تمرین های سری پنجم

مهلت تحویل ۲۶ فروردین ۱۳۸۸

۱. تعداد جایگشت های حروف در کلمه MONOTONOUS را بیابید . در چند حالت هر چهار O در کنار هم هستند؟ در چند حالت فقط سه تا از O ها کنار هم هستند ؟

۲. دو متغیر تصادفی مستقل X و Y دارای توزیع گاوسی با مومنت اول صفر $\langle x\rangle = \langle y\rangle = ۰$ و انحراف میانگین استاندارد $\sigma_x = \sigma_y = ۱$ هستند . تابع مولد را برای متغیر تصادفی $Z = X^۲ + Y^۲$ محاسبه کنید . همچنین مومنت های $\langle z\rangle, \langle z^۲\rangle, \langle z^۳\rangle$ را محاسبه کنید .

۳. با سه باتری قدیمی و یک مقاومت R مداری درست می کنیم. هر یک از باتری ها با احتمال p دارای اختلاف پتانسیل $V = v.$ و با احتمال $۱ - p$ دارای اختلاف پتانسیل $V = ۰$ می باشد . از مقاومت داخلی باتری ها صرفنظر کنید .توان متوسطی که در مقاومت ها اتلاف می شود را در حالت های زیر محاسبه کنید اگر

(الف) باتری ها به صورت سری بسته شده باشند .

(ب) باتری ها به صورت موازی بسته شده باشند .

(ج) در قسمت های (الف) و (ب) اگر همه باتری های دارای اختلاف پتانسیل دقیقاً برابر با $V = v.$ باشد چقدر است ؟

۴. یک ولگشت یک بعدی را در نظر بگیرید . در هر قدم احتمال جابجایی بین x و $x + dx$ عبارت است از

$$P(x)dx = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} \exp(-\frac{(x-a)^۲}{۲\sigma^۲})$$

بعد از قدم N ام، جابجایی ولگرد عبارتست از $S = X_۱ + ... + X_N$ که درآن X_i جابجایی در قدم N ام است . فرض کنید که قدم ها مستقل از هم هستند . بعد از N قدم

(الف) چگالی احتمال برای جابجایی S ولگشت .

(ب) متوسط S را محاسبه کنید .

(ج) انحراف معیار استاندارد S را نیز محاسبه کنید .

۵. ماتریس های اتفاقی : به عنوان یک مدل برای تراز های انرژی هسته های پیچیده ، ویگنر ماتریس های $N \times N$ متقارن با درایه های تصادفی را در نظر می گیرد . فرض کنید که هر درایه M_{ij} (برای $i \geq j$) یک متغیر تصادفی مستقل است که از تابع توزیع زیر پیروی می کند

$$p(M_{ij}) = \frac{۱}{۲a} \qquad for \qquad -a < M_{ij} < a, \qquad and \qquad p(M_{ij}) = ۰ \qquad otherwise$$

(الف) تابع مولد را برای هر کدام از M_{ij} ها محاسبه کنید .

(ب) تابع مولد را برای رد ماتریس ، $T \equiv trM = \Sigma_i M_{ii}$ محاسبه کنید .

(ج) قضیه حد مرکزی چه نتیجه ای برای تابع توزیع احتمال برای N های بزرگ دارد ؟

(د) برای N های بزرگ ، هر ویژه مقدار $\lambda_\alpha(\alpha = 1, 2, ..., N)$ ماتریس M طبق تابع احتمال زیر توزیع شده اند

$$p(\lambda) = \frac{2}{\pi\lambda_0}\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}} \qquad for \qquad -\lambda_0 < \lambda < \lambda_0, \qquad and \qquad p(\lambda) = 0 \qquad otherwise$$

(که بعنوان قانون نیمدایره ای ویگنر شناخته می شود).انحراف میانگین λ را حساب کنید.(توجه . تغییر متغیر $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$ انتگرال را ساده می کند.

(ه) اگر در جواب قبلی داشته باشیم $\lambda_0^2 = 4Na^2/3$ ، آیا ویژه مقادیر می توانند مستقل از هم باشند؟

۶. جانشانی اتفاقی.یک قطعه شیشه را با تبخیر یک الکترود طلا در خلا با عبور جریان و نشاندن روی آن تبدیل به آینه می کنیم .اتم های طلا در جهت های اتفاقی از سطح جدا می شوند و قسمتی از آنها به سطح شیشه می چسبند (یا به اتم هایی که قبلا به شیشه چسبیده اند می چسبند.) فرض کنید که هر ستون ایجاد شده از اتم های طلا مستقل از ستون مجاور رشد می کند و سرعت جانشانی برای هر ستون مقدار ثابت d لایه از اتم بر ثانیه است .

(الف) احتمال اینکه m اتم طلا بعد از زمان t در یک جایگاه جانشانی شوند چقدر است ؟ چه نسبتی از سطح شیشه با طلا پوشیده نشده است ؟

(ب) انحراف میانگین ضخامت طلا در سطح شیشه چقدر است؟

۷. دیود .جریان I عبوری از یک دیود با اختلاف پتانسیل دو سر آن V دارای رابطه

$$I = I_0[\exp(eV/kT) - 1]$$

می باشد . دیود را به پتانسیل اتفاقی V با میانگین صفر و واریانس σ^2, با توزیع گوسی متصل می کنیم . تابع توزیع احتمال $p(I)$ برای جریان عبوری از دیود را بدست آورید. چه جریانی با بیشترین احتمال اتفاق می افتد ؟ متوسط جریان عبوری چقدر است ؟ این مقادیر را روی نمودار مشخص کنید.