

# درس چهارم: اصول موضوع مکانیک کوانتومی

## ۱ مقدمه

«پدیده های کوانتومی در آزمایشگاه اتفاق می افتند نه در فضای هیلبرت.» Asher Peres

در درس گذشته روند تاریخی تکوین مکانیک کوانتومی را بیان کردیم. دیدیم که چگونه تلاش برای رفع نارسایی های مدل اتمی بوهر، هایزنبرگ را به مکانیک ماتریسی رهنمون شد و در همان هنگام نیز تلاش برای تلفیق تصویر موجی و ذره ای، شرودینگر را به مکانیک موجی رهنمون شد. در هر دو تصویر از مکانیک کوانتومی جدید نشانه هایی از تصویر دیگر نیز دیده می شد. مدتی بعد معلوم شد که مکانیک موجی و مکانیک ماتریسی دو جنبه متفاوت از یک صورت بندی واحد هستند. این صورت بندی واحد سرانجام توسط پاول دیراک ارایه شد. در این صورت بندی مکانیک کوانتومی از مجموعه ای از اصول موضوعه آغاز می شود و همه ساختمان مکانیک کوانتومی با استدلال ریاضی و منطقی از این اصول موضوعه استنتاج می شود. با توجه به پیچیده بودن مکانیک کوانتومی چه از نظر ساختمانی و چه از نظر تعبیرات آن و به خصوص با توجه به دوگانگی موج و ذره، این که همه مفاهیم و روش های مکانیک کوانتومی مثل هندسه از مجموعه ای از اصول موضوع قابل استنتاج است موضوعی بسیار جالب و عمیق است. در قسمت اول این درس این اصول موضوعه را به طور دقیق بیان می کنیم و سپس سعی می کنیم که توضیح دهیم که این اصول موضوع چگونه تدوین شده اند و خلاصه کننده چه نوع مشاهداتی هستند.

## ۲ اصول موضوع مکانیک کوانتومی

اصل موضوع اول: متغیرهای دینامیکی

می دانیم که یک وضعیت یک سیستم فیزیکی مشخص با مجموعه از متغیرهای دینامیکی مستقل، مشخص می شوند. در فیزیک کلاسیک این متغیرها همان مختصه های فضای فاز هستند. تعداد این متغیرهای دینامیکی را درجات آزادی آن سیستم می گوئیم. در فیزیک کلاسیک، فرض اساسی، فرض اساسی که با مشاهده نیز تایید می شود، آن است که هر وضعیتی از سیستم فیزیکی با هر مقداری از متغیرهای دینامیکی قابل حصول و مشاهده است، یعنی هر نقطه از فضای فاز یک حالت

فیزیکی قابل تصور از سیستم را نشان می دهد. (دقت کنید که آن دسته از مشخصات یک سیستم که ثابت هستند، مثل جرم، بار الکتریکی و نظایر آن متغیر دینامیکی نامیده نمی شوند.) مثلاً برای ذره ای که در یک بعد حرکت می کند متغیرهای دینامیکی عبارتند از  $(x, p)$ . برای ذره ای که در سه بعد حرکت می کند این متغیرها عبارتند از  $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ . برای دو ذره که در یک بعد حرکت می کنند این متغیرها عبارتند از  $(x_1, x_2, p_1, p_2)$ . برای ذره ای که ساکن است و تنها یک حرکت دورانی دارد این متغیرها عبارتند از  $(S_1, S_2, S_3)$  که مولفه های تکانه زاویه ای ذاتی آن را نشان می دهند. در مکانیک کوانتومی به هر متغیر دینامیکی و به طور کلی به هر مشاهده پذیر (هر تابعی از متغیرهای دینامیکی) یک عملگر هرمیتی نسبت داده می شود. بنابراین برای یک ذره که در یک بعد حرکت می کند متناظر با  $x$ ، عملگر هرمیتی  $\hat{X}$  و متناظر با  $p$  عملگر هرمیتی  $\hat{P}$  را نسبت می دهیم. اصلی را که برای نسبت دادن این عملگرها بکار می بریم به قاعده تناظر دیراک<sup>1</sup> مشهور است. بنابراین قاعده اگر متغیرهای دینامیکی  $A$ ،  $B$  و  $C$  دارای رابطه کروسه پواسون زیر باشند،

$$\{A, B\} = C, \quad (1)$$

می بایست عملگرهای مربوط به آنها روابط جابجایی زیر را برآورده کنند:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\hat{C}. \quad (2)$$

بنابراین برای ذره ای که در یک بعد حرکت می کند می بایست داشته باشیم:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar I, \quad (3)$$

و یا برای ذره ای که در سه بعد حرکت می کند می بایست روابط زیر برقرار باشند:

$$\begin{aligned} [\hat{X}_k, \hat{X}_l] &= [\hat{P}_k, \hat{P}_l] = 0 \\ [\hat{X}_k, \hat{P}_l] &= i\hbar\delta_{kl}I. \end{aligned} \quad (4)$$

هم چنین برای ذره ای ساکنی که تنها متغیرهای دینامیکی اش مولفه های تکانه زاویه ای اش هستند، عملگرهای مربوطه در روابط زیر صدق می کنند:

$$[\hat{S}_k, \hat{S}_l] = i\hbar\epsilon_{klm}\hat{S}_m \quad (5)$$

## اصل موضوع دوم: فضای هیلبرت و حالت های فیزیکی

به هر سیستم فیزیکی یک فضای هیلبرت نسبت داده می شود. معمولاً فضای هیلبرت را با  $\mathcal{H}$  نشان می دهیم. فضای هیلبرت می بایست چنان باشد که بتوان عملگرهای وابسته به متغیرهای دینامیکی را در آن نمایش داد، به این معنا که بتوان

<sup>1</sup>Dirac Correspondence Principle

عملگرهایی در آن فضا تعریف کرد که رابطه جابجایی شان درست همانی باشد که در اصل اول تعیین شده‌اند. از آنجا که عملگرهای هرمیتی جابجاشونده را می توان در یک پایه قطری کرد، فضای هیلبرت  $H$  توسط بردارهایی که که ویژه بردار مشترک همزمان یک مجموعه ماکزیمال از متغیرهای دینامیکی مستقل هستند جاروب می شود. بنابراین اگر متغیرهای دینامیکی  $A$  و  $B$  و  $C, \dots$  یک مجموعه ماکزیمال باشند (یعنی همه با هم جابجا شوند)، یک پایه برای فضای هیلبرت عبارت است از بردارهای  $|a_i, b_j, c_k, \dots\rangle$  که در آن

$$\begin{aligned} A|a_i, b_j, c_k\rangle &= a_i|a_i, b_j, c_k\rangle \\ B|a_i, b_j, c_k\rangle &= b_j|a_i, b_j, c_k\rangle \\ C|a_i, b_j, c_k\rangle &= c_k|a_i, b_j, c_k\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

از آنجا که مجموعه مشاهده پذیرهای ماکزیمال یکتا نیستند، چنین پایه هایی نیز یکتا نیستند. به هر حالت فیزیکی از یک سیستم فیزیکی یک بردار در فضای هیلبرت نسبت داده می شود و بالعکس، هر بردار در فضای هیلبرت متناظر با یک حالت فیزیکی است. از این به بعد اصطلاح حالت فیزیکی و بردار حالت را به طور تمیزناپذیر برای حالت سیستم فیزیکی در آزمایشگاه و هم چنین بردار نشان دهنده آن در فضای هیلبرت به کار می بریم. هرگاه عملگرهای  $\{\hat{A}, \hat{B}, \dots\}$  مجموعه ی عملگرهای ماکزیمال باشند، آنگاه هر حالت فیزیکی را می توان برحسب بردارهای پایه  $|a_i, b_j, \dots\rangle$  بسط داد:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j,\dots} \psi_{a_i, b_j, \dots} |a_i, b_j, \dots\rangle, \quad (7)$$

که در آن  $\langle a_i, b_j, \dots | \psi \rangle := \psi_{a_i, b_j, \dots}$  مولفه های بسط بردار حالت  $|\psi\rangle$  در پایه فوق هستند.

### اصل موضوع سوم، اندازه گیری:

وقتی که سیستم فیزیکی در حالت  $|\psi\rangle$  است اگر مشاهده پذیری مثل  $A$  را اندازه بگیریم، به طور تصادفی یکی از ویژه مقادیر عملگر  $\hat{A}$  مثل  $a$  بدست می آید و حالت دستگاه نیز به ویژه بردار متناظر با  $a$  تقلیل پیدامی کند. دامنه احتمال این که مقدار  $a$  بدست آید برابر است با  $\langle a | \psi \rangle$  و در نتیجه خود احتمال برابر است با  $P(a) = |\langle a | \psi \rangle|^2$ . در صورتی که ویژه مقادیر  $\hat{A}$  پیوسته باشند  $|\langle a | \psi \rangle|^2$  چگالی احتمال را بدست می دهد به این معنی که  $|\langle a | \psi \rangle|^2 da$  احتمال این را به دست می دهد که مقداری بین  $a$  و  $a + da$  بدست آید.

توضیح: در بیان این اصل موضوع فرض کرده ایم که طیف  $A$  واگنی ندارد. برای بیان کامل این اصل موضوع آنچنان که عملگرهای با طیف واگن را نیز در بر بگیرد نخست به یک مثال ساده می پردازیم. فرض کنید که فضای هیلبرت سه بعدی است و مشاهده پذیر  $A$  را که با عملگر  $\hat{A}$  توصیف می شود اندازه گیری می کنیم:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

حالتی را در نظر بگیرید مثل

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle + \gamma|3\rangle. \quad (9)$$

در اندازه گیری  $A$  فقط دو مقدار ۱ و ۲ بدست خواهد آمد زیرا ویژه مقادیر  $A$  این دو مقدار هستند.

احتمال اینکه مقدار ۱ را بدست بیاوریم برابر است با  $P(1) = |\alpha|^2$  و احتمال اینکه مقدار ۲ را بدست آوریم (= احتمال اینکه ۱ بدست نیاوریم) برابر است با  $P(2) = |\beta|^2 + |\gamma|^2$ . در صورت بدست آمدن مقدار ۱، حالت ذره به  $|1\rangle = |\psi'_1\rangle$  کاهش خواهد یافت. اما اگر مقدار ۲ را بدست بیاوریم حالت ذره به  $|2\rangle$  یا  $|3\rangle$  تصویر نخواهد شد بلکه به صفحه (یا زیرفضایی) که توسط  $|2\rangle$  و  $|3\rangle$  جاروب می شود تصویر خواهد شد. یعنی حالت ذره در این صورت تبدیل می شود به

$$|\psi'_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}(\beta|2\rangle + \gamma|3\rangle). \quad (10)$$

با معرفی عملگر تصویر برای این زیر فضایی

$$P_2 := |2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|, \quad (11)$$

می توان نوشت:

$$P(2) = |\beta|^2 + |\gamma|^2 = \langle \psi | P_2 | \psi \rangle. \quad (12)$$

این مطالب را به صورت زیر جمع بندی می کنیم:

به ازای هر ویژه مقدار  $\alpha$  از عملگر  $A$ ، یک عملگر تصویرگر مثل  $P_\alpha$  وجود دارد که به صورت زیر تعریف می شود

$$P_\alpha := \sum_i |\alpha^{(i)}\rangle\langle \alpha^{(i)}|, \quad (13)$$

که در آن  $|\alpha^{(i)}\rangle$  ها ویژه بردارهای متعامد و متناظر با ویژه مقدار  $\alpha$  هستند و در نتیجه

$$\hat{A} = \sum_\alpha \alpha P_\alpha. \quad (14)$$

اگر روی حالت  $|\psi\rangle$ ، مشاهده پذیر  $A$  را اندازه گیری کنیم آنگاه احتمال بدست آوردن مقدار  $\alpha$  برابر است با

$$P(\alpha) = |\langle \psi | P_\alpha | \psi \rangle|^2, \quad (15)$$

و بعد از آن نیز حالت جدید عبارت خواهد بود از

$$|\psi'_\alpha\rangle = \frac{P_\alpha|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_\alpha|\psi\rangle}}. \quad (16)$$

اصل موضوع چهارم، دینامیک:

تحول حالت سیستم فیزیکی با معادله زیر که معادله شرودینگر نام دارد تعیین می شود

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle, \quad (17)$$

که در آن  $H$  عملگر هامیلتونی سیستم فیزیکی نامیده می شود که متناظر کوانتومی همان هامیلتونی کلاسیک است. معادله شرودینگر برای وقتی که  $H$  با زمان ثابت است، حل ساده ای دارد. در این حالت عملگر تحول به شکل  $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$  است. هرگاه حالت سیستم در لحظه  $0$ ،  $|\psi(0)\rangle$  باشد، حالت سیستم در لحظه  $t$  برابر خواهد بود با

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= U(t)|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|n\rangle\langle n|\psi(0)\rangle \\ &= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|n\rangle\langle n|\psi(0)\rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

بنابراین با دانستن بسط حالت اولیه بر حسب ویژه حالت های هامیلتونی یعنی

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad (19)$$

می توانیم حالت در لحظه  $t$  را نیز تعیین کنیم.

