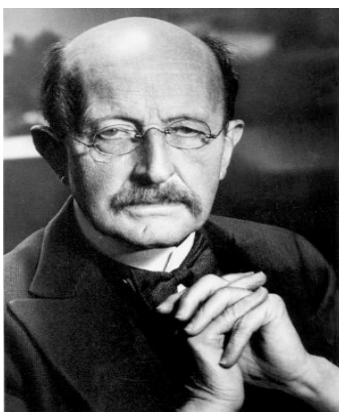


ترمودینامیک و مکانیک آماری تابش

وحید کریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲۲ آذر ۱۴۰۲



شکل ۱: ماکس پلانک (۱۸۵۸-۱۹۴۷)

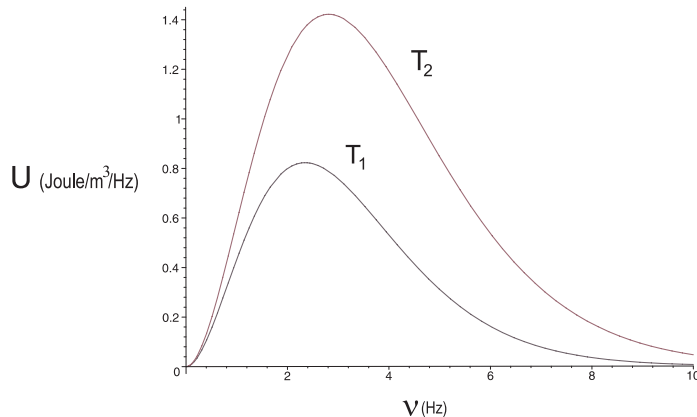
«... هنگامی که به بیست سال پیش از زمانی می نگرم که اندیشه کوانتوم پیداشد و اندازه گیری آن از طریق واقعیت های تجربی صورت گرفت، و نیز به راه دور و دراز و پریپیچ و خمی می نگرم که به این اکتشاف انجامید، سخت به یاد گوته می افتم که گفته بود، انسانها تا زمانی که در جستجوی چیزی هستند پیوسته اشتباه می کنند و دچار خطا می شوند. در اثنای تلاش و کوشش دراز و دشوار، پژوهنده ممکن است مکرر در مکرر گرفتار این وسوسه بشود که از کوشش خود به عنوان اینکه بیهوده و بی حاصل است دست بردارد، ولی گاه به گاه برقی در راه او می جهد و دلیل شکست ناپذیری برای او می شود برای اینکه، پس از همه خطاهایی که در برداشتن گامی پس از گامی دیگر مرتکب شده است، لااقل به این نتیجه رسیده است که یک گام به حقیقتی که در جستجوی آن است نزدیک تر شده است...»^آ

^آ از خطابه پلانک در فرهنگستان پادشاهی علوم سوئد، هنگام دریافت جایزه نوبل.

۱ تعادل گرمایی ماده و نور

تعادل گرمایی ماده و نور نخستین شکافی بود که در بنای باشکوه فیزیک کلاسیک پدیدار شد و تلاش برای پر کردن همین شکاف بود که نهایتاً چشم انداز کاملاً نوینی به سوی دنیای میکروسکوپی گشود. این مثالی است از این که چگونه تلاش برای فهم هر پدیده ای هر چند به ظاهر جزئی و کم اهمیت می تواند به انقلاب های بزرگ فکری در فهم ما از طبیعت و قوانین جهان منجر شود. اما تعادل گرمای نور و ماده چیست و چگونه است که فیزیک کلاسیک قادر به توضیح این پدیده و داده های آزمایشی نبود و چگونه تلاش برای توضیح این پدیده نهایتاً منجر به کشف مکانیک کوانتومی شد و نقش مکانیک آماری در این میانه چیست؟ این داستان موضوع این فصل است.

وقتی که یک محفظه خالی که از این به بعد آن را کاواک می نامیم، را گرم می کنیم نورانی شده و بسته به دمایی که پیدا می کند شروع به تابش نور می کند یا به عبارت بهتر در درون این محفظه پر از تابش نور می شود که می توان مشخصات این تابش را با ایجاد یک روزنه کوچک در دیواره محفظه مطالعه کرد. مثلاً می توان طیف تابش گرمایی ایجاد شده را در هر دما اندازه گرفت. و تعیین کرد که در هر بازه فرکانسی چه مقدار انرژی نورانی درون محفظه وجود دارد. شکل تجربی این طیف در نمودار (۱) نشان داده شده است. آنچه که برای ما و برای آزمایشگر مهم است این است که نور می تواند در طیفی از فرکانس های مختلف وجود داشته باشد و هدف ما هم این است که بفهمیم در حالت تعادل در هر بازه فرکانسی چه مقدار انرژی نورانی در این محفظه قرار دارد و انرژی چگونه در بازه های مختلف فرکانس توزیع شده است. همواره می توان یک روزنه کوچک در محفظه نورانی که در یک دمای معین به تعادل رسیده ایجاد کرد و نوری را که از آن روزنه به بیرون تابش می شود طیف سنجی کرد. این طیف سنجی اطلاعات کاملی از آنچه که در درون محفظه می گذرد، در اختیار آزمایشگر قرار می دهد. از جمله تعیین می کند که توزیع انرژی در بازه های فرکانسی چگونه است.



