

## تمرین های سری هشتم

مهلت تحویل ۲۳ اردیبهشت ۱۳۸۸

۱۶ اردیبهشت ۱۳۸۸

- (۱) یک بلور کامل شامل  $N$  مکان شبکه ای و  $M$  مکان بین شبکه ای است. انرژی لازم برای جابجا کردن یک اتم از شبکه به مکان های بین شبکه ای  $\Delta$  است، هنگامی که تعداد اتمهای جابه جا شده،  $n$ ، کمتر از  $N$  و  $M$  باشد.
- الف) به چند طریق می توان  $n$  اتم را از  $N$  مکان شبکه برداشت؟
- ب) به چند طریق می توان  $n$  اتم را در  $M$  مکان بین شبکه ای قرار داد؟
- ج) با استفاده از آزنامل میکروکانونیک، آنتروپی را به صورت تابعی از انرژی کل،  $E$ ، محاسبه کنید و دما را تعیین کنید.
- د) نشان دهید متوسط تعداد اتمهای جابه جا شده  $n$  در دمای  $T$  به صورت زیر است.  $n$  را برای  $\Delta \gg KT$  و  $\Delta \ll KT$  بدست آورید.

$$\frac{n^2}{(N-n)(M-n)} = e^{(-\Delta/KT)} \quad (1)$$

- (۲) یک رشته یک بعدی که از انتهایش ثابت شده است شامل  $N$  عنصر یکسان به طول  $a$  است. زاویه بین عناصر متوالی  $^\circ$  یا  $18^\circ$  درجه می باشد (همانطور که در شکل نشان داده شده است). هیچ تفاوتی بین انرژیهای این دو حالت ممکن وجود ندارد. ما می توانیم هر عنصر را در جهت مثبت یا منفی در نظر بگیریم. فرض کنید  $N_+$  و  $N_-$  تعداد عناصر مثبت و منفی است و  $L$  طول کل رشته است. داریم:

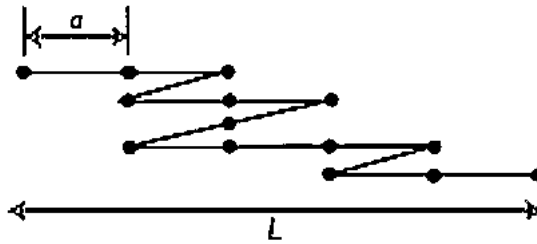
$$N = N_+ + N_- \quad (2)$$

$$L = a(N_+ - N_-) \quad (3)$$

یک خاصیت جالب این مدل آن است که انرژی داخلی به  $L$  بستگی ندارد اما کشش  $\tau$  وجود دارد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$dU = TdS + \tau dL \quad (4)$$

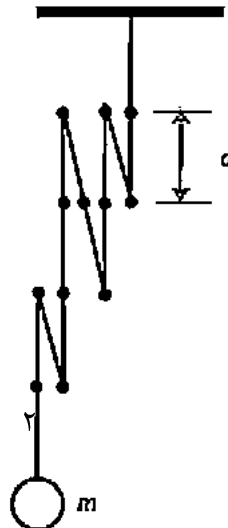
این نتیجه آماری است و از این حقیقت بدست می آید که انتهای رشته می خواهد در فضای فاز نمونه آزاد باشد.



کمیت های زیر را محاسبه کنید:

- الف) آنتروپی را به صورت تابعی از  $N$  و  $N_+$ .
- ب) انرژی آزاد را به صورت تابعی از  $N$  و  $N_+$ .
- ج) کشش  $\tau$  را به صورت تابعی از  $T$  و  $N$  و  $L$ .

۳) یک رشته شامل  $N$  قطعه به طول مساوی  $a$  از سقف آویزان است. انتهای آن به جسمی به جرم  $m$  تحت نیروی گرانش متصل است. هر قطعه می تواند در دو حالت بالا و پایین (با توجه به شکل) باشد.



الف) نشان دهید تابع پارش در دمای  $T$  به صورت زیر است :

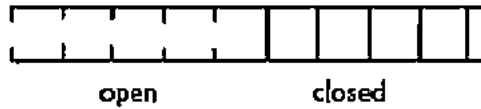
$$Q_N = (1 + e^{-\frac{mg\alpha}{kT}}) \quad (5)$$

ب) آنتروپی رشته را بدست آورید.

ج) انرژی داخلی را بیابید و طول رشته را تعیین کنید.

د) نشان دهید این رشته از قانون هوک پیروی می کند، جرم انتهای رشته متناسباً موجب افزایش طول آن می شود. ضریب تناسب را بیابید.

۴) باز کردن یک مولکول  $DNA$  مانند باز کردن یک زیپ است. این  $DNA$  شامل  $N$  پیوند است. که هر کدام در یکی از دو حالت بسته با انرژی صفر و باز با انرژی  $\Delta$  می تواند باشد. یک پیوند تنها در حالتی می تواند باز شود که تمام پیوندهای سمت چپ آن باز باشند.



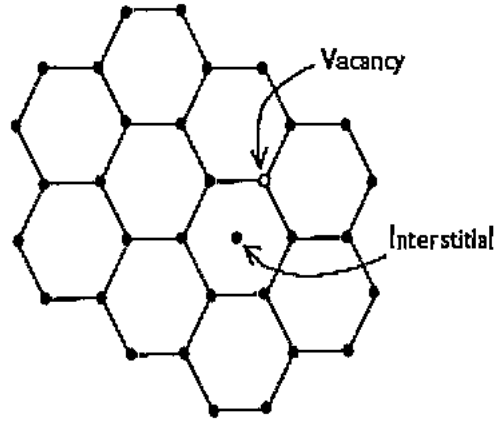
الف) نشان دهید تابع پارش مولکول  $DNA$  به صورت زیر است.

$$Q_N = \frac{1 - e^{-(N+1)\Delta/kT}}{1 - e^{-\Delta/kT}} \quad (6)$$

ب) متوسط تعداد پیوندهای باز را در حد دماهای پایین  $\Delta \ll kT$  بدست آورید.

۵) قسمتی از یک گرافیت دو بعدی شامل  $N$  اتم کربن به شکل کندوی عسل را در نظر بگیرید. فرض کنید انرژی  $\Delta$  لازم است تا یک اتم کربن را از راسهای شبکه برداشته و داخلش ضلعیها قرار دهیم تا یک جای خالی و یک میان شبکه بدست آید.

الف) نشان دهید  $N/2$  حالت ممکن برای میان شبکه‌ها وجود دارد.



ب) یک آنزامل میکرکانونیک از این سیستم را در انرژی کل  $E$  در نظر بگیرید. برای  $M$  میان شبکه آنتروپی را در  $N$  ها و  $M$  های بزرگ بیابید.  
 ج) دما را به صورت  $T^{-1} = \partial S / \partial E$  تعریف کنید و انرژی را به صورت تابعی از دما در دو حد  $T \rightarrow \infty$  و  $T \rightarrow 0$  بدست آورید.