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} c_n |n\rangle. \quad (20)$$

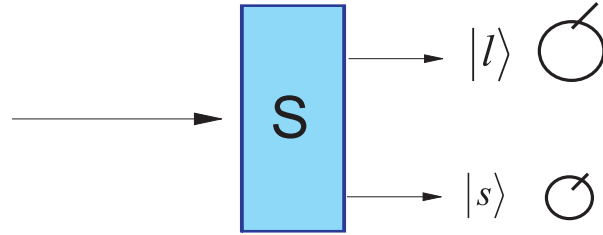
بنابراین در این حالت کافی است که ویژه حالت های هامیلتونی را بدست آوریم تا بتوانیم مسئله دینامیک را به طور کامل حل کنیم. برای وقتی که هامیلتونی وابسته به زمان باشد، روش های پیچیده تری را می بایست به کاربرد. این روش ها را در درس های آینده خواهیم آموخت.

## ۳ چرایی اصول موضوع

طی صدها سال که از تدوین علوم تجربی می گذرد ما همواره با اشیای ماکروسکوپی سروکار داشته‌ایم که از طریق زندگی روزمره با آنها آشنایی داریم. برای این اشیاء کیفیاتی نظیر سبکی و سنگینی، رنگ، بو، مزه، صدا، سختی و نرمی، اندازه، مکان و سرعت را می توانیم براحتی مشخص کرده و تحولات دنیای پیرامون خود را براساس تغییری که در این کیفیات رخ می دهند بیان کنیم. فیزیک کلاسیک در واقع به ما آموخته است که چگونه این کیفیات را به طور دقیق اندازه گیری کنیم و چگونه به کمک ریاضیات تغییرات آنها را بر حسب زمان بیان کنیم. آشنایی ما با این اشیا و اندازه گیری این کیفیات طی چند قرن گذشته باعث شده که شهود فیزیکی ما به تدریج تحول یابد. امروزه گرد بودن زمین و حرکت آن به دور خورشید جزء امور شهودی است و حال آنکه برای انسان قبل از کپرنیک چنین نبوده است. این که همه اجسام با شتاب یکسان به روی زمین سقوط می کنند، جزء شهود ماست و حال آنکه برای انسان قبل از گالیله و نیوتن چنین نبوده است.

وقتی که محدوده تجربیات خود را گسترش می دهیم و ناخود آگاه تلاش می کنیم که مفاهیم پیشین را که از یک محدوده کوچکتر فرا گرفته‌ایم برای دنیای جدید نیز به کار ببریم ممکن است متوجه شویم که این مفاهیم برای بیان کیفیات دنیای جدید کافی نیستند. بخش مهمی از نامانوس بودن زبان مکانیک کوانتومی ناشی از این امر است که ما می خواهیم دنیای بسیار خرد میکروسکوپی را که هیچ نوع تجربه و مشاهده مستقیمی از اشیای آن نداریم با همان زبانی توصیف کنیم که از دنیای روزمره فرا گرفته‌ایم. ما می توانیم با چشم خود مسیر یک برگ را که از درخت بر زمین می افتد و در هوا تاب می خورد دنبال کنیم. در این جا ما بدون واسطه و مستقیماً مسیر برگ را با یکی از حواس خود «می بینیم»، هم چنین می توانیم یک برگ را در کف دست خود بگیریم و سبکی آن را حس کنیم. اگر بخواهیم می توانیم با یک دستگاه بسیار ساده مثل ترازو و البته به کمک یک مدل ساده نظری وزن آن را با وزن یک چیز دیگر مقایسه کنیم. اما در مورد یک چیز میکروسکوپی مثل الکترون هیچ کدام از این مشاهدات امکان پذیر نیستند. ما هرگز نمی توانیم مسیر الکترون را حتی درون اتاقک ابر و یا درون لامپ کاتدی ببینیم. آنچه که درون اتاقک ابر می بینیم در واقع دنباله‌ای است از قطرات ماکروسکوپی آب که الکترون در اثر عبور خود از یک بخار در حال اشباع ایجاد کرده است. اندازه این قطرات میلیاردها بار بزرگ تر از اندازه‌ی الکترون است و نمی توان از روی آنها مسیر واقعی و دقیق الکترون را تعیین کرد. هم چنین مسیری که نخستین بار جی. جی. تامپسون در لامپ کاتدی مشاهده کرد، رد پای یک الکترون نیست بلکه مسیری است که باریکه‌ای متشکل از میلیاردها الکترون از خود باقی می گذارد. اندازه گیری جرم و بار الکترون نیز با واسطه‌های تجربی و نظری متعدد امکان پذیر می شود. به عنوان مثال میلیکان توانست با مشاهده نحوه سقوط یا صعود قطرات ماکروسکوپی روغن بار الکترون و سپس با ترکیب نتایج آن با آزمایش تامپسون، جرم الکترون را تعیین کند.

این نمونه‌های ساده نشان می دهند که چگونه مشاهده و اندازه گیری کیفیات دنیای میکروسکوپی اولاً با واسطه‌های بسیار زیاد صورت می گیرد و ثانیاً چگونه هر نوع اندازه گیری و تعیین این کیفیات متکی بر یک مدل نظری است و آنچنانکه ما اشیای ماکروسکوپی را با حواس خود مستقیماً درک می کنیم، صورت نمی پذیرد. بنابراین طبیعی است که وقتی به مشاهده و اندازه گیری و ثبت رویدادهای میکروسکوپی می پردازیم به خواصی برمی خوریم که کاملاً با شهود ما و زبان فیزیکی‌ای که ما برای توصیف آنها به کار گرفته‌ایم بیگانه باشند. به این دلیل است که چارچوب مکانیک کوانتومی تا این حد برای ما غریب است. ما در این بخش سعی می کنیم که نشان دهیم چارچوب نظری مکانیک کوانتومی یک زبان طبیعی برای



شکل ۱: دستگاه اندازه گیری سایز، سیب ها بر حسب بزرگی و کوچکی شان به دو گروه تقسیم می کند.

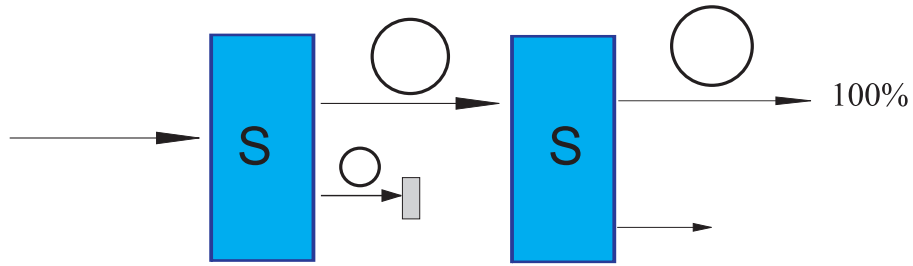
توصیف خواص اشیای میکروسکوپی است. البته همانطور که در مقدمه فصل گذشته بیان کردیم، این به معنای آن نیست که ما می توانیم ادعا کنیم که درجه ای عمیق تر از «فهمیدن» نسبت به آنچه که مکانیک کوانتومی ارائه می کند میسر نخواهد شد.

### ۱.۳ آزمایشی با سیب ها

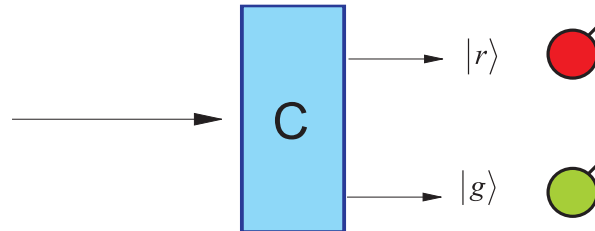
فرض کنید که ما دسته ای از سیب ها را در اختیار داریم و می خواهیم آنها را بر حسب رنگ و اندازه جدا کنیم. برای سادگی فرض می کنیم که سیب ها فقط دو رنگ سرخ و سبز دارند و اندازه آنها نیز فقط دو نوع است که آنها را بزرگ و کوچک می نامیم. در قدم اول کاری که می کنیم این است که یکی از کیفیت ها مثلاً اندازه را در نظر می گیریم و سیب ها را توسط یک دستگاه اندازه گیری سایز که آن را با  $S$  نشان می دهیم از هم جدا می کنیم. در این جا با مکانیزم درون این دستگاه اندازه گیری کاری نداریم، تنها نکته مهم این است که ما سازوکاری برقرار کرده ایم که می تواند بسیار ساده باشد (مثل جدا کردن سیب ها با دست) و یا بسیار پیچیده (که در آن از مکانیزم های الکتریکی، اپتیکی و مکانیکی برای جدا کردن استفاده شده است). قبل از این که سیب ها وارد دستگاه شوند ما از اندازه و رنگ آنها هیچ نوع اطلاعی نداریم، بنابراین این گونه سیب ها در یک حالت نامشخص هستند، اما وقتی سیب ها خارج می شوند بنابراین که از کدام یک از خروجی های دستگاه خارج شوند به آنها می توانیم بر حسب بزرگ یا کوچک بنزیم (شکل ۱). و بگوییم که سیب های خروجی در دو حالت بزرگ یا کوچک قرار گرفته اند و این حالت ها را با نمادهای  $|l\rangle$  به معنای بزرگ یا  $|s\rangle$  کوچک نشان دهیم.

دقت کنید که در این مرحله این نمادها هیچ نوع معنای ریاضی ندارند. اگر دوباره سیب های مثلاً بزرگ را از دستگاه اندازه گیری سایز عبور دهیم می بینیم که این بار تمام سیب ها از خروجی مربوط به سیب های بزرگ بیرون می آیند ۲. بنابراین می گوییم که سیب هایی را که در یک حالت نامشخص بودند وقتی که اندازه گیری کردیم در یک حالت معین یعنی حالت  $|l\rangle$  یا  $|s\rangle$  قرار می گیرند.

به همین نحو اگر بخواهیم سیب ها را بر مبنای رنگ آنها از هم جدا کنیم کافی است که آنها را از یک دستگاه اندازه گیری رنگ که آن را با  $C$  نمایش می دهیم عبور دهیم. سیب های خارج شده از چنین دستگاهی در دو حالت  $|r\rangle$  به معنای سرخ یا



شکل ۲: هرگاه سیب های بزرگ را دوباره از دستگاه اندازه گیری سائز عبور دهیم تمام سیب ها از خروجی سیب های بزرگ خارج می شوند.

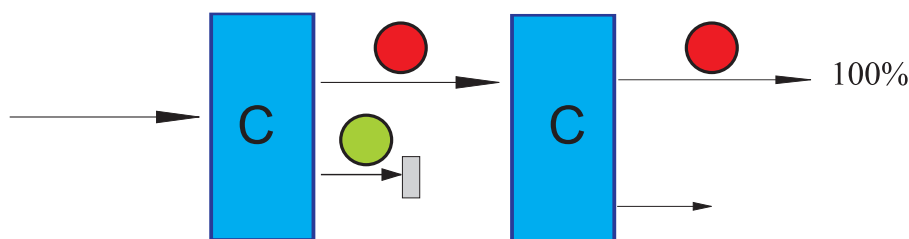


شکل ۳: دستگاه اندازه گیری رنگ سیب ها را بر حسب رنگ آنها به دو گروه سرخ و سبز تقسیم می کند.

$|g\rangle$  به معنای سبز قرار می گیرند (شکل ۳). باز هم اگر بخواهیم از رنگ سیب ها اطمینان حاصل کنیم می توانیم دوباره سیب های جدا شده را از یک دستگاه اندازه گیری رنگ عبور دهیم و دوباره همان چیزی را خواهیم دید که در مورد اندازه سیب ها دیدیم یعنی سیب های سرخ رنگ واقعاً سرخ هستند، (شکل ۴).

حال اگر بخواهیم سیب های بزرگ و قرمز را جدا کنیم کافی است که سیب هایی را که در حالت  $|l\rangle$  هستند از یک دستگاه اندازه گیری رنگ که آن را با  $C$  نمایش دهیم عبور دهیم. بعد از این که سیب ها از این دستگاه خارج شدند، در یکی از دو حالت  $|l, r\rangle$  یعنی بزرگ و سرخ یا  $|l, g\rangle$  یعنی بزرگ و سبز قرار می گیرند (شکل ۵). این دو اندازه گیری در واقع راه تهیه کردن سیب ها را در حالت های مشخص فیزیکی به ما یاد می دهند. ما می توانیم با انجام اندازه گیری های مناسب و فیلتر کردن خروجی های معین سیب ها را در حالت های مختلفی مثل  $|l, r\rangle$  (سیب های بزرگ سرخ) یا  $|s, r\rangle$  (سیب های کوچک سرخ) ونظایر آن «تهیه» کنیم.





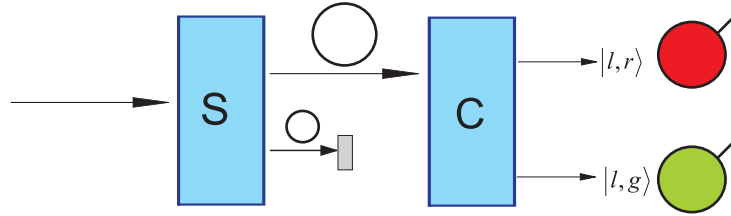
شکل ۴: هرگاه سیب های بزرگ را دوباره از دستگاه اندازه گیری سائیز عبور دهیم تمام سیب ها از خروجی سیب های بزرگ خارج می شوند.