شکل ۲: طیف تابش جسم سیاه، آنچنان که در تجربه دیده می شود. دمای T_2 از دمای T_1 بیشتر است به همین دلیل طیف تابشی به طرف فرکانس های بالاتر و یا طول موج های پایین تر میل پیدا کرده است.

ممکن است بپرسیم چرا مطالعه این پدیده تا به این حد مورد علاقه فیزیکدانان در قرن نوزدهم بوده است؟ دلیل اش این است که از نظر تجربی ثابت شده بود که این طیف هیچ نوع بستگی به هیچ کدام از خواص جسمی که گرم می شود (نظیر جنس ماده دیواره ها، حجم و شکل محفظه) ندارد و بنابراین در بردارنده یک خصلت اساسی و عام از تعادل ماده و نور است. از نظر کیفی و با دانشی که در انتهای قرن نوزدهم داریم چه اتفاقی می افتد؟ اتم های تشکیل دهنده دیواره دارای بار الکتریکی هستند. در اثر دما اتم ها ملتهب شده (بارهای الکتریکی درون آنها شتاب گرفته) و شروع به تابش می کنند. این تابش توسط دیگر اتم ها جذب شده و باز تابش می شود. سرانجام بعد از رد و بدل کردن های انرژی بین اتم ها و نور، تعادل گرمایی حاصل می شود. بنابراین ذرات بارداری که درون دیواره هستند، تحت تاثیر میدان الکتریکی و مغناطیسی نور قرار گرفته، مرتعش می شوند و از خود نور ساطع می کنند، نوری که اتم های دیگر را به نوبه خود مرتعش کرده و آن ها را به گسیل نور وامی دارد. در حالت تعادل محفظه پر می شود از نور یا همان امواج الکترومغناطیسی. انرژی درون محفظه مطابق با قوانین ماکسول که به تایید تجربی نیز رسیده است برابر است با:

$$H = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + c^2 \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})). \quad (1)$$

در این رابطه ϵ_0 ضریب نفوذ پذیری خلاء و c سرعت نور است. $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ و $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ نیز میدان های الکتریکی و مغناطیسی در هر نقطه هستند. اما می دانیم که هر شکلی از میدان الکتریکی را می توان بر حسب امواج تخت که بردار موجی \mathbf{k} و فرکانس $\omega = c|\mathbf{k}|$ دارند، بسط داد. یعنی می

توان نوشت:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_{\mathbf{k}}^* e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}. \quad (۲)$$

در این رابطه $a_{\mathbf{k}}$ ها و $a_{\mathbf{k}}^*$ دامنه های موج های تخت گوناگون هستند. از آنجا که \mathbf{E} و \mathbf{B} بردار هستند، این دامنه ها هم بردار هستند. هم چنین از آنجا که میدان های الکتریکی و مغناطیسی عمود بر جهت انتشار هستند، این دامنه ها نیز عمود بر جهت انتشار هستند. در نتیجه در صفحه عمود بر جهت انتشار این بردارها دو مولفه ای هستند و همین است که آن را به عنوان قطبش موج می شناسیم. از معادلات ماکسول هم می دانیم که

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}.$$

این رابطه به ما نشان می دهد که میدان مغناطیسی را نیز می توانیم بر حسب امواج تخت بسط دهیم. خواننده علاقمند می تواند این بسط را پیدا کند که چنین خواهد بود:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \times a_{\mathbf{k}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} - \hat{\mathbf{k}} \times a_{\mathbf{k}}^* e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}. \quad (۳)$$

که در آن $\hat{\mathbf{k}}$ بردار یکه در جهت انتشار است. با قرار دادن این بسط ها در رابطه انرژی و محاسبه انتگرال (که لازم نیست در این درس به آن بپردازیم) نهایتاً به رابطه زیر می رسیم:

$$H = V \epsilon_0 \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* + a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}). \quad (۴)$$

با انتخاب متغیرهای جدید

$$a_{\mathbf{k}} := \frac{1}{\sqrt{2}} (q_{\mathbf{k}} + ip_{\mathbf{k}}) \quad , \quad a_{\mathbf{k}}^* := \frac{1}{\sqrt{2}} (q_{\mathbf{k}} - ip_{\mathbf{k}}) \quad (۵)$$

می توان انرژی را به شکل زیر نوشت:

$$H = V \epsilon_0 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (p_{\mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}}^2) \quad (۶)$$

به این ترتیب برحسب این متغیرهای جدید عبارت انرژی میدان الکترومغناطیسی یا هامیلتونی آن با انرژی مجموعه ای از نوسانگرهای هماهنگ مستقل از هم یکسان می شود. می دانیم که در دمای T انرژی متوسط هر نوسانگر (یا همان موج هماهنگ) برابر است با kT . بنابراین برای این که انرژی متوسط تابش را حساب کنیم تنها کافی است بفهمیم که در هر بازه فرکانس $(\omega, \omega + d\omega)$ چه تعداد موج هماهنگ وجود دارد. همانطور

