

تمرین های سری ششم

مهلت تحویل ۲ اردیبهشت ۱۳۸۸

۲۶ فروردین ۱۳۸۸

(۱) سیلندری حاوی گاز هیدروژن در دما و فشار استاندارد داریم. تعداد دفعاتی که اتمها به دیواره ی سیلندر برخورد می کنند بر واحد زمان، واحد حجم تخمین بزنید.

(۲) برای محاسبه ی حجم فضای فاز برای گاز ایده آل در آنسامبل میکروکانونیک، ما احتیاج داریم مساحت سطح یک کره ی n بعدی به شعاع R را حساب کنیم. حجم یک کره n بعدی به شعاع R به صورت زیر است:

$$\Phi_n(R) = C_n R^n \quad (۱)$$

و مساحت آن:

$$\Sigma_n(R) = n C_n R^{n-1} \quad (۲)$$

برای به دست آوردن این مساحت، ما نیاز داریم ثابت C_n را محاسبه کنیم، نشان دهید که:

$$C_n = \frac{2 \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)} \quad (۳)$$

که $\Gamma(z)$ تابع گاما است.

پیشنهاد: می دانیم که $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ بنابراین:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (۴)$$

حال انتگرال را در مختصات کروی به صورت $\int_0^{\infty} n C_n R^{n-1} \exp(-\lambda R^2) dR$ یک تابع گاما است بازنویسی کنید.

۳) هامیلتونی برای N اتم آزاد از یک گاز ایده آل کلاسیک را می توان به صورت $H = P_1^2 + \dots + P_{3N}^2$ نوشت. که $m = 1$ است. الف) نشان دهید حجم فضای فاز برابر است با:

$$\Gamma(E, V) = K \cdot V^N \Sigma_n(\sqrt{E}) \quad (5)$$

که K یک ثابت و $n = 3N$ است.

ب) Σ_n و آنتروپی $S(E, V)$ را محاسبه کنید

۴) اگر گاز ایده آلی را در پتانسیل خارجی یک نوسانگر هارمونیک قرار دهیم، هامیلتونی آن در واحدی خاص به صورت زیر می شود:

$$H = (P_1^2 + \dots + P_{3N}^2) + (r_1^2 + \dots + r_{3N}^2) \quad (6)$$

الف) نشان دهید که حجم فضای فاز برابر است با $\Gamma(E, V) = K_1 \Sigma_n(\sqrt{E})$ که K_1 ثابت و $n = 6N$ است.

ب) آنتروپی سیستم را حساب کنید.

۵) مطابق با ولگشت اتمها در یک گاز در حین برخورد با هم، تخمین بزنید بزرگی زمانی که طول خواهید کشید تا مولکولهای هوا cm را در یک اتاق طی کنند چقدر است؟ این زمان برای m چقدر است؟

۶) یک گاز N اتمی در حین برخوردهای اتفاقی پس از یک زمان معین می تواند به یک حالت اولیه بازگردد. برای مثال در انبساط آزاد، گاز به سمت قسمتی که از ابتدا خالی بوده است، می گریزد. بر اساس ولگشت، بحث کنید و نشان دهید که بزرگی این زمان e^N برابر تعداد دفعات برخورد است.