در این جا می توانیم برای اطمینان از اینکه واقعاً سیب های بزرگ و سرخ را جدا کرده ایم سیب هایی را که در حالت  $|l, r\rangle$  قرار دارند دوباره از دستگاه اندازه گیری سائیز عبور دهیم. اگر این کار را با سیب های واقعی و نه خیالی انجام دهیم می بینیم که واقعاً تمام سیب هایی که از در حالت  $|l, r\rangle$  وقتی که از دستگاه اندازه گیری سائیز رد می شوند همه از خروجی مربوط به سیب های بزرگ خارج می شوند ۶. این آزمایش ها نشان می دهند که خصلت هایی مثل رنگ و اندازه اولاً به طور توامان معنا دارند ثانیاً این خصلت ها از قبل در سیب ها وجود دارند و ما تنها با آزمایش های خود آنها را کشف می کنیم یا اندازه می گیریم. در واقع حتی قبل از این که هیچ گونه اندازه گیری روی سیب ها انجام دهیم می دانیم که سیب های درون جعبه چه ما به آنها نگاه کنیم یا نکنیم، چه آنها را لمس کنیم یا نکنیم، دارای خصلت هایی مثل بزرگ و سرخ، یا بزرگ و سبز و نظایر آنها هستند. اندازه گیری ما این کیفیت ها را خلق نمی کند بلکه کشف می کند. حتی اگر هیچ انسانی یا موجود زنده ای به درون این جعبه نگاه نکند این سیب ها همچنان رنگ ها و اندازه های خود را دارند. در پهنه ی آسمان قرص سفید ماه همچنان می درخشد حتی اگر هیچ انسانی به آن نگاه نکند. در بخش بعدی می خواهیم ببینیم که آیا این دیدگاه که اینقدر در مورد اشیای میکروسکوپی غیرقابل خدشه است، در مورد اشیای میکروسکوپی نیز اعتبار خود را حفظ می کند یا نه؟

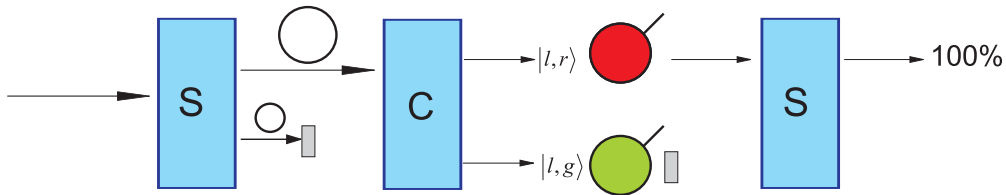
### ۲.۳ آزمایشی با اتم ها

حال بیایید که آزمایشی با اتم ها انجام دهیم. در واقع این آزمایش نخستین بار توسط اشترن و گرلاخ<sup>۲</sup> در سالهای ۱۹۲۰ انجام شد. می دانیم که اتم ها از هسته و الکترون ها ایجاد شده اند و به دلیل باردار بودن این ذرات و هم چنین به دلیل تکانه ی زاویه ای هسته و الکترون ها اتم دارای گشتاور مغناطیسی است. این گشتاور مغناطیسی را با یک بردار  $\vec{\mu}$  نمایش می دهیم. هدف اشترن و گرلاخ این بود که مقدار این گشتاور مغناطیسی را برای اتم ها اندازه بگیرند. آنها نخست بخاری از اتم های نقره تهیه کردند و سپس آنها را همراستا و هم سرعت کرده و از یک میدان مغناطیسی ناهموار عبور دادند. وقتی که یک گشتاور مغناطیسی  $\vec{\mu}$  در میدان مغناطیسی  $\vec{B}$  قرار بگیرد به آن یک گشتاور وارد می شود که از رابطه ی  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$  بدست می آید. این

<sup>2</sup>Stern and Gerlach



شکل ۵: هرگاه سیب های بزرگ را از دستگاه اندازه گیری رنگ عبور دهیم می توانیم سیب های بزرگ و سرخ یا بزرگ و سبز تهیه کنیم.



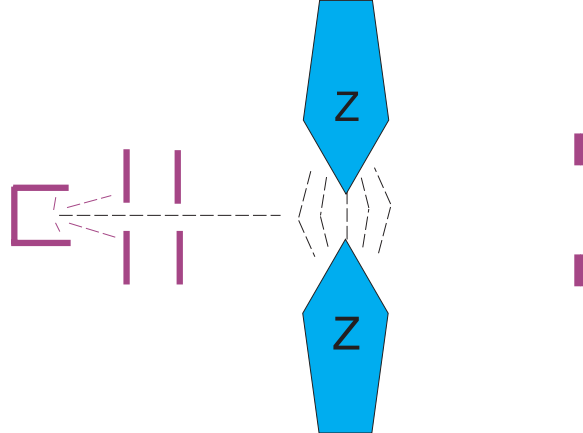
شکل ۶: هرگاه سیب های بزرگ را از دستگاه اندازه گیری رنگ عبور دهیم می توانیم سیب های بزرگ و سرخ یا بزرگ و سبز تهیه کنیم.

گشتاور باعث می شود که  $\vec{\mu}$  حول  $\vec{B}$  بچرخد. هم چنین می دانیم که گشتاور مغناطیسی متناسب با گشتاور ذاتی اتم است. این گشتاور ذاتی را با  $\vec{S}$  نشان می دهیم. از فیزیک مقدماتی الکتریسیته و مغناطیس می دانیم که این ضریب تناسب که به آن ضریب ژیرومغناطیسی می گوئیم برابر است با  $\gamma := \frac{g e}{2mc}$  که در آن  $g$  یک ثابت است که به ساختمان درونی اتم بستگی دارد. بنابراین داریم  $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ . هرگاه این معلومات را در معادله حرکت یعنی

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\tau} \quad (21)$$

قرار دهیم بدست می آوریم

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \gamma \vec{S} \times \vec{B}. \quad (22)$$



شکل ۷: آزمایش اشترن گرلاخ: میدان مغناطیسی نایکنواخت در جهت  $z$  باریکه ذرات را دوپاره می کند.

با توجه به شکل در می یابیم که پاسخ این معادله خیلی ساده است. گشتاور مغناطیسی با سرعت زاویه ای  $\omega = \gamma B$  به دور میدان مغناطیسی می چرخد. انرژی یک گشتاور در میدان مغناطیسی برابر است با  $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ . با توجه به این رابطه واضح است که در یک میدان مغناطیسی ثابت هیچ گونه نیرویی به گشتاور وارد نمی شود، زیرا  $\vec{F} = -\nabla U = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$ . حال فرض کنید که میدان مغناطیسی یکنواخت نیست بلکه در جهت  $z$  نایکنواختی دارد، یعنی  $\vec{B} = \vec{B}(z)$ . در این صورت نیروی در جهت  $z$  بر اتم وارد می شود که میزان آن برابر است با:

$$F_z = \vec{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial z} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial z} + \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (23)$$

واضح است که میدان مغناطیسی تنها وابستگی به  $z$  دارد نیرویی در جهت های دیگر به اتم ها وارد نمی شود. سرعت اتم ها چنان است که در مدت زمانی که از منطقه میدان مغناطیسی عبور می کنند، هزاران باریه دور میدان مغناطیسی می چرخند و بنابراین متوسط مولفه های  $\mu_x$  و  $\mu_y$  دز طی مسیر برابر با صفر است. در نتیجه عملاً نیروی برآیندی که در جهت  $z$  به اتم ها وارد می شود برابر می شود با

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = \gamma S_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (24)$$

در نتیجه در این آزمایش هر ذره ای بسته به اینکه  $S_z$  اش چقدر باشد، نیرویی را تجربه می کند و در خروج از دستگاه بدلیل انحرافی که پیدا کرده است به روی نقطه متفاوتی از پرده مقابل می نشیند. اگر  $S_z$  چنانچه که از دنیای کلاسیک انتظار داریم هر مقدار پیوسته ای داشته باشد می بایست روی پرده مقابل یک لکه پیوسته از ذرات ببینیم، ولی در آزمایش تنها دو نقطه سیاه می بینیم که نشان می دهد  $S_z$  تنها دو مقدار  $\frac{\hbar}{2}$  و  $-\frac{\hbar}{2}$  را داشته است.

این نتیجه بسیار شگفت انگیز است و با شهود کلاسیکی ما هیچ نوع مطابقتی ندارد، زیرا به هیچ وجه نمی توان برداری را تصور کرد که در هر امتدادی مولفه های آن همواره  $\pm \frac{\hbar}{2}$  باشد. نمی توان گفت که بردار اسپین (یا گشتاور زاویه ای) در جهت معینی بوده است و ما مولفه ای آن را در جهت  $z$  یا هر جهت دیگری «اندازه» گرفته ایم. بنابراین نمی توان گفت که واقعاً اتم هایی که از شاخه بالایی آزمایش اشترن گرلاخ خارج شده اند مولفه ای اسپین آنها، به همان معنایی که ما از بردارهای کلاسیک در نظر داریم، دارای مقدار  $\frac{\hbar}{2}$  بوده است. این اصطلاح که از دنیای کلاسیک

و از مدل ناگزیر ما در مورد برهم کنش گشتاورهای مغناطیسی ماکروسکوپی با میدان مغناطیسی وام گرفته شده است، تنها یک شبیه سازی است که به ما در توصیف نتایج آزمایش ها کمک می کند. آن چه که بدست آمده است نتیجه ی برهم کنش اتم با دستگاه ماکروسکوپی ما بوده است. با در نظر گرفتن تمام دقت ها و با ظریف کردن دستگاه اندازه گیری نمی توان این اثر را از بین برد. این اثر یک اثر ذاتی است که در طبیعت و نحوه شناخت ما از آن مربوط است.

برای آنکه در شناخت خود از این آزمایش پیش برویم می گوئیم که اتم هایی که از شاخه ی بالایی آزمایش اشترن گراخ خارج می شوند و بنا بر تصویر کلاسیکی ما مولفه اسپین آنها در جهت  $\frac{\hbar}{2}$  بوده است در حالت  $|z, +\rangle$  قرار دارند. هم چنین می گوئیم اتم هایی که از شاخه پایینی بیرون می آیند در حالت  $|z, -\rangle$  قرار دارند.

دقت کنید که ما در مورد اتم هایی که وارد دستگاه می شوند، به دلیل این که هیچ نوع اندازه گیری در مورد آنها انجام نشده است، چیزی درباره ی آنها نمی دانیم و بنابراین حالت آنها را نمی شناسیم. این اندازه گیری است که برای ما ذراتی را در یک حالت معین تهیه می کند. یک خصلت مهم این آزمایش این است که نتایج آن کاملاً تصادفی است به این معنا که یک اتم ورودی به طور کاملاً تصادفی در یکی از حالت های خروجی  $|z+\rangle$  یا  $|z-\rangle$  قرار می گیرد. ممکن است بگوئید که این تصادفی بودن چندان عجیب نیست و کاملاً مورد انتظار است زیرا اتم های ورودی هیچ حالت مشخصی ندارند و طبیعی است که نتایج اندازه گیری روی باریکه ای از ذرات که هر کدام ممکن است یک خصلت متفاوت داشته باشند می بایست متفاوت و تصادفی باشد. این اعتراض سخن کاملاً درستی است. برای آنکه ببینیم آیا تصادفی بودن ناشی از ناهمگون بودن ذرات ورودی است یک بار دیگر یک آزمایش اشترن گراخ انجام می دهیم. این بار ذراتی را که در حالت  $|z, +\rangle$  هستند از یک دستگاه اشترن گراخ  $S_z$  عبور می دهیم و می بینیم که همه آنها بدون استثناء از شاخه بالایی عبور می کنند و هیچ نوع نتیجه تصادفی در کار نیست. بنا بر به نظر می رسد که ذراتی که در حالت  $|z+\rangle$  «تهیه» شده اند واقعاً دارای این خصلت هستند. خوب مثل سیب هایی که نخست برحسب اندازه و سپس برحسب رنگ آنها را جدا کردیم این بار نیز می خواهیم اتم ها را بر اساس دو خصلت یعنی اندازه  $S_z$  و  $S_x$  آن ها جدا کنیم. به این منظور اتم هایی را که در حالت  $|z+\rangle$  هستند از یک آزمایش اشترن گراخ  $S_x$  عبور می دهیم. این بار ذرات به نسبت نصف - نصف از شاخه های بالا و پایین و کاملاً به صورت تصادفی از دستگاه خارج می شوند. تحت هیچ شرایطی نمی توان حالت خروجی یک ذره ی ورودی را پیش بینی کرد. بسیار خوب این موضوع هم چندان عجیب نیست. می توانیم بگوئیم درست مثل آزمایش سیب ها ما با انجام دو آزمایش پشت سر هم، ذراتی را تهیه کرده ایم که هم خصلت  $S_z$  و هم خصلت  $S_x$  آنها معین است. بنابراین می توانیم بگوئیم که ذراتی که از خروجی دستگاه اشترن گراخ دوم خارج می شوند در حالت  $|z+, x+\rangle$  هستند و ذراتی که از خروجی پایین دستگاه خارج می شوند در حالت  $|z+, x-\rangle$  هستند. حال می توانیم به یک آزمایش جالب دست بزنیم و درست مثل آزمایش سیب ها تحقیق کنیم که آیا واقعاً ذراتی را که در حالت  $|z+, x+\rangle$  تهیه کرده ایم، آیا واقعاً خصلت  $z+$  بودن را هنوز دارند؟ به این منظور این ذرات را از یک آزمایش اشترن گراخ  $S_z$  عبور می دهیم. در این جا واقعاً یک نتیجه شگفت انگیز بدست می آید. ذرات کاملاً به نسبت نصف - نصف از هر دو خروجی بالا و پایین خارج می شوند. این نتیجه یعنی این که نمی توان ذراتی را تهیه کرد که هم خصلت  $S_z$  و هم خصلت  $S_x$  آنها کاملاً معلوم باشد. اندازه گیری  $S_x$  کاملاً حالت ذرات را تغییر داده است و ذراتی را که قبلاً در حالت  $|z+\rangle$  تهیه کرده بودیم پس از خروج از دستگاه  $S_x$  خصلت  $S_z$  خود را فراموش کرده اند. به این ترتیب اتم ها مثل سیب ها عمل نمی کنند یا آنها را نمی توان مثل سیب ها مشاهده کرد. برخلاف سیب ها نمی توان دو خصلت  $S_z$  و  $S_x$  اتم ها را با هم تعیین کرد. به این