که بعداً خواهیم دید، تعداد این موج های هماهنگ با حجم محفظه متناسب است. بنابراین هرگاه تعداد این موج های هماهنگ را در واحد حجم با $n(\omega)d\omega$ نشان دهیم، میزان انرژی کل در یک بازه فرکانسی در واحد حجم برابر خواهد شد با:

$$U(\omega)d\omega = n(\omega)kT d\omega \quad (7)$$

از همین رابطه مشخص است که فیزیک کلاسیک نمی تواند مشاهدات تجربی مربوط به تابش جسم سیاه را توصیف کند. رابطه بالا نشان میدهد که در همه فرکانس ها انرژی تابش متناسب با دما زیاد می شود و این بوضوح با نتایج تجربی که در شکل (۱) نشان داده می شود متفاوت است. ناتوانی فیزیک کلاسیک را به یک شکل دیگر نیز می توان دید. اگر به رابطه (۷) نگاه کنیم، متوجه می شویم که میزان کل انرژی تابشی در واحد حجم برابر است با:

$$U_{tot} = \int_0^{\infty} U(\omega)d\omega = \left(\int_0^{\infty} n(\omega)d\omega \right) kT = NkT \quad (8)$$

که در آن N تعداد کل فرکانس هاست. اما می دانیم که تعداد کل فرکانس های ممکن در یک محفظه بی نهایت است. بنابر این انرژی کل تابشی در درون محفظه نیز بی نهایت است که به وضوح نتیجه ای غیرفیزیکی و نادرست است. برای بررسی بهتر و دقیق تر این پدیده و فهمیدن این که اشکال اساسی در کجاست بهتر است که یک بار تعداد هماهنگ ها را در هر بازه فرکانسی محاسبه کنیم. ساده ترین محاسبه این است که شکل محفظه را مکعبی فرض کنیم اگر چه محاسبات خیلی دقیق نشان می دهد که نتیجه نهایی مستقل از شکل ظرف است. یک موج تخت با بردار موج $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ مشخص می شود. شرایط مرزی پریودیک روی دیواره ها نشان می دهد که مولفه های این بردار موج به صورت زیر گسسته هستند:

$$k_x = \frac{\pi}{L}n_x, \quad k_y = \frac{\pi}{L}n_y, \quad k_z = \frac{\pi}{L}n_z, \quad n_x, n_y, n_z \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (9)$$

این رابطه ها در واقع می گویند که موج ایستاده الکترومغناطیسی می بایست چنان باشد که در هر جهت مضرب صحیحی از نیم طول موج بین دو دیواره قرار بگیرد. به عبارت دیگر، اگر یک موج ایستاده یک بعدی داشته باشیم:

$$n \frac{\lambda}{2} = L \quad \rightarrow \quad k \equiv \frac{n\pi}{L}. \quad (10)$$

به هر کدام از این نوسانگرها یک وجه یا یک هماهنگ^۱ می گوئیم. نخست ببینیم در المان حجم $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ چه تعداد موج هماهنگ وجود دارد. برای یافتن این تعداد دقت می کنیم که

$$\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = 2 \times \frac{\pi^3}{L^3} \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z. \quad (11)$$

Mode^۱

ضرب 2 به دلیل این است که به ازای هر بردار موج، دو قطبش متفاوت وجود دارد. این امر در رابطه ی (۲) در برداری بودن $a_{\mathbf{k}}$ ها و $a_{\mathbf{k}}^*$ منعکس شده است. بنابراین تعداد وجه ها در بازه ای به حجم $d^3\mathbf{k}$ عبارت است از:

$$dn = 2 \frac{V}{\pi^3} d^3\mathbf{k}. \quad (12)$$

برای اینکه تعداد وجه ها را در یک بازه فرکانس حساب کنیم، باید این روی تمام المان های $d^3\mathbf{k}$ که متناظر با یک طول مشخص از $\frac{\omega}{c}$ $|\mathbf{k}|$ هستند انتگرال بگیریم. این کار با رفتن به مختصات قطبی انجام می شود. می نویسیم: دقت می کنیم

$$n(\omega)d\omega = 2 \times \frac{1}{8} \int_{\Omega} \frac{V}{\pi^3} k^2 dk d\Omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega. \quad (13)$$

در این جا انتگرال روی همه زاویه ها گرفته شده و از آنجا که عبارت زیر انتگرال تنها به اندازه k بستگی دارد، حاصل انتگرال تنها با ضرب کردن عبارت زیر انتگرال در 4π بدست آمده است. ضرب $\frac{1}{8}$ برای این است که تنها می بایست روی k های مثبت انتگرال بگیریم. به این ترتیب به رابطه ای می رسیم که از این به بعد زیاد به آن احتیاج داریم و آن چگالی هماهنگ ها در یک بازه فرکانسی است:

$$n(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega \quad (14)$$

و یا با توجه به این که $\omega = 2\pi\nu$ ،

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu. \quad (15)$$

دقت کنید که این عبارت ها چگالی هماهنگ ها در یک بازه فرکانسی در کل حجم است. اگر بخواهیم چگالی هماهنگ ها را بر واحد حجم حساب کنیم، ضرب V را می بایست از صورت این کسرها برداریم.

