

$$\begin{aligned} \psi_2(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0} \phi(\mathbf{k}) \frac{f_{\mathbf{k}}(\hat{r})}{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i(-\omega_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k})t} \\ &= \frac{f_{\mathbf{k}}(\hat{r})}{r} e^{i\omega_0 t} \int \phi(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k} t}. \end{aligned} \quad (49)$$

اما می توان نوشت

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{(\mathbf{k}_0 + \Delta\mathbf{k})^2} = \sqrt{k_0^2 + 2\mathbf{k}_0 \cdot \Delta\mathbf{k}} = k_0 \left(1 + \frac{\mathbf{k}_0 \cdot \Delta\mathbf{k}}{k_0^2}\right) \\ &= k_0 + \frac{\mathbf{k}_0 \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)}{k_0} + k_0 + \hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \mathbf{k} - k_0 = \hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (50)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \psi_2(\mathbf{r}, t) &= \frac{f_{\mathbf{k}}(\hat{r})}{r} e^{i\omega_0 t} \int \phi(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 + i(\hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \mathbf{k})r - i(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k})t} \\ &= \frac{f_{\mathbf{k}}(\hat{r})}{r} e^{i\omega_0 t} \int \phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\hat{\mathbf{k}}_0 r - i\mathbf{v}_0 t) - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0}, \end{aligned} \quad (51)$$

که نشان می دهد تابع $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ یک موج کروی به شکل زیر است

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \frac{f_{\mathbf{k}}(\hat{r})}{r} e^{i\omega_0 t} \psi(\hat{k}_0 r - \mathbf{v}_0 t, 0). \quad (52)$$

این موج در واقع شمایی از همان موج اولیه تابیده شده به هدف را دارد با این تفاوت که دامنه آن در تمام جهات با توان $\frac{1}{r}$ کم شده است (که برای یک موج کروی این امر طبیعی است) و در هر جهتی نیز دامنه آن با ضریب $f_{\mathbf{k}}(\hat{r})$ تغییر کرده است. در قسمت پایانی این بخش نشان می دهیم که واقعاً بسط (42) صحیح است به این معنا که می توان بسته موج تابنده را بر حسب ویژه حالت های هامیلتونی کامل یعنی H بسط داد. برای این کار باید نشان دهیم که عبارت

$$M := \int \phi(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} d^3k \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (53)$$

برابر با صفر است. از آنجایی که تابع $\phi(\mathbf{k})$ تنها برای \mathbf{k} های بسیار نزدیک به \mathbf{k}_0 مقدار غیرصفر دارد می توانیم بسط بالا را به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$M = \int \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}_0}^+(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \int \phi(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0 + ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3k \quad (54)$$

اما با توجه به اینکه

$$k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx (\hat{k}_0 \cdot \mathbf{k})|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, \quad (55)$$

نتیجه می گیریم که

$$\int \phi(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0 + ik\hat{k}_0 \cdot \mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3k \propto \psi(\hat{k}_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, 0). \quad (56)$$

اما می دانیم که تابع $\psi(\mathbf{r}, 0)$ نشان دهنده یک بسته موج بود که در سمت چپ هدف غیرصفر بود و حال آنکه تابع فوق نشان دهنده همان تابع موج است که بردار مکان آن در سمت راست هدف است بنابراین چنین تابعی حتماً برابر با صفر است. به این ترتیب اثبات قضیه ای که طرح کردیم کامل می شود.