معنا اصولاً حالتی مثل  $|z+, x+\rangle$  معنا ندارد. ما تنها می‌توانیم یکی از خصلت‌ها را تعیین کنیم و بگوییم که اتم‌ها را در یکی از حالت‌های  $|z+\rangle$  یا  $|z-\rangle$  یا  $|x+\rangle$  یا  $|x-\rangle$  یا به طور کلی در یکی از حالت‌های  $|n+\rangle$  یا  $|n-\rangle$  تهیه کنیم. اصطلاحاً می‌گوییم که خصلت‌های  $S_x$  و  $S_z$  با هم ناسازگارند. در دنیای میکروسکوپی برخی خصلت‌ها با هم ناسازگارند. از آن جمله‌اند مولفه‌های تکانه‌ی زاویه‌ای و یا مکان و تکانه. این خصلت‌های ناسازگار را باهم نمی‌توان تعیین کرد و اندازه‌گیری هر کدام نتیجه اندازه‌گیری قبلی را از بین می‌برد. همین خصلت‌ها هستند که برای آنها اصل عدم قطعیت برقرار است. هرگاه دو خصلت مثل  $A$  و  $B$  باهم سازگار باشند آنگاه می‌توان هر دوی آنها را باهم تعیین کرد و در نتیجه می‌توان با انجام آزمایش‌های مناسب اتم‌ها را در حالت‌های  $|a_i, b_j\rangle$  تعیین کرد. این نوع حالت‌ها از خصلت  $A$  مقدار  $a_i$  و از خصلت  $B$  مقدار  $b_j$  را دارند.

برای سادگی در ادامه‌ی این درس فرض می‌کنیم که اتم‌ها فقط با یک خصلت تعیین می‌شوند.

بنابراین می‌توانیم تصور کنیم که ذرات در یکی از حالت‌های  $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_N\rangle\}$  (اگر بلافاصله از دستگاه اندازه‌گیری  $A$  بیرون آمده‌اند) قرار دارند و یا در یکی از حالت‌های  $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \dots, |b_N\rangle\}$  قرار دارند (اگر بلافاصله از دستگاه اندازه‌گیری  $B$  بیرون آمده‌اند) و نظایر آن. آزمایشگر می‌تواند در آزمایشگاه ذرات در حالت  $|b\rangle$  را از دستگاه  $A$  عبور دهد. در این جا اولین وجه افتراق دنیای کوانتومی خود را آشکار می‌سازد و آن این است که با وجودی که تمامی شرایط آزمایش یکسان است و تمام دقت‌های لازم اعمال شده است نتیجه این اندازه‌گیری هر بار یک چیز است. یعنی ذره در حالت  $|b\rangle$  کاملاً به طور تصادفی خود را در حالت‌های  $|a_1\rangle$  تا  $|a_N\rangle$  نشان خواهد داد. ممکن است که این تصادفی بودن نتیجه متغیرهای بازم خوردتری باشد که دسترسی به آنها و یکسان کردن آنها هنگام تکرار آزمایش فعلی برای ما مقدور نباشد. این فرض را فعلاً نمی‌توان آزمود و در غیاب آن تنها کاری که می‌توان کرد آن است که در آزمایشگاه احتمالات گذار را که تعیین و تکرار پذیر هستند تعیین کرد. بنابراین مرحله دوم آن است که می‌توان جد اولی از همه احتمالات گذار برای خصوصیات مختلف تعیین کرد. از این به بعد احتمال گذار حالت  $|a\rangle$  به  $|b\rangle$  را با

$$P(b, a) \quad (25)$$

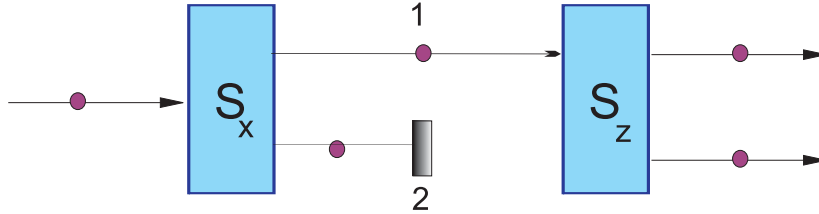
نشان می‌دهیم. واضح است که شرط زیر برآورده می‌شود:

$$\sum_{j=1}^N P(b_j, a) = 1. \quad (26)$$

هم چنین رابطه زیر ناشی از آزمایش است:

$$P(a_j, a_i) = \delta_{ij} \quad (27)$$

این رابطه به این معناست که تعریف حالت به شکلی که در بالا انجام شد معنا دارد یعنی ذره‌ای که در یک آزمایش  $A$  در حالت  $a_i$  جدا شده است اگر دوباره تحت همان آزمایش قرار گیرد (البته بدون اینکه زمان بر آن بگذرد) باز هم همان خصلت  $a_i$  را از خود نشان خواهد داد.



شکل ۸: دو آزمایش اشترن گِرخاخ پشت سرهم. تنها مسیریک برای ذرات باز است و تعداد ذراتی که از خروجی  $z$  بیرون می آیند برابر است با  $N_1$ .

## ۴ تداخل

حال به مهمترین ویژگی دنیای میکروسکوپی می رسمیم. این ویژگی مبنای خاصیت موجی بودن ذرات و مبنای اصلی است که آن را اصل برهم نهی می گوئیم و نهایتاً تلاش برای فرمول بندی دقیق این ویژگی است که ما را به ساختار خطی مکانیک کوانتومی رهنمون می شود. برای این کار دو آزمایش اشترن گِرخاخ را پشت سر هم به ترتیبی که در شکل ۸ نشان داده شده است انجام می دهیم.

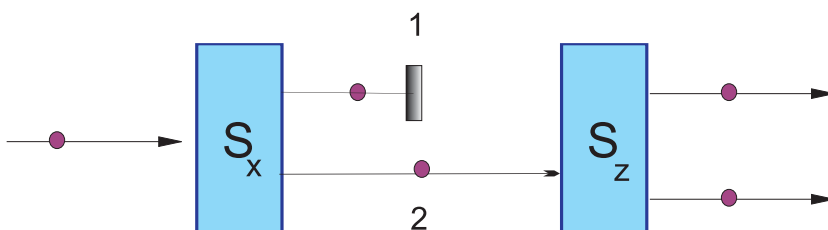
تعداد  $N$  ذره را که در حالت معینی مثل  $|\psi\rangle$  تهیه شده اند نخست از یک دستگاه اشترن گِرخاخ  $S_x$  عبور می دهیم. نخست تعداد ذراتی را که از خروجی های بالا و پایین دستگاه  $S_x$  را به دقت ثبت می کنیم. این تعداد به ترتیب عبارتند از

$$N(x + |\psi\rangle), \quad N(x - |\psi\rangle). \quad (28)$$

باریکه ذرات را می توانیم چنان رقیق کنیم که در هر لحظه فقط و فقط یک ذره در حال عبور از دستگاه باشد. به این ترتیب ذرات بایکدیگر برهم کنش نمی کنند و روی هم تاثیر نمی گذارند. حال جلوی ذراتی را که از خروجی پایین بیرون می آیند سد می کنیم و ذراتی را که از خروجی بالا بیرون می آیند به یک دستگاه اشترن گِرخاخ  $S_z$  عبور می دهیم. قبلاً دیده ایم که ذراتی که در حالت  $+x$  به دستگاه  $S_z$  تابانده می شوند با احتمال  $\frac{1}{2}$  از خروجی بالا و با احتمال  $\frac{1}{2}$  از خروجی پایین بیرون می آیند. بنابراین الان می بینیم که تعداد ذراتی که از خروجی بالای دستگاه اشترن گِرخاخ  $S_z$  خارج می شوند برابر است با

$$N_1 := \frac{1}{2}N(x + |\psi\rangle). \quad (29)$$

حال آزمایش را تکرار می کنیم ولی این بار خروجی بالای دستگاه وسطی را سد می کنیم. در این صورت ذراتی که از خروجی بالا خارج می شوند امکان رسیدن به دستگاه آخر را پیدا نمی کنند و تنها ذراتی که از خروجی پایین خارج شده اند به



شکل ۹: دو آزمایش اشترن گراخ پشت سرهم. تنها مسیر دو برای ذرات باز است و تعداد ذراتی که از خروجی  $z$  بیرون می آیند برابر است با  $N_2$ .

دستگاه آخری می رسند. این تعداد برابر است با:

$$N_2 := \frac{1}{2}N(x - |\psi). \quad (30)$$

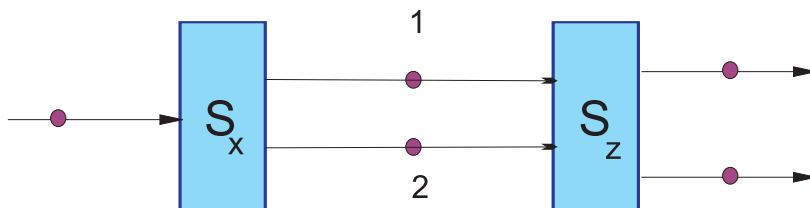
حال هر دو خروجی دستگاه وسطی را باز می کنیم و آزمایش را انجام می دهیم. این بار هم ذراتی که از خروجی بالا و هم ذراتی که از خروجی پایین خارج شده اند امکان رسیدن به دستگاه اشترن گراخ دوم را پیدا می کنند. هر ذره ای که به آشکارساز نشان داده شده در شکل رسیده است یا مسیری که را پیموده است و یا مسیر دورا، یا از خروجی بالای دستگاه  $S_x$  آمده است یا از خروجی پایین آن. این ذرات هیچ گونه تاثیری نیز بر یکدیگر نداشته اند زیرا با فاصله های زمانی خیلی زیاد و یکی یکی رسیده اند. بنابراین انتظار داریم که تعداد ذراتی که به آشکارساز می رسند برابر باشد با مجموع ذراتی که در حالت های قبل می رسیدند یعنی

$$N_{12} = \frac{1}{2}N(x + |\psi) + \frac{1}{2}N(x - |\psi). \quad (31)$$

برای آنکه مسئله را به صورت کلی فرمول بندی کنیم روابط گذشته را برحسب احتمالات می نویسیم. اگر طرفین رابطه قبلی را بر  $N$  تقسیم کنیم آنگاه این رابطه را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$P_{12}(z + |\psi) = P(z + |x+)P(x + |\psi) + P(z + |x-)P(x - |\psi). \quad (32)$$

که در آن از رابطه  $P(z + |x_{\pm}) = \frac{1}{2}$  استفاده کرده ایم. این انتظاریک انتظار کاملاً بجا است که از شناخت دیرینه ما از رفتار ذرات غیر میکروسکوپی ناشی شده است زیرا با خود می گوئیم که هر ذره ای که به آشکارساز رسیده است یا مسیری که را پیموده است و یا مسیر دورا و تمام این ذرات نیز یکی یکی و مستقل از هم وارد دستگاه ها شده اند. با این وجود وقتی که آزمایش را انجام می دهیم می بینیم که چنین تساوی ای برقرار نیست. این مشاهده تجربی بسیار عجیب است و به هیچ وجه با شهود ما سازگار نیست.



شکل ۱: دو آزمایش اشترن گزلاخ پشت سرهم. هردو مسیر برای ذرات باز است و تعداد ذراتی که از خروجی  $z$  بیرون می آیند برابر است با  $N_{12}$ .

می توانیم آزمایش بالا را برای جهت های گوناگون اسپین ها مثلاً جهت های  $\hat{m}$  و  $\hat{n}$  به جای  $x$  و  $z$  تکرار کنیم و در همه موارد می بینیم که رابطه ی بین احتمالات آنطور که از شهود کلاسیک خود انتظار داریم برقرار نیست. یعنی از نظر تجربی داریم

$$P_{12}(m + |\psi\rangle) \neq P(m + |n+\rangle)P(n + |\psi\rangle) + P(m + |n-\rangle)P(n - |\psi\rangle). \quad (33)$$

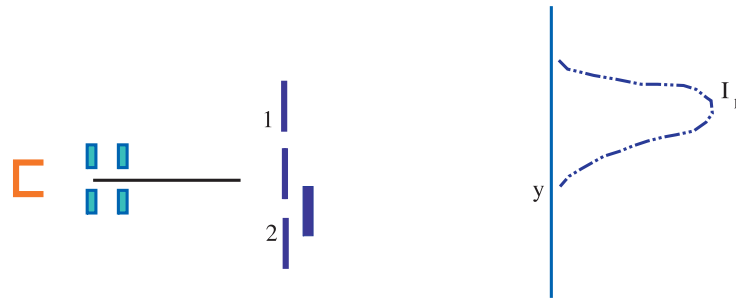
با این نامساوی ها به نظر می رسد که کار ما در مشاهده دنیای میکروسکوپی محدود شده است به جمع آوری و تنظیم احتمالاتی که از آزمایش های مختلف بدست می آوریم و این احتمالات نیز تحت هیچ قاعده و قانونی به نظم در نمی آیند و حال آنکه وجود یک نظم در روابط ریاضی و مشاهداتی برای آنکه یک نظریه قدرت پیش بینی پیدا کند بسیار لازم است. نظریه ای که تنها به ثبت رویداد ها و احتمالات وقوع آنها بپردازد و قدرت پیش بینی احتمالات جدید را نداشته باشد نظریه نیست. اگر نظریه کوانتومی نتواند نه مسیر دقیق الکترون و نه احتمالات مربوط به آن را تعیین کند پس چه کاری از این نظریه ساخته است؟ پاسخ این است که می توان هر احتمال گذاری مثل  $P(a|b)$  را به صورت مربع یک عدد مختلط مثل  $\langle a|b\rangle$  موسوم به دامنه گذار یا دامنه احتمال<sup>3</sup> نوشت و بین این دامنه های احتمال یک نظم بسیار دقیق برقرار است به این معنا که به جای رابطه ی بالا در آزمایش اشترن گزلاخ رابطه زیر بین دامنه های احتمال وجود دارد:

$$\langle m + |\psi\rangle = \langle m + |n+\rangle\langle n + |\psi\rangle + \langle m + |n-\rangle\langle n - |\psi\rangle. \quad (34)$$

این رابطه یک رابطه ی کلی است که در همه آزمایش ها دیده شده است و هیچ استثنایی در آن وجود ندارد. هرگاه روی یک حالت معین  $\psi$  آزمایش  $A$  با مقادیر  $a_i$  و آزمایش  $B$  با مقادیر  $b_i$  را انجام دهیم آنگاه رابطه ی زیر بین دامنه های مختلف

<sup>3</sup>Probability Amplitude





شکل ۱۱: آزمایش دو شکاف: تنها شکاف بالایی باز است و طرح  $I_1$  روی پرده مشاهده می شود.

وجود دارد:

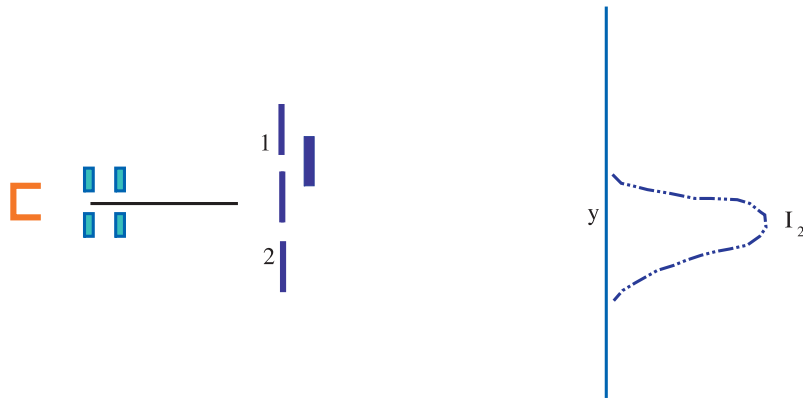
$$\langle b_j | \psi \rangle = \sum_i \langle b_j | a_i \rangle \langle a_i | \psi \rangle. \quad (35)$$

می توان گفت که تمام ساختار نظری مکانیک کوانتومی براساس این مشاهده تجربی استوار شده است. اما قبل از آنکه به ساختار نظری مکانیک کوانتومی که بر این اساس بنا می شود بپردازیم به یک مثال دیگر از تداخل یعنی آزمایش دو شکاف می پردازیم.

#### ۱.۴ آزمایش دو شکاف

در شکل (۱۱) ذرات باریونیزه را از خود متصاعد می کند. میدان های الکتریکی به همراه مجموعه ای از یکسوکننده ها ذرات را در حالتی که تکانه عرضی آنها برابر با صفر است جدا می کنند. حالت این ذرات را با  $|\psi\rangle$  نشان می دهیم. در واقع حالت  $|\psi\rangle$  را می توانیم حالت  $|P_y = 0\rangle$  نیز بنامیم ولی برای یک نواختی بحث همان نماد  $|\psi\rangle$  را به کار می بریم. در شکل نشان داده شده که شکاف پایینی مسدود شده است. هر ذره که از شکاف بالایی بگذرد در حالت  $|1\rangle$  قرار می گیرد و سپس روی پرده در حالت  $|y\rangle$  که نقطه نشستن آن روی پرده را (توسط یک آشکارساز) نشان می دهد ثبت می شود. هرگاه این آزمایش را برای مدت طولانی انجام دهیم در اثر نشستن ذرات روی یک پرده مثلاً یک پرده فلئوئورسانس یک طرح  $I_1$  بوجود خواهد آمد. تابع  $I_1(y)$  متناسب است با احتمال نشستن ذره روی نقطه  $y$  که آن را با  $P_1(y|\psi)$  نشان می دهیم.

می دانیم که  $P(1|\psi)$  احتمال آن است که ذره ای که در حالت  $|\psi\rangle$  است، از درون شکاف 1 بگذرد و در حالت  $|1\rangle$  قرار گیرد. هم چنین  $P(y|1)$  احتمال آن است که ذره ای در حالت  $|1\rangle$  است و از شکاف 1 گذشته است در نقطه  $y$  بنشیند یعنی در حالت  $|y\rangle$  قرار بگیرد. بنابراین احتمال اینکه ذره ای که در حالت  $|\psi\rangle$  تهیه شده است در این آزمایش بخصوص روی نقطه  $y$  بنشیند برابر است با احتمال اینکه این ذره از شکاف شماره 1 بگذرد ضرب در احتمال اینکه روی نقطه  $y$  بنشیند، یعنی



شکل ۲۱: آزمایش دوشکاف : تنها شکاف پایینی باز است و طرح  $I_2$  روی پرده مشاهده می شود.

$$P_1(y|\psi) = P(y|1)P(1|\psi). \quad (36)$$

شکل (۲۱) همان آزمایش را نشان می دهد  
 باین تفاوت که این بار شکاف بالایی بسته است. به همان معنای رابطه پیشین این بار داریم :

$$P_2(y|\psi) = P(y|2)P(2|\psi). \quad (37)$$

شکل (۳۱) همان آزمایش را نشان می دهد باین تفاوت که این بار هر دو شکاف باز هستند.  
 انتظار داریم که این بار رابطه زیر برقرار باشد:

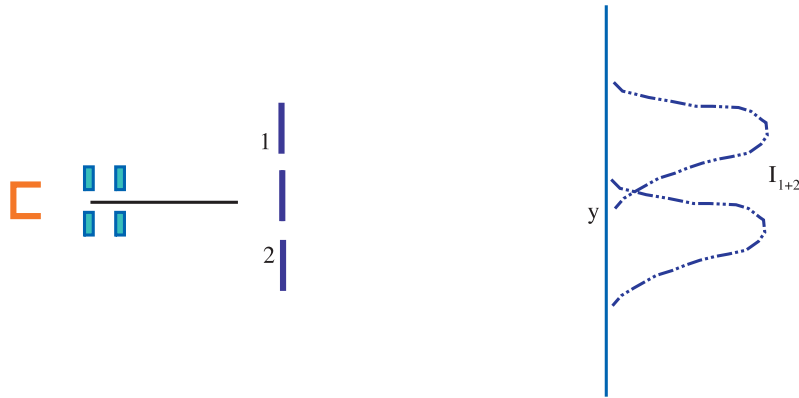
$$P_{12}(y|\psi) = P(y|1)P(1|\psi) + P(y|2)P(2|\psi). \quad (38)$$

و در نتیجه می بایست رابطه ی زیر بین شدت ها برقرار باشد

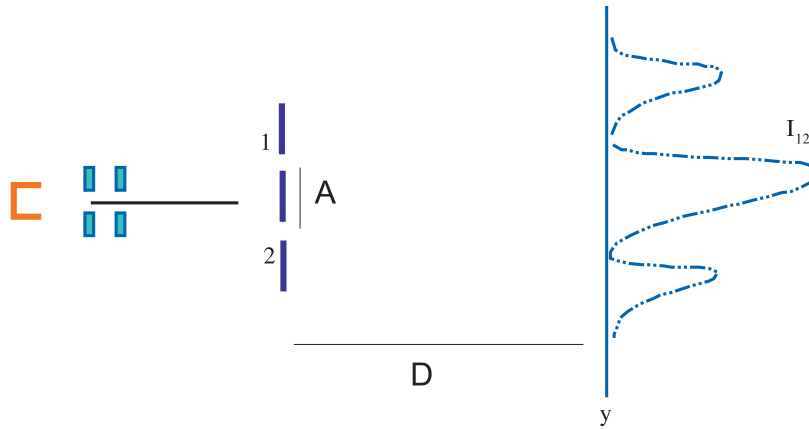
$$I_{12}(y) = I_1(y) + I_2(y). \quad (39)$$

اما آنچه که در آزمایش می بینیم آن است که ذرات مطابق با طرح  $I_{12}$  که یک طرح تداخلی است روی پرده می نشینند.  
 در این طرح چندین نکته جالب و شگفت انگیز وجود دارد:

الف : درجهایی از پرده باز کردن هر دو شکاف با هم باعث شده است که تعداد حتی کمتری ذرات نسبت به وقتی که تنها یک شکاف باز بود به آن نقطه برسد. درجهایی نیز مثل وسط پرده تعداد ذرات دوبرابر آن مجموع تعداد ذراتی است که در صورت



شکل ۳۱: آزمایش دوشکاف: هر دوشکاف باز هستند. طرح روی پرده یعنی طرح  $I_1 + I_2$  طرح ای است که انتظار داریم ببینیم.



شکل ۴۱: طرح روی پرده یعنی طرح  $I_{12}$  که طرحی است تداخلی، آن چیزی است که واقعاً در آزمایشگاه مشاهده می کنیم. بازبودن هر کدام از شکاف ها به تنهایی به پرده می رسند.

ب: برعکس درجهای دیگری از ذرات بازکردن هر دوشکاف باعث شده است که تعداد ذراتی که به آن نقطه می رسد بیشتر از مجموع ذراتی شود که در صورتی که هر دوشکاف بازمی بود به آن نقطه می رسند.

ج: شکل این طرح تداخلی با رفیق کردن چشمه ذرات بطوریکه در هر آن فقط و فقط یکی از ذرات از شکاف ها عبور کند، تغییر نمی کند. بنابراین نمی توان گفت که ذرات هنگام بازبودن هر دوشکاف بایکدیگر طوری برهم کنش می کنند که اثرات بالا دیده شود.

د: هر کدام از ذرات را روی پرده نهایی به طور کامل توسط آشکارساز ثبت می کنیم و آشکارساز ما ماهیت ذره ای آن را بخوبی تایید می کند. بنابراین نمی توان گفت که ذره در این آزمایش مثل یک موجود پیوستار عمل کرده است و بخشی از آن از

یک شکاف و بخشی دیگر از یک شکاف دیگر عبور کرده است.

ه: البته می توان در گزاره (د) شک کرد. ممکن است که ذره در حین عبور از دو شکاف به صورت یک پیوستار (چیزی شبیه یک ابر) رفتار می کند و سپس در انتها موقع نشستن روی پرده تمامی این ابر دوباره به صورت یک ذره کوچک متمرکز می شود. برای پی بردن به راز رفتار ذره می توان درست پشت شکاف ها آشکارسازهایی گذاشت تا بفهمیم که ذره درست موقع عبور از شکاف ها چگونه رفتار می کند. اگر چنین کاری بکنیم متوجه می شویم که در آنجا هم ذره به صورت یک ابر یا ژله یا چیزی شبیه به آن رفتار نمی کند بلکه به تمامی (باتمام جرم و بار و دیگر خصوصیات خود) در آشکارساز ثبت می شود. ولی در این جا متوجه یک اتفاق مهم می شویم و آن این است که تلاش ما برای پی بردن به راز رفتار ذره باعث شده است که طرح تداخلی  $I_{12}$  از بین رفته است و جای خود را به طرح معمولی  $I_1 + I_2$  داده است. ظاهراً ذره از تلاشی که برای پی بردن به رفتار اسرار آمیزش انجام داده ایم عصبانی شده است و دیگر آن کارشگفت انگیز را نمی کند.

و: حال که ذره تن به مشاهده ظریف خود رانمی دهد ما می توانیم به منطبق ساده روی آوریم. بالاخره هر ذره ای که روی پرده می نشیند یا از شکاف ۱ آمده است یا از شکاف ۲. تعداد ذراتی که روی پرده نشسته اند برابرند با تعداد ذراتی که از شکاف ۱ آمده اند + تعداد ذراتی که از شکاف ۲ آمده اند. اما تعداد ذراتی که از شکاف ۱ عبور کرده و روی پرده نشسته اند برابر است با  $I_1$  و تعداد ذراتی که از شکاف ۲ عبور کرده و روی پرده نشسته اند برابر است با  $I_2$ . پس حتی بدون مشاهده نزدیکی شکاف ها می توانیم حکم کنیم که طرحی که سرنجام روی پرده ثبت می شود می بایست برابر با  $I_1 + I_2$  باشد. در صورتی که اتم ها درست مثل اشیا بی که ما با آنها آشنا هستیم مثل توپ فوتبال عمل کرده باشند استدلال بالا صحیح است. بالاخره هر اتم یا از شکاف بالایی عبور کرده و به پرده رسیده است و یا از شکاف پایینی و می بایست طرح مشاهده شده همان طرح بدون تداخل یعنی طرح  $I_1 + I_2$  باشد. در حال حاضر ما نمی توانیم بفهمیم که الکترون ها یا ذرات میکروسکوپی دیگر چرا چنین رفتاری از خود بروز می دهند. مسئله حتی از این هم بدتر است. مانه تنها نمی توانیم چرایی رفتار الکترون ها را توضیح دهیم حتی چگونگی رفتار آن را بهتر از این نمی توانیم توضیح دهیم. در مقابل ایراداتی از این نوع که « بالاخره الکترون یا از این شکاف عبور می کند و یا از آن شکاف و در این صورت نمی بایست طرح تداخلی داشته باشیم » تنها می توانیم به این بسنده کنیم که بگوییم وقتی سوال عبور الکترون از شکاف ها را به صورت عملی و تجربی می خواهیم بپرسیم می بینیم که طرح تداخلی واقعا از بین می رود و ما به تناقضی برنمی خوریم! بنابراین می گوئیم که وقتی الکترون را مشاهده نمی کنیم نمی توانیم مسیری برای آن تعریف و حتی معنا کنیم و هرگاه هم که بخواهیم از نظر تجربی مسیر آن را تعیین کنیم اگرچه عمل ما قرین موفقیت است اما الکترون دیگر آن کارشگفت انگیزی را که در غیاب مشاهده انجام می داد انجام نمی دهد و کاملاً سربه زیر می شود. نظریه و چارچوب مکانیک کوانتومی از این نقطه آغاز می شود که ما کاری به اینکه در حین یک فرایند دقیقاً چه اتفاقی می افتد و این که این اتفاقات با شهود ما سازگارند یا نه نداریم بلکه تنها به آغاز و انجام یک فرایند کار داریم و تنها مجموعه احتمالات گذار از حالات اولیه به حالات نهایی را در آزمایشگاه تعیین می کنیم و سعی می کنیم با یک دستگاه نظری خود سازگار این احتمالات وقوع را به یکدیگر پیوند داده و در نتیجه بعضی از آنها را از روی بعضی دیگر پیش بینی کنیم.

در مورد آزمایش حاضر طرح ایجاد شده روی پرده را تنها به این ترتیب می توان توضیح داد که هر احتمال گذار را به صورت مربع یک عدد مختلط به نام دامنه احتمال بگیریم، یعنی قرار دهیم  $P(y|1) = |\langle 1|\phi \rangle|^2$  و  $P(y|2) = |\langle 2|\phi \rangle|^2$  و سپس بگوییم که

این دامنه های احتمال در رابطه زیر صدق کنند:

$$\langle y|\psi\rangle = \langle y|1\rangle\langle 1|\psi\rangle + \langle y|2\rangle\langle 2|\psi\rangle. \quad (40)$$

یعنی اینکه وقتی یک فرایند می تواند از راه های مختلف به یک نتیجه ی نهایی برسد این دامنه های احتمال مربوط به راه های مختلف و نه خود احتمالات هستند که باهم جمع می شوند و دامنه احتمال نهایی را می سازند. این امر باعث بروز جملات تداخلی و در نتیجه رفتار موجی در تابع احتمال نهایی برای یافتن ذره در نقاط مختلف می شود. اینکه چرا چنین است چیزی است که تا کنون هیچ گونه توضیحی برای آن داده نشده است. این نقطه آغاز مکانیک کوانتومی است. شاید نقطه آغاز قانع کننده ای نباشد ولی کسی هم تا کنون نتوانسته است نقطه آغاز عمیق تر و بهتری بیابد.

این رابطه رابطه اصلی ای است که بسیاری از ساختمان نظری مکانیک کوانتومی براساس آن بیان می شود. می توان شکل کلی آن را به صورت زیر نوشت :

$$c_k|\psi\rangle = \sum_j \langle c_k|b_j\rangle\langle b_j|\psi\rangle. \quad (41)$$

آنچه که در آزمایشگاه قابل حصول است آن است که می توانیم با انجام آزمایش های گوناگون روی یک حالت احتمال گذار آن حالت را به حالت های دیگر اندازه گیری کنیم. به عنوان مثال روی حالت  $|\psi\rangle$  می توانیم با انجام آزمایش  $A$  احتمالات گذار به حالت های  $|a_i\rangle$  را تعیین کنیم. می توانیم این دامنه ها را در یک آرایه ستونی مطابق شکل زیر مرتب کنیم و اسم این آرایه را  $|\psi\rangle_A$  بگذاریم که شاخص  $A$  برای یادآوری آن است که اعداد داخل این آرایه از اندازه گیری های  $A$  بدست آمده اند:

$$|\psi\rangle_A = \begin{pmatrix} \langle a_1|\psi\rangle \\ \langle a_2|\psi\rangle \\ \vdots \\ \langle a_N|\psi\rangle \end{pmatrix} \quad (42)$$

با انجام مشاهدات دیگر آزمایشگر می تواند به همین ترتیب مجموعه ای از آرایه ها مثل  $|\psi\rangle_B$  ،  $|\psi\rangle_C$  و نظایر آن را تعیین کند. حال سوال این است که این آرایه ها چه ربطی به هم دارند؟ نخست باید به این اشاره کنیم که مشاهدات تجربی نشان می دهد که دامنه گذار یک حالت  $|a_i\rangle$  به حالت متفاوت دیگر برابر با صفر است (البته اگر این اندازه گیری را بلافاصله انجام دهیم که فرض ما هم همین است). بنابراین خواهیم داشت:

$$|a_1\rangle_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad |a_2\rangle_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad |a_N\rangle_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

یادآوری این نکته لازم است که آزمایشگر می بایست با مجموعه ای از آزمایشهای به هم مرتبط دامنه هارا پیدا کند زیرا دانستن مربع یک عدد مختلط تنها اندازه آن عدد را بدست خواهد داد و نه فاز آن را. نمونه ای از این آزمایشها را در ادامه

خواهیم دید.

آیا آزمایشگر می بایست بصورت منفعل تنها به جمع آوری این آرایه ها بپردازد و یا اینکه می تواند خود قدرت پیشگویی پیدا کند. این سوالی است که در بخش آینده به آن پاسخ خواهیم گفت.

## ۵ بردارهای حالت

اگر در این لحظه به رابطه (41) توجه کنیم و آن را به شکل زیر بازنویسی کنیم

$$\langle b_j | \psi \rangle = \sum_i \langle b_j | a_i \rangle \langle a_i | \psi \rangle, \quad (44)$$

متوجه شباهت تام و تمام رابطه درایه ها در آرایه های  $|\psi\rangle_A$  و  $|\psi\rangle_B$  با مولفه های یک بردار می شویم. درست مثل این است که آرایه  $N$  بعدی  $|\psi\rangle_A$  مولفه های یک بردار را در یک پایه که آن را برای سادگی پایه  $A$  می نامیم و آرایه  $N$  بعدی  $|\psi\rangle_B$  مولفه های همان بردار را در پایه  $B$  نشان می دهند. در نتیجه می توانیم شاخص  $A, B, \dots$  را از  $|\psi\rangle$  حذف کنیم و بگوییم که حالت یک ذره توسط یک بردار  $|\psi\rangle$  تعیین می شود و اندازه گیری آن ذره توسط آزمایش  $A$  در حقیقت دامنه های گذار آن حالت به حالت های مختلف  $\langle a_i | \psi \rangle$  را به عنوان مولفه های مختلف آن بردار در یک پایه بدست می دهد. در این جا می بایست به یک نکته مهم اشاره کنیم و آن این است که هرگاه تمام دامنه های  $\langle a_i | \psi \rangle$  را در یک فاز ضرب کنیم هیچ تغییری در احتمالات  $P(a_i, \psi)$  بوجود نخواهد آمد بنابراین با آزمایش  $A$  نمی توان به این پی برد که آیا فازی در دامنه ها ضرب شده است یا نه. حال نکته مهم این است که بنابر رابطه (41) همان فاز در تمام دامنه های دیگر یعنی  $\langle b_i | \psi \rangle$  نیز ضرب خواهد شد و بنابراین با هیچ آزمایش فیزیکی نمی توان ضرب شدن فاز را تشخیص داد. در نتیجه این آرایه ها را همواره می توان در یک فاز کلی ضرب کرد بدون اینکه اثری به بار آورد.

هم چنین با قبول رابطه (44) به عنوان رابطه ای بین مولفه های یک بردار در پایه های مختلف می توانیم از این به بعد به دامنه احتمال  $\langle b | a \rangle$  به عنوان ضرب داخلی دو بردار یا همان براکت  $\langle b | a \rangle$  نگاه کنیم. یک نتیجه ی این فرض این است که

$$P(a, b) = P(b, a) \quad (45)$$

یعنی احتمال گذار حالت  $|a\rangle$  به حالت  $|b\rangle$  با احتمال گذار حالت  $|b\rangle$  به حالت  $|a\rangle$  مساوی است. این فرض را می توان بلافاصله به آزمون تجربی سپرد و تجربه نشان صحت آن را نشان می دهد. علاوه بر آن رابطه (27) نشان می دهد که

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (46)$$

یعنی بردارهای پایه ی مربوط به این نوع اندازه گیری ها که ذرات را کاملاً از هم جدا می کنند برهم عمود هستند.

## ۶ عملگرها

تا کنون یادگرفته ایم که وقتی ذره درحالت  $|\psi\rangle$  است اندازه گیری خصلت  $A$  مقادیر  $a_i$  را با احتمال  $|\langle a_i|\psi\rangle|^2$  تولید می کند. حال می توانیم مقدار متوسطی را که پس از چند بار اندازه گیری بدست می آید حساب کنیم. این مقدار را که با  $\langle A \rangle_\psi$  نشان می دهیم برابر است با:

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_{i=1}^N a_i |\langle a_i|\psi\rangle|^2 = \sum_{i=1}^N a_i \langle \psi|a_i\rangle \langle a_i|\psi\rangle = \langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle, \quad (47)$$

که در آن  $\hat{A}$  عملگری است که به این اندازه گیری نسبت داده شده است و به شکل زیر است:

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^N a_i |a_i\rangle \langle a_i|. \quad (48)$$

مسلم است که این عملگر در پایه خودش یعنی پایه  $A$  قطری است و شکل زیر را دارد:

$$\hat{A}_A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_N \end{pmatrix} \quad (49)$$

اما همین عملگر را هرگاه در پایه دیگری بنویسیم شکل ماتریسی آن دیگر قطری نخواهد بود. در بخش های آینده این درس با مطالعه دقیق تر آزمایش های مربوط به ذرات اسپین 1/2 نشان خواهیم داد که چگونه این عملگرها را می توان بدست آورد.