تا سال ۱۹۰۰ کسی نتوانست هیچ توضیح منطقی برای تابش جسم سیاه بر مبنای فیزیک کلاسیک پیدا کند. در این سال بود که پلانک با پیشنهاد شجاعانه ای نخستین دریچه به سوی دنیای کوانتومی را گشود. وی نخست سعی کرد که یک عبارت تحلیلی برای منحنی تابش جسم سیاه پیدا کند. تا آن موقع کسی چنین کاری نکرده بود و هیچ عبارت تحلیلی برای این منحنی در دست نبود. توجه به این نکته مهم است که ما با یک منحنی واحد سروکار نداریم بلکه به ازای هر دما یک منحنی در پیش رو داریم و از همین جا می توان دشواری و اهمیت کار پلانک را آن هم در دورانی که هیچ خبری از رایانه های امروزی نبود، برای پیدا کردن یک عبارت تحلیلی که در همه دما ها و همه فرکانس ها معتبر باشد دریافت.

وی پس از کار طاقت فرسایی که اوج تلاش بیست ساله وی برای درک تابش گرمایی بود، سرانجام توانست این عبارت تحلیلی را پیدا کند. این عبارت تحلیلی به شکل زیر است:

$$U(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (16)$$

که در آن h یک ثابت جهانی (مثل سرعت نور یا ثابت بولتزمن) است که به افتخار کارِ عظیمِ وی ثابت پلانک نام گرفته است و مقدار عددی آن عبارت است از:

$$h = 6.627 \times 10^{-34} \text{ Joule second}. \quad (17)$$

حتی امروزه نیز درک مهارت فنی ای که پلانک به کار برده است تا از مقایسه انبوه مشاهدات تجربی بتواند مقدار این ثابت را تعیین کند، دشوار است.

مرحله بعدی در کار پلانک آن بود که توضیحی برای وجود این تابع پیدا کند. ما تنها می توانیم به حدس و گمان متوسل شویم تا راه پریچ و خمی را که پلانک برای رسیدن به ایده کوانتوم طی کرده است با ساده انگاری فراوان بازسازی کنیم. اگر به رابطه 16 نگاه کنیم متوجه می شویم که عامل $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ که تعداد وجه های تابش را می شمارد و از یک ملاحظه هندسی بدست آمده است در این رابطه نیز وجود دارد. این عبارت متوسط انرژی یک هماهنگ است که تغییر یافته و از مقدار kT به مقدار $\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ تغییر یافته است. نکته مهم این است که این انرژی متوسط دیگر مستقل از فرکانس نیست. اگر $h\nu$ خیلی کوچکتر از kT باشد، با استفاده از بسط $e^x \approx 1 + x$ نتیجه می گیریم که انرژی متوسط همان مقدار kT است و اگر $h\nu$ خیلی بزرگتر از kT باشد این انرژی متوسط صفر است. در واقع کشف ثابت پلانک باعث شده است که ما بتوانیم برای هر فرکانس ν یک انرژی مشخصه به اندازه $h\nu$ تعریف کنیم تا بتوانیم آن را با انرژی مشخصه دیگری مثل kT مقایسه کنیم. فرض پلانک آن بود که یک وجه تابشی با فرکانس ν مقدار انرژی هایی را که مبادله می کند به صورت پیوسته نیست بلکه به صورت مضاربی از این انرژی مشخصه یعنی $h\nu$ است. با قبول چنین فرضی انرژی متوسط یک وجه در دمای T را حساب می کنیم. بنابر اصل مکانیک آماری احتمال اینکه این وجه انرژی $nh\nu$ داشته باشد برابر است با $\frac{1}{Z} e^{-\beta nh\nu}$ که در آن Z برابر است با:

$$Z := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta nh\nu} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}. \quad (18)$$

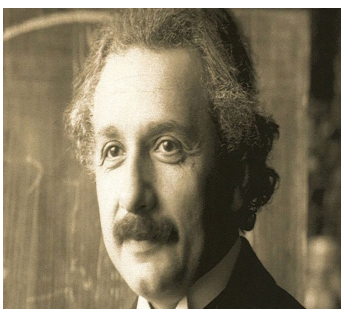
با داشتن این تابع پارش می توان انرژی متوسط ذخیره شده در یک موج هماهنگ را حساب کرد. به سادگی به دست می آوریم

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (19)$$

با ضرب کردن این انرژی متوسط در تعداد موج های هماهنگ با فرکانس ν به همان رابطه پلانک می رسیم. به این ترتیب با فرض گسسته بودن انرژی مبادله شده بین تابش و ماده پلانک توانست رابطه صحیح و عمومی طیف تابش گرمایی را توضیح دهد. این فرض در ضمن به معنای آن است که انرژی های مجاز برای یک نوسانگر نیز پیوسته نیستند بلکه این انرژی ها مقادیری گسسته را تشکیل می دهند که تفاوت آنها مضربی از $h\nu$ است. به این ترتیب ایده کوانتوم انرژی، سطوح گسسته انرژی و یک ثابت عمومی و جهانی به نام ثابت پلانک در سال ۱۹۰۰ جایگزین ایده های قدیمی فیزیک کلاسیک شد. به این ترتیب مقاله ای که پلانک در ۱۴ دسامبر ۱۹۰۰ به انجمن فیزیک آلمان عرضه کرد، و در آن نتایج اکتشاف خود را بیان کرد، در واقع علامت پایان دوره مکانیکی و سرآغاز دوره جدیدی در علم است.

پلانک برای این کشف راه بسیار پریپیچ و خمی را پیمود که ماحصل بیش از بیست سال کار مداوم او در باره طیف تابش گرمایی بود. وی با تواضع زیاد در باره کشفش چنین گفته است: « یک نفر معدنچی را تصور کنید که سالها لاینقطع سینه‌ی زمین را در جستجوی ماده معدنی معینی شکافته باشد، اما شیبی با رگه‌ای از طلا برخورد کند که اصلاً وجود آن را حدس هم نمی زد. قدر مسلم آن است که اگر او با این رگه برخورد نمی کرد، حتماً دیگری آن را می یافت.»^۲ اما همانطور که پی یر روسو در کتاب تاریخ علم گفته است: « ما مسئولیت آن را می پذیریم که جز او هیچ کس قادر نبود تئوری کوانتا را وضع کند».

برای اینکه عظمت کار پلانک را درک کنیم بد نیست در این جا بحث خود در باره تابش گرمایی را با نقل قطعه ای از یک کتاب به پایان ببریم. این کتاب « علم به کجا می رود؟ » نام دارد و نوشته پلانک است. در دیباچه ای که جیمز مورفی بر آن نوشته است چنین می خوانیم:



شکل ۳: آلبرت آاینشتین (۱۸۷۷-۱۹۵۵)

^۲ تاریخ علوم: نوشته پی یر روسو، ترجمه حسن صفاری، انتشارات امیرکبیر، ۱۳۵۸

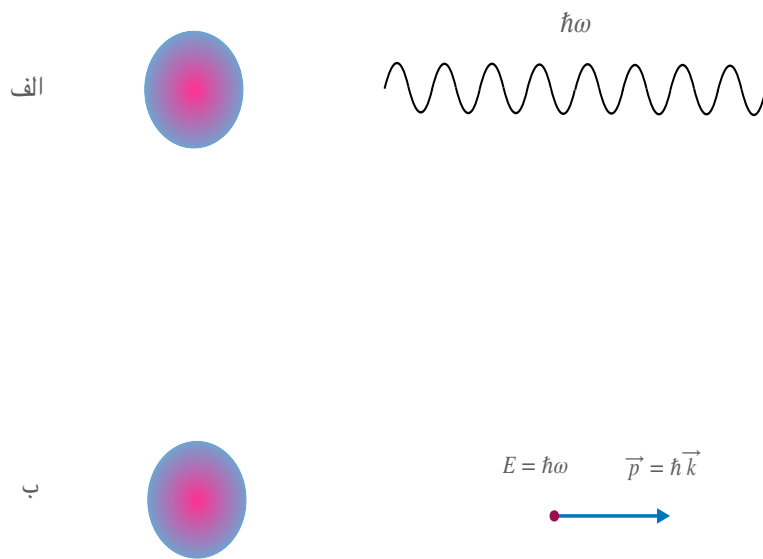
«.... روزی از ماه ژوئن ۱۹۳۲ در خانه بیلاقی اینشتین نزدیک پانزده مایلی مغرب برلن، به دیدار او رفتم. خانه اینشتین بر بالای تپه کم شیبی ساخته شده و دریاچه زیبایی چشم انداز آن را تشکیل می دهد. طبقه آخر آن ایوانی دارد که به صحنه‌ی وسیع یک رصدخانه شبیه است و بر این ایوان دوربینی است که گاهگاه اینشتین با نگاه کردن از آن به ستارگان خود را مشغول می دارد. هنگامی که تاریکی شامگاهی نزدیک می شد و پرتو درخشان خورشید که سراسر روز به سطح دریاچه می خورد رفته رفته حالت آشفته‌گی پیدا می کرد، با هم به ایوان رفتیم تا فرورفتن خورشید را تماشا کنیم.... آنگاه که در داخل اتاق بودیم موضوع اصلی گفتگو همه بحران سیاسی بود، ولی در اینجا، در میان هماهنگی دریاچه و جنگل و خورشید در حال فرو شدن، مطلب عالیتری مرکز بحث را تشکیل می داد. نام ماکس پلانک در ضمن سخن به میان آمد و دنباله بحث به مسائل فلسفی گوناگونی کشید که از فیزیک کوانتومی برخاسته است.... من از اینشتین درخواست کردم که برای کتابی که بنامست پلانک بنویسد و در انگلستان منتشر شود، مقدمه ای بنویسد. وی گفت که معرفی پلانک از طرف او به مردم امری است که به نظر وی با جاه طلبی و ادعا همراه است، چرا که کاشف نظریه کوانتومی نیازمند آن نیست که از منبع کم نورتری نور منعکس بر او بتابد. این بود وضع اینشتین در برابر پلانک که با لحن صادقانه، روشن و اصیلی بیان می شد....»^۱

^۱ به نقل از جیمز مورفی از کتاب تاریخ علوم، نوشته پی یر روسو، ترجمه حسن صفاری، انتشارات امیرکبیر، ۱۳۵۸..

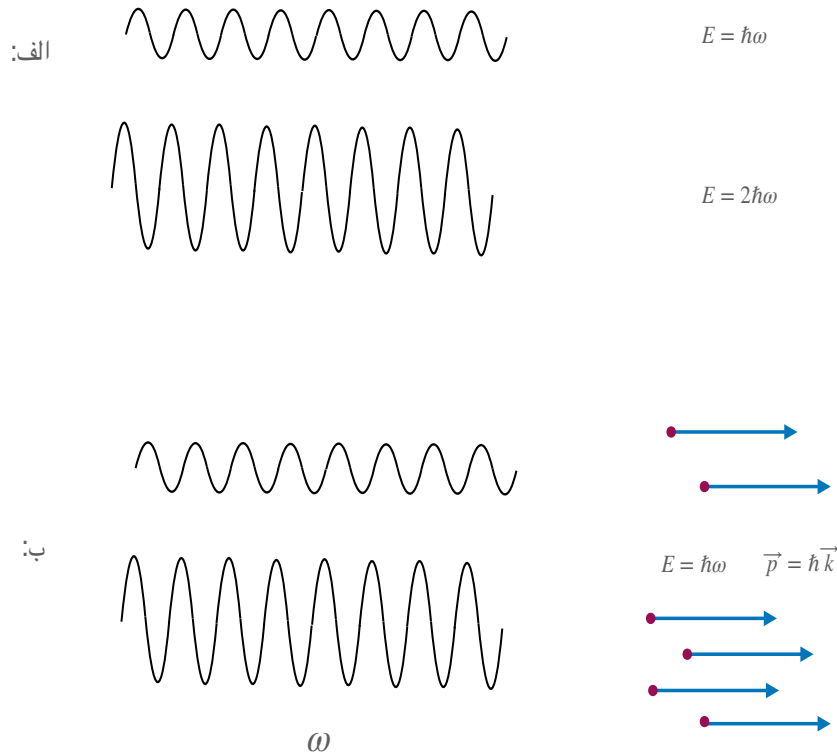
۲ گاز فوتونی

فرض اساسی پلانک این بود که نور وقتی با ماده تبادل انرژی می کند این تبادل را در بسته های کوچک انرژی انجام می دهد، به این معنا که انرژی نوری که با فرکانس ω در فضای درون کاواک منتشر می شود، همواره به صورت بسته های کوچک انرژی به اندازه $\hbar\omega$ منتشر می شود که آنها را کوانتوم های انرژی نامید. نوری که از ماده ساطع می شود هم چنان به صورت یک موج در فضا منتشر می شود، اما انرژی این بسته موج برابر است با $\hbar\omega$. یادآوری این نکته مهم است که در این زمان یعنی سال ۱۹۰۰ هنوز هیچ چیز در باره ساختار اتمی و اینکه هسته ای دارد و الکترون ها به دور این هسته می گردند نمی دانستیم. برای توضیح تابش جسم سیاه همین قدر کافی است که بپذیریم انرژی نوری با فرکانس ω الف- مقدارهای پیوسته ندارد، و ب- به دامنه موج نور وابسته نیست بلکه مضرب صحیحی از فرکانس آن نور است. وقتی که این فرض ها را با دانشی که از تعداد هماهنگ ها یا امواج نور در هر بازه $(\omega, \omega + d\omega)$ ترکیب کنیم به رابطه تابش جسم سیاه آنچنان که پلانک استخراج کرده و با تجربه هم تطابق کامل دارد، می رسم.

این همه آن چیزی است که پلانک برای استخراج نظری تابش جسم سیاه بکار برد که در بخش پیشین آن را شرح دادیم. از اینجا تا فرض وجود فوتون یک قدم اما یک قدم بزرگ باقی است و این گامی بود که توسط اینشتین برداشته شد. تصویر اینشتین از نور با تصویر پلانک یک تفاوت مهم و اساسی دارد و این تفاوت در شکل های (۲) و (۲) نشان داده شده است.



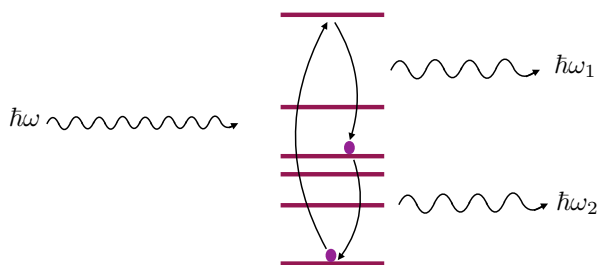
شکل ۴: الف: نوری با فرکانس ω که از ماده ساطع می شود، به صورت موج است اما این موج انرژی گسسته است و انرژی آن مضربی صحیح از $\hbar\omega$ است. ب: نوری که با فرکانس ω از ماده ساطع می شود به صورت بارانی از ذرات است که همگی انرژی $\hbar\omega$ و تکانه $\hbar\vec{k}$ دارند.



شکل ۵: الف: در تصویر پلانک، انرژی نور مضرری از $\hbar\omega$ است. هر چه دامنه موج بیشتر باشد، شدت نور و انرژی آن بیشتر است اما نمی دانیم چرا انرژی موج گسسته است. ب: در تصویر اینشتین، هر چه شدت نور با فرکانس ω بیشتر باشد، به همان نسبت هم تعداد فوتون های ساطع شده با انرژی $\hbar\omega$ بیشتر است. بنابراین شدت نور متناسب با تعداد فوتون هاست.

در تصویر اینشتین، نور بارانی از ذراتی است به اسم فوتون. نوری که فرکانس ω و بردار موج \mathbf{k} دارد، از فوتون هایی با انرژی $\hbar\omega$ تشکیل و تکانه $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ تشکیل شده است. هر چه که شدت نور با یک فرکانس معین بیشتر باشد، به معنای این است که تعداد فوتون های با این فرکانس هم به همان نسبت بیشتر است. بنابراین نوری که در درون یک کاواک با ماده به حالت تعادل رسیده است در واقع چیزی نیست جز گازی از فوتون ها. بنابراین مثل همه گازهای دیگر می توان این گاز فوتونی را نیز از نظر مکانیک آماری، نظریه جنبشی و ترمودینامیک مطالعه کرد. می توان پرسید که فشار این گاز چقدر است، آنتروپی آن چقدر است، تابع گیبس و پتانسیل شیمیایی آن چقدر است، چه معادله حالتی دارد، و اگر یک روزنه در دیواره کاواک ایجاد کنیم، با چه سرعتی از درون کاواک به بیرون نشت می کند؟ هم چنین می توان پرسید که آیا توزیع سرعت های

این گاز چگونه است؟ آیا مثل توزیع ماکسول - بولتزمان است؟ این سوالات را می توانیم در این بخش پاسخ دهیم. نخستین چیزی که باید به آن توجه کنیم این است که اگر چه فوتون ها با هم برکنش نمی کنند اما گاز فوتونی با گاز ایده آلی از اتم ها یک فرق اساسی دارد و آن این است که تعداد فوتون ها یکسان نیست و برهم کنش فوتون ها با دیواره های کاواک مثل برهم کنش اتم ها با دیواره ها نیست. اتم ها با دیواره ها برخورد می کنند و تنها منعکس می شوند. اما فوتون ها جذب دیواره ها می شوند و بعد با فرکانس ها و تعداد متفاوتی دوباره به محیط برمی گردند. یک فوتون آنچنانکه در شکل (۲) نشان داده شده است، می تواند توسط یک اتم جذب شود اتم را به لایه های انرژی بالاتر ببرد و چند لحظه بعد اتم در بازگشت به حالت پایه دو فوتون با فرکانس های متفاوت به محیط تابش کند. برای درک بقیه این درس کافی است که فکر کنیم فوتون ذره



شکل ۶: یک فوتون می تواند یک اتم را از حالت پایه به حالت بالاتر تحریک کند و سپس اتم با تابش دو فوتون به حالت پایه برگردد. به این ترتیب تعداد فوتون ها در یک کاواک می تواند تغییر کند بدون اینکه انرژی تغییر کند. پتانسیل شیمیایی فوتون ها برابر با صفر است.

ای است با تکانه و انرژی

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}, \quad E = \hbar \omega$$

که در آن رابطه $\omega = c|\mathbf{k}|$ نیز برقرار است. کافی است که بپذیریم هر حالت از میدان الکترومغناطیسی چیزی نیست جز انبوهی از فوتون ها که با تکانه ها و انرژی های گوناگون در حال حرکت اند. هر میکرو حالت تابش نیز با مجموعه اعداد صحیح

$$\{n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, n_{\mathbf{k}_3}, n_{\mathbf{k}_4}, \dots\}$$

مشخص می شود که بیان می کند از هر تکانه و فرکانس چه تعداد فوتون در درون محفظه وجود دارد، می توانیم به اختصار هر چنین میکرو حالتی را با نماد $\{n_1, n_2, n_3, n_4, \dots\}$ نشان دهیم. تعداد هماهنگ ها یا امواج تخت را در هر بازه فرکانسی قبلا حساب کرده ایم و تعبیر فوتونی تغییری

در این تعداد و شیوه محاسبه آن نمی دهد. بنابراین هم چنان تعداد این هماهنگ ها برابر است با:

$$n(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega \quad (20)$$

و یا

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu. \quad (21)$$

هر میکروحالت با این تعریف مشخص می شود که در هر هماهنگ یا هر موج چه مقدار انرژی یا چه تعداد فوتون داریم. بنابراین انرژی هر میکروحالت نیز برابر است با:

$$E = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}}. \quad (22)$$

بقیه این درس را می توان با همین روابط و همین توصیف فهمید.

■ **نکته مهم:** عبارت (20) تعداد یا چگالی هماهنگ ها (یا همان مودها) با فرکانس ω را به دست می دهد. این عدد با تعداد فوتون های

با این فرکانس یکی نیست. تعداد فوتون های با این فرکانس را بعداً بدست می آوریم.

حال مثل هر سیستمی دیگری می توانیم تابع پارش این گاز را حساب کنیم. می نویسیم:

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} e^{-\beta E_{n_1, n_2, \dots}} \quad (23)$$

و یا

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} e^{-\beta \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}} \quad (24)$$

این جمع را براحتی می توان انجام داد: حاصل اش عبارت است از:

$$Z = \prod_{\omega_{\mathbf{k}}} \sum_{n_1} e^{-\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}} n_1} = \prod_{\omega_{\mathbf{k}}} \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}}}. \quad (25)$$

تابع انرژی آزاد برابر است با:

$$F = -k_B T \ln Z = k_B T \sum_{\mathbf{k}} \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}}}). \quad (26)$$

با استفاده از چگالی موج های هماهنگ یعنی عبارت (۲۰) می توانیم بنویسیم:

$$F = k_B T \int_0^\infty \frac{V \omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}). \quad (27)$$