## ۷ دینامیک

فرض کنیم که سیستم کوانتومی ما در لحظه ی صفر در حالت  $|\psi(0)\rangle$  باشد. در لحظه ی  $t$  این سیستم در حالت  $|\psi(t)\rangle$  خواهد بود و رابطه این دو حالت با یک عملگر یکانی مثل  $\hat{U}(t)$  داده می شود

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle. \quad (50)$$

از طرفین این رابطه مشتق می گیریم و بدست می آوریم

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \dot{\hat{U}}(t)|\psi(0)\rangle = \dot{\hat{U}}(t)\hat{U}^\dagger(t)|\psi(t)\rangle. \quad (51)$$

براحتی معلوم می شود که عملگر  $\hat{U}\hat{U}^\dagger$  یک عملگر پادهرمیتی است. بنابراین آن را با  $i\hat{A}$  نشان می دهیم که در آن  $A$  یک عملگر هرمیتی است. بنابراین می نویسیم

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = i\hat{A}|\psi(t)\rangle. \quad (52)$$

حال می خواهیم ببینیم که عملگر  $\hat{A}$  چه عملگری است. برای این کار از این نکته استفاده می کنیم که نتایج مکانیک کوانتومی برای متوسط کمیت ها با نتایج مکانیک کلاسیک می بایست متفاوت باشد. کمیتی مثل  $\hat{Q}$  را در نظر می گیریم. متوسط این کمیت برابر است با  $\langle\hat{Q}(t)\rangle := \langle\psi(t)|\hat{Q}|\psi(t)\rangle$  ن تغییرات آن برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\hat{Q}(t)\rangle &= \langle\dot{\psi}(t)|\hat{Q}|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\hat{Q}|\dot{\psi}(t)\rangle \\ &= -i\langle\psi(t)|\hat{A}\hat{Q}|\psi(t)\rangle + i\langle\psi(t)|\hat{Q}\hat{A}|\psi(t)\rangle = -\langle\psi(t)|i[\hat{A}, \hat{Q}]|\psi(t)\rangle. \end{aligned} \quad (53)$$

بنابراین نتیجه گرفتیم که برای متوسط یک کمیت دلخواه مثل  $Q$  رابطه دینامیکی زیر برقرار است:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{Q}\rangle = -i\langle[\hat{A}, \hat{Q}]\rangle \quad (54)$$

هرگاه این رابطه را با رابطه ی کلاسیک

$$\frac{d}{dt}Q = \{Q, H\} \quad (55)$$

مقایسه کنیم و هم چنین اصل کوانتش دیراک را که جابجاگر عملگرها را به گروه ی پواسون کمیت های کلاسیک ربط می دهد  
یعنی رابطه ی

$$\{Q, H\} \longrightarrow i\hbar[\hat{Q}, \hat{H}] \quad (56)$$

در نظر آوریم بدست می آوریم که عملگر  $\hat{A}$  می بایست برابر با عملگر هامیلتونی سیستم باشد یعنی  $\hat{A} = \hbar\hat{H}$  و از آنجا معادله دینامیکی سیستم کوانتومی موسوم به معادله شرودینگر بدست می آید:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle. \quad (57)$$

بحث ما درباره چرایی اصول موضوع در این جا به پایان می رسد. این بحث به معنای فهم عمیق جهان کوانتومی نیست، بلکه به معنای آن است که اصول موضوع مکانیک کوانتومی چگونه از تجربیات و مشاهدات و هم چنین محدودیت های شهود و زبان ما برای توصیف جهان میکروسکوپی ناشی می شوند. این اصول موضوع و این چارچوب نظری در طول یکصد سال گذشته



مبنای جامع، وسیع و بسیار دقیقی هم برای توصیف طبیعت در مقیاس میکروسکوپی از اتم ها، مولکول ها، و تمامی انواع ماده از جامد و گاز و مایع در شرایط گسترده‌ای از دما و فشار و چگالی و کلیه شرایط خارجی فراهم کرده است و هم رشد همه جانبه تکنولوژی میکروسکوپی را امکان پذیر ساخته است. آن روز که یک نظریه قابل فهم تر و سازگارتر با شهود تعینی ما پدیدار شود و در عین سادگی بتواند تمامی این پهنه‌ی وسیع را توضیح دهد، مکانیک کوانتومی به سادگی و هم چون نظریه قدیمی بور، یا نظریه کپرنیک کنار نهاده خواهد شد. ولی آن روز هنوز فرا نرسیده است.

## ۸ اسپین

در این آخرین بخش آزمایش های انجام شده بر ذرات اسپین 1/2 را به طور دقیق تر مطالعه می کنیم و سعی می کنیم نشان دهیم چگونه توصیف این آزمایشها در مکانیک کوانتومی انجام می شود و این که چگونه مکانیک کوانتومی ما را قادر می کند که به پیش بینی دقیق نتایج آزمایشهای دیگر در مورد این ذرات پردازیم. از آزمایش می دانیم که وقتی ذراتی را در حالت  $|x+\rangle$  تهیه می کنیم و سپس آنها را از آزمایش اشترن گراخ  $S_z$  عبور می دهیم احتمالات به صورت زیر هستند:

$$P(z+, x+) = P(z-, x+) = \frac{1}{2}, \quad (58)$$

که از آن نتیجه می شود

$$|\langle z+ | x+\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |\langle z- | x+\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (59)$$

و در نتیجه

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\beta}|z-\rangle. \quad (60)$$

با بازتعریف حالت های  $|z+\rangle$  و  $|z-\rangle$  می توانیم فازهای فوق را از بین ببریم. بنابراین رابطه فوق به صورت زیر درمی آید:

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|z-\rangle. \quad (61)$$

به طریق مشابه از روابط تجربی

$$P(z+, x-) = P(z-, x-) = \frac{1}{2}, \quad (62)$$

می توان نتیجه گرفت

$$|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\gamma}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta}|z-\rangle. \quad (63)$$

فازهای فوق را دیگر نمی توان با بازتعریف حالت های  $|z\pm\rangle$  از بین برد. تنها یکی از آنها را می توان با بازتعریف  $|x-\rangle$  از بین برد و در نتیجه خواهیم داشت:

$$|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta}|z-\rangle. \quad (64)$$

در اینجا از رابطه تجربی  $P(x+, x-) = 0$  و با  $\langle x+ | x-\rangle = 0$  استفاده می کنیم و بدست می آوریم:

$$|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|z-\rangle. \quad (65)$$

به همین ترتیب با استفاده از روابط تجربی مشابه برای آزمایش اشترن گراخ در راستای  $y$  می توان نوشت:

$$\begin{aligned} |y+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\gamma}|z-\rangle, \\ |y-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta}|z-\rangle. \end{aligned} \quad (66)$$

حال از رابطه  $\langle y+ | y-\rangle = 0$  بدست می آوریم  $e^{i\delta} = -e^{i\gamma}$ . آخرین چیزی که باید تعیین کنیم مقدار  $\gamma$  است. برای این کار از یک رابطه تجربی باقیمانده استفاده می کنیم و آن اینکه

$$P(x+, y+) = \frac{1}{2}. \quad (67)$$

این رابطه الزام می کند که

$$|\langle x+ | y+\rangle|^2 = \frac{1}{4}|(1 + e^{i\gamma})|^2 = \frac{1}{2} \quad (68)$$

که نتیجه می دهد  $\gamma = \pm i$ . بدون هیچ ارجحیت خاصی جواب  $i$  را انتخاب می کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |y+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}i|z-\rangle, \\ |y-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|z+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}i|z-\rangle. \end{aligned} \quad (69)$$

هرگاه از نمایش صریح بردارها در پایه  $S_z$  استفاده کنیم روابط فوق به شکل زیر درمی آیند:

$$\begin{aligned} |z+\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & |z-\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |x+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & |x-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ |y+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} & |y-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (70)$$

با الهام از فیزیک کلاسیک و نحوه برهم کنش یک میدان مغناطیسی نایکنواخت با ممان های مغناطیسی و هم چنین رابطه ممان مغناطیسی با شگشتاورزاویه ای به همان شکلی که در مقدمه این فصل گفته شد، در آزمایش اشترن گرواخ  $S_z$  ذراتی را که در حالت  $|z+\rangle$  قرار دارند چنین تفسیر می کنیم که مولفه گشتاورزاویه ای آنها در امتداد  $z$  برابر با  $\frac{\hbar}{2}$  است و ذراتی را که در حالت  $|z-\rangle$  قرار دارند چنین تفسیر می کنیم که مولفه گشتاورزاویه ای آنها در امتداد  $z$  برابر با  $-\frac{\hbar}{2}$  است که در آن  $\hbar$  ثابت پلانک و برابر با  $\frac{h}{2\pi}$  است و  $6.627 \times 10^{-34} h$  ژول ثانیه است.

در نتیجه می توانیم با توجه به رابطه (48) عملگرهای  $S_x$ ،  $S_y$  و  $S_z$  را به شکل زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2}(|x+\rangle\langle x+| - |x-\rangle\langle x-|) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ S_y &= \frac{\hbar}{2}(|y+\rangle\langle y+| - |y-\rangle\langle y-|) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ S_z &= \frac{\hbar}{2}(|z+\rangle\langle z+| - |z-\rangle\langle z-|) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (71)$$

بایک محاسبه ساده می توان نشان داد که روابط زیر بین این عملگرها برقرار هستند:

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x, \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y. \quad (72)$$

این رابطه بسیار شبیه به رابطه ای است که بین مولفه های گشتاورزاویه ای در مکانیک کلاسیک وجود دارد. به این دلیل است که می گوییم این سه کمیت مولفه های اندازه حرکت ذاتی یک ذره هستند.

بد نیست در این جا به خواص ماتریس های پاولی اشاره کنیم. این ماتریس ها که به شکل زیر تعریف می شوند خواص بسیار جالب و مهمی دارند و دانشجو بهتر است که به بخوبی با آنها آشنا شود. داریم

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (73)$$

معمولاً ماتریس های پاولی را به جای  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  با  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  نشان می دهیم. با این نمادگذاری خواننده می تواند تمام روابط ریاضی زیر را با محاسبه ساده نشان دهد:

$$\sigma_i^2 = I, \quad \sigma_i^\dagger = \sigma_i,$$

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} I + 2i \epsilon_{jkl} \sigma_l \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 0, \quad i \neq j, \quad (74)$$

که در رابطه‌ی آخر منظور از  $\{, \}$  برای عملگرها پادجابجاگر آنهاست یعنی  $\{A, B\} = AB + BA$ . اگر به ازای یک بردار  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  عملگر  $\mathbf{a} \cdot \sigma$  را به صورت

$$\mathbf{a} \cdot \sigma = a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3, \quad (75)$$

تعریف کنیم آنگاه با استفاده از روابط بالا می‌توان به راحتی نشان داد که روابط زیر برقرار هستند:

$$(\mathbf{a} \cdot \sigma)(\mathbf{a} \cdot \sigma) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} I + 2i(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \sigma, \quad (76)$$

و به ازای هر برداریکه  $\mathbf{n}$

$$e^{i\theta \mathbf{n} \cdot \sigma} = \cos \theta + i \mathbf{n} \cdot \sigma \sin \theta. \quad (77)$$

دیدیم که عملگری که متناظر با اندازه‌گیری اسپین در جهت  $z$  است،  $S_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z$  است. همچنین عملگرهایی که متناظر با اندازه‌گیری‌های اسپین در جهات  $x$  و  $y$  بودند متناظر بودند با  $S_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_x$  و  $S_y = \frac{\hbar}{2} \sigma_y$ . به طور طبیعی عملگری که متناظر با اندازه‌گیری اسپین در جهت دلخواه  $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$  است عبارت است از  $S_n = \frac{\hbar}{2} \hat{n} \cdot \sigma$  که در آن

$$\mathbf{n} \cdot \sigma = \begin{pmatrix} n_3 & n_1 - in_2 \\ n_1 + in_2 & -n_3 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

این عملگر در خاصیت  $(\nu \cdot \sigma)^2 = I$  صدق می‌کند. بنابراین ویژه مقادیر آن برابرند با 1 و -1. این ویژه بردارها را با  $|n, +\rangle$  و  $|n, -\rangle$  نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \sigma)|n, +\rangle &= |n, +\rangle \\ (\mathbf{n} \cdot \sigma)|n, -\rangle &= -|n, -\rangle \end{aligned} \quad (79)$$

کمی محاسبه نشان می‌دهد که شکل صریح این ویژه بردارها عبارت است از:

$$|n, +\rangle = \begin{pmatrix} n_1 - in_2 \\ 1 - n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (80)$$

و

$$|n, -\rangle = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (81)$$

حال می پرسیم وقتی که ذره در حالت  $|n, +\rangle$  است اندازه گیری اسپین آن در جهت  $z$  با چه احتمالی مقدار  $+\frac{\hbar}{2}$  و با چه احتمالی مقدار  $-\frac{\hbar}{2}$  را بدست خواهد داد. برای این کار کافی است که عملگرهای مصور  $P_z(+)$  و  $P_z(-)$  را بدست بیاوریم. داریم

$$P_z(+)=|z, +\rangle\langle z, +| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_z(-)=|z, -\rangle\langle z, -| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (82)$$

در نتیجه بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} Pr(z+, n) &= \langle n, +|P_z(+)|n, +\rangle = \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\ Pr(z-, n) &= \langle n, +|P_z(-)|n, +\rangle = \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (83)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$P_x(+)=|x, +\rangle\langle x, +| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P_x(-)=|x, -\rangle\langle x, -| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} Pr(x+, n) &= \langle n, +|P_x(+)|n, +\rangle = \frac{1}{2}(1 + \sin \theta \cos \phi), \\ Pr(x-, n) &= \langle n, +|P_x(-)|n, +\rangle = \frac{1}{2}(1 - \sin \theta \cos \phi). \end{aligned} \quad (85)$$

وبالآخره

$$P_y(+)=|y, +\rangle\langle y, +| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad P_y(-)=|y, -\rangle\langle y, -| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad (86)$$

$$Pr(y+, n) = \langle n, +|P_y(+)|n, +\rangle = \frac{1}{2}(1 + \sin \theta \sin \phi),$$

$$Pr(y-, n) = \langle n, + | P_y(-) | n, + \rangle = \frac{1}{2}(1 - \sin \theta \sin \phi). \quad (87)$$

هم چنین می توان متوسط مقادیر اسپین را در اندازه گیری های مختلف بدست آورد.

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \frac{\hbar}{2} \langle \sigma_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \sigma_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \theta \cos \phi \\ \langle S_y \rangle &= \frac{\hbar}{2} \langle \sigma_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \sigma_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \theta \sin \phi \\ \langle S_z \rangle &= \frac{\hbar}{2} \langle \sigma_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \sigma_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \theta. \end{aligned} \quad (88)$$

حال می توانیم دینامیک اسپین را در یک میدان مغناطیسی ثابت حول محور  $z$  مطالعه کنیم. هامیلتونی چنین سیستمی را بالهام از فیزیک کلاسیک به شکل زیر می نویسیم که در آن  $\mu$  گشتاور مغناطیسی ذره است.

$$H = \mu B S_z = \mu B \frac{\hbar}{2} \sigma_z. \quad (89)$$

در نتیجه عملگر تحول به شکل زیر درمی آید:

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = e^{-\frac{\mu B t}{2} \sigma_z} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t} \end{pmatrix}. \quad (90)$$

که در آن

$$\omega := \frac{\mu B}{\hbar}, \quad (91)$$

فرکانس لارمور خوانده می شود. فرض کنید که حالت اولیه حالت  $|n, +\rangle$  باشد که در آن  $n = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  یک برداریکه است. این بردار حالت را به اختصار با  $|\theta, \phi\rangle$  نشان می دهیم:

$$|\psi(0)\rangle = |\theta, \phi\rangle. \quad (92)$$

در نتیجه معلوم می شود که:

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle = |\theta, \phi + \omega t\rangle. \quad (93)$$

که به معنای آن است که بردار حالت اسپین با سرعت زاویه ای  $\omega$  حول میدان مغناطیسی می چرخد. برای این بردار حالت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\langle S_x(t) \rangle &= \sin \theta \cos(\phi + \omega t) \\ \langle S_y(t) \rangle &= \sin \theta \sin(\phi + \omega t) \\ \langle S_z(t) \rangle &= \cos \theta.\end{aligned}\tag{94}$$

این روابط نشان می دهند که اگر برداری به شکل

$$\langle \vec{S} \rangle(t) := (\langle S_x(t) \rangle, \langle S_y(t) \rangle, \langle S_z(t) \rangle)\tag{95}$$

تعریف کنیم که نشان دهنده متوسط مولفه های اسپین است، آنگاه بردار  $\langle \vec{S} \rangle$  همان دینامیکی را دارد که یک گشتاور مغناطیسی کلاسیک در میدان مغناطیسی خواهد داشت. در واقع این یک خاصیت عمومی است به این معنا که متوسط کمیت ها همواره همان رفتاری را دارند که از فیزیک کلاسیک انتظار داریم. در این جا بحث ما درباره اصول موضوع مکانیک کوانتومی و چرایی آنها با ارائه مثال اسپین به عنوان نا آشنا ترین پدیده ی کوانتومی به پایان می رسد. در درس آینده خواهیم دید که چگونه اصول موضوع مکانیک کوانتومی برای توصیف دینامیک یک ذره که مختصات دینامیکی آن مکان و تکانه هستند به کار می رود.

## ۹ مسئله ها

۱ – در این تمرین می خواهیم با آزمایش اشترن گرواخ و پدیده کوانتش اسپین بیشتر آشنا شویم. هدف از آزمایش اشترن گرواخ اندازه گیری ممان مغناطیسی اتم هاست. هرگاه ممان مغناطیسی یک اتم را با  $\vec{\mu}$  نشان دهیم می توان مقدار آن را با گذراندن اتم ها از یک میدان مغناطیسی ناهمگن اندازه گیری کرد. در فیزیک کلاسیک برهم کنش چنین اتمی با میدان مغناطیسی با هامیلتونی زیرتوصیف می شود:

$$H = \frac{P^2}{2m} - \vec{\mu} \cdot \vec{B}.\tag{96}$$

هرگاه این ممان مغناطیسی ناشی از چرخش اتم حول محوری باشد می توان نوشت  $\vec{\mu} = g\vec{S}$  که در آن  $g$  ضریب ژیرومغناطیسی است و  $\vec{S}$  تکانه زاویه ای ذاتی اتم است. درجات آزادی این مسئله عبارتند از مولفه های تکانه زاویه ای و مختصات و تکانه مرکزجرم.

الف : معادلات حرکت را با استفاده از گروه های پوآسون زیر بدست آورید:

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij},$$

$$\begin{aligned} \{S_i, S_j\} &= i\epsilon_{ijk}S_k, \\ \{S_i, x_j\} &= \{S_i, p_j\} = 0, \end{aligned} \quad (97)$$

و نشان دهید که این معادلات به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{r} &= \frac{\vec{P}}{m} \\ \frac{d}{dt}\vec{p} &= \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \\ \frac{d}{dt}\vec{\mu} &= g\vec{\mu} \times \vec{B}. \end{aligned} \quad (98)$$

ب: معادله سوم نشان می دهد که ممان مغناطیسی اتم حول میدان مغناطیسی حرکت چرخشی می کند. فرض کنید که متوسط میدان مغناطیسی در جهت  $\hat{e}_1$  باشد. یعنی  $\vec{B} = B\hat{e}_1$  که در آن  $B$  مقدار متوسط است. هرگاه ناهمگنی میدان مغناطیسی نسبت به این مقدار متوسط کم باشد و هم چنین هرگاه زمان عبور اتم از میدان مغناطیسی نسبت به پریود چرخش آن حول میدان زیاد باشد می توان از مولفه های ممان مغناطیسی در راستای عمود بر  $\hat{e}_1$  صرف نظر کرد.

ب: از معادله سوم نتیجه بگیرید که تحت این شرایط  $\mu_1 := \vec{\mu} \cdot \hat{e}_1$  یک مقدار ثابت است.

ج: از معادله دوم نتیجه بگیرید که

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_1 \cdot \vec{P}) = \mu_1 B' \quad (99)$$

که در آن

$$B' := (\hat{e}_1 \cdot \nabla)(\hat{e}_1 \cdot \vec{B}), \quad (100)$$

کمیتی است که کاملاً به ساختمان مغناطیس بستگی دارد.

از معادله 99 نتیجه می گیریم که نیروی وارد بر ذره دقیقاً متناسب با  $\mu_1$  یعنی مولفه ممان مغناطیسی در راستای میدان مغناطیسی متوسط است.

د: در آزمایش می بینیم که فقط دولکه روی پرده مقابل مغناطیس ایجاد شده است که به این معناست که ممان مغناطیسی ذرات در راستای  $e_1$  تنها دو مقدار داشته است. این دو مقدار برابرند با  $+\mu$  و  $-\mu$ . ضمناً اگر آزمایش رادهرجهتی انجام دهیم بازهم همین دو مقدار بدست می آیند. آیا می توان فرض کرد که اتم ها قبل از اندازه گیری یک ممان مغناطیسی دارند که متوسط آزمایش مولفه آن را در یک جهت معین اندازه می گیریم؟ برای تحقیق این مسئله سه بردار یک  $\hat{e}_1$ ،  $\hat{e}_2$  و  $\hat{e}_3$  تصور کنید که بایکدیگر زاویه  $120^\circ$  درجه می سازند. آیا می توانید برداری مثل  $\vec{\mu}$  تصور کنید که در شرط های زیر صدق کند؟

$$\vec{\mu} \cdot \hat{e}_1 = \pm\mu$$



$$\begin{aligned}\vec{\mu} \cdot \hat{e}_2 &= \pm\mu \\ \vec{\mu} \cdot \hat{e}_3 &= \pm\mu.\end{aligned}\quad (101)$$

۲ - حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (102)$$

الف: اگر یک آزمایش اشترن گزلاخ در راستای  $z$  روی این حالت انجام دهیم با چه احتمالی نتیجه برابر با  $+\frac{\hbar}{2}$  خواهد بود و با چه احتمالی برابر با  $-\frac{\hbar}{2}$ .

ب: اگر یک آزمایش اشترن گزلاخ در راستای  $y$  روی این حالت انجام دهیم با چه احتمالی نتیجه برابر با  $+\frac{\hbar}{2}$  خواهد بود و با چه احتمالی برابر با  $-\frac{\hbar}{2}$ .

ج: متوسط مشاهده پذیرهای زیر در این حالت چقد است:

$$S_x, \quad S_y, \quad S_z. \quad (103)$$

د: یک میدان مغناطیسی ثابت در راستای  $z$  اعمال می کنیم. اگر در لحظه  $t = 0$  ذره در حالت  $|\mathbf{n}\rangle$  باشد، حالت ذره را در لحظه  $t$  پیدا کنید. مقادیر متوسط زیر را به عنوان توابعی از زمان پیدا کنید:

$$\langle S_x(t) \rangle, \quad \langle S_y(t) \rangle, \quad \langle S_z(t) \rangle. \quad (104)$$

۳ - حالت  $|z+\rangle$  را در نظر بگیرید.

اگر اسپین این ذره را در راستای  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  اندازه بگیریم، چه مقادیری و با چه احتمالاتی بدست می آوریم.

۴ - در یک فضای هیلبرت سه بعدی ذره ای در حالت زیر قرار دارد:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (105)$$

بر روی این ذره مشاهده پذیری را که با عملگر زیر توصیف می شود اندازه گیری می کنیم:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (106)$$

الف: تعیین کنید که در اندازه گیری  $A$  چه مقادیری و با چه احتمالاتی بدست می آید. حالت های بعد از اندازه گیری را نیز مشخص کنید.

ب: فرض کنید که عملگر هامیلتونی به شکل زیر است:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (107)$$

اگر در لحظه  $t = 0$  ذره در حالت  $|\psi\rangle$  باشد، حالت ذره را در زمان  $t$  پیدا کنید.

۵ - در لحظه  $t = 0$  تابع موج یک ذره آزاد به جرم  $m$  به شکل زیر است:

$$\psi(x, 0) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{-1/4} e^{-\alpha x^2/2}. \quad (108)$$

الف: تابع موج در فضای تکانه یعنی  $\tilde{\psi}(p, 0)$  را بدست آورید.

ب: توابع موج در فضای مختصات و تکانه را در لحظه  $t$  بدست آورید.

ج: کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle X(t) \rangle, \quad \langle X^2(t) \rangle, \quad \Delta X(t) := \sqrt{\langle X^2(t) \rangle - \langle X(t) \rangle^2}, \quad \langle P(t) \rangle, \quad \langle P^2(t) \rangle, \quad \Delta P(t) := \sqrt{\langle P^2(t) \rangle - \langle P(t) \rangle^2}. \quad (109)$$

د: احتمال اینکه در لحظه  $t$  مکان ذره را در فاصله ی  $(-\alpha, \alpha)$  پیدا کنیم چقدر است؟

ه: احتمال اینکه در لحظه  $t$  تکانه ذره را در فاصله ی  $(-\frac{\hbar}{\alpha}, \frac{\hbar}{\alpha})$  پیدا کنیم چقدر است؟

و: چگالی جریان احتمال یعنی  $J(x, t)$  را بدست آورید.

سعی کنید که تمام نتایج خود را از نظر فیزیکی تعبیر کنید.

۶ - در لحظه  $t = 0$  تابع موج یک ذره آزاد به جرم  $m$  به شکل زیر است:

$$\tilde{\psi}(x, 0) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{-1/4} e^{-\alpha(p-p_0)^2/2}. \quad (110)$$

الف: تابع موج در فضای مختصات یعنی  $\tilde{\psi}(p, 0)$  را بدست آورید.

ب: توابع موج در فضای مختصات و تکانه را در لحظه  $t$  بدست آورید.

ج: کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle X(t) \rangle, \quad \langle X^2(t) \rangle, \quad \Delta X(t) := \sqrt{\langle X^2(t) \rangle - \langle X(t) \rangle^2}, \quad \langle P(t) \rangle, \quad \langle P^2(t) \rangle, \quad \Delta P(t) := \sqrt{\langle P^2(t) \rangle - \langle P(t) \rangle^2}. \quad (111)$$

د: احتمال اینکه در لحظه  $t$  مکان ذره را در فاصله  $y$   $(-\alpha, \alpha)$  پیدا کنیم چقدر است؟

ه: احتمال اینکه در لحظه  $t$  تکانه ذره را در فاصله  $p$   $(-\frac{\hbar}{\alpha}, \frac{\hbar}{\alpha})$  پیدا کنیم چقدر است؟

و: چگالی جریان احتمال یعنی  $J(x, t)$  را بدست آورید.

سعی کنید که تمام نتایج خود را از نظر فیزیکی تعبیر کنید.