با یک تغییر متغیر مناسب این رابطه به صورت زیر در می آید:

$$F = \frac{V}{\pi^2 (\hbar c)^3} (k_B T)^4 \int_0^\infty x^2 dx \ln(1 - e^{-x}). \quad (28)$$

اما انتگرال بالا را می توان به روش جزء به جزء محاسبه کرد:

$$\int_0^\infty x^2 dx \ln(1 - e^{-x}) = \frac{1}{3} x^3 \ln(1 - e^{-x}) \Big|_0^\infty - \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = 0 - \frac{1}{3} \zeta(3) = -\frac{\pi^4}{45}. \quad (29)$$

بنابراین انرژی آزاد گاز فوتونی برابر خواهد شد با:

$$F = -\left(\frac{\pi^2 k_B^4}{45 \hbar^3 c^3}\right) V T^4 \quad (30)$$

با استفاده از رابطه ترمودینامیکی

$$dF = -SdT - PdV \quad (31)$$

بدست می آوریم:

$$P = \left(\frac{\pi^2 k_B^4}{45 \hbar^3 c^3}\right) T^4, \quad S = 4 \left(\frac{\pi^2 k_B^4}{45 \hbar^3 c^3}\right) V T^3. \quad (32)$$

هم چنین از رابطه $F = U - TS$ مقدار انرژی کل بدست می آید:

$$U = F + TS = S = 3 \left(\frac{\pi^2 k_B^4}{45 \hbar^3 c^3}\right) V T^3. \quad (33)$$

به این ترتیب بدست می آوریم:

$$U = \frac{3}{4} TS, \quad PV = \frac{1}{3} U, \quad F = -\frac{1}{3} U. \quad (34)$$

حال به یک سوال مهم می رسیم؟ می دانیم که تعداد فوتون ها ثابت نیست چرا که یک فوتون با فرکانس ω می تواند تبدیل به دو فوتون با فرکانس های ω_1 و ω_2 شود بدون اینکه قانون بقای انرژی یا تکانه به هم بخورد. از آنجا که بدون تغییر انرژی تعداد فوتون ها کم یا زیاد می شود، نتیجه می گیریم که پتانسیل شیمیایی گاز فوتونی صفر است:

$$\mu = 0. \quad (35)$$

اما می توانیم بپرسیم به طور متوسط چه تعداد فوتون در کاواک وجود دارد؟ برای این کار کافی است به مفهوم تعداد فوتون ها دوباره نگاه کنیم.

می دانیم که هر میکروحالت میدان نور با اعداد صحیح $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ مشخص می شود. می دانیم که

$$P(n_1, n_2, n_3, \dots) = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\sum_i \hbar\omega_i n_i)} \quad (36)$$

و یا

$$P(n_1, n_2, n_3, \dots) = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\hbar\omega_1 n_1)} e^{-\beta(\hbar\omega_2 n_2)} e^{-\beta(\hbar\omega_3 n_3)} \dots \quad (37)$$

بنابراین احتمال این که از یک نوع فوتون با فرکانس ω_k تعداد n تا داشته باشیم برابر است با:

$$P(n) = e^{-\beta\hbar\omega_k n} (1 - e^{-\beta\hbar\omega_k}). \quad (38)$$

بنابراین با توجه به تعبیری که از n به معنای تعداد فوتون داریم، معلوم می شود که تعداد متوسط فوتون های با بردار موج \mathbf{k} یا تکانه $\hbar\mathbf{k}$ برابر است

$$\langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}} n} (1 - e^{-\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}}) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}} - 1}. \quad (39)$$

دقت کنید که این تعداد فقط بستگی به فرکانس متناظر با آن تکانه یعنی $\omega_{\mathbf{k}}$ ربط دارد. اما اگر کسی بپرسد تعداد فوتون های با فرکانس ω چقدر است، این تعداد خیلی بیشتر است، چرا که نورهای با اندازه تکانه یکسان ولی با جهت های مختلف می توانند یک فرکانس داشته باشند. در واقع این مقدار برابر است با:

$$\langle n(\omega) d\omega \rangle = \frac{V\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}. \quad (40)$$

متوسط تعداد کل فوتون ها (یعنی فوتون های با همه فرکانس های ممکن) برابر می شود با:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{\mathbf{k}} \langle n_{\mathbf{k}} \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{\mathbf{k}}} - 1} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{V\omega^2}{\pi^2} \frac{d\omega}{c^3} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \\ &= \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \zeta(2) \\ &= \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \times 2 \times 1.202. \end{aligned} \quad (41)$$

بنابراین

$$N = \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \times 2.404. \quad (42)$$

به این ترتیب تعداد متوسط فوتون ها نیز با افزایش دما به صورت مکعبی رشد می کند. با ترکیب دو رابطه (۳۲) و (۴۱) می توانیم به معادله ای شبیه به معادله حالت گاز ایده آل برسیم.

$$PV = \left(\frac{\pi^4}{45 \times 2.404} \right) N k_B T, \quad (43)$$

و یا

$$PV = 0.9 N k_B T. \quad (44)$$

۳ نظریه جنبشی برای گاز فوتونی

برای یک گاز اتمی می توانستیم چیزی را توسعه دهیم و فرمول بندی کنیم که به آن نظریه جنبشی می گویند. اصول بسیار مقدماتی این موضوع را در فصل گذشته یاد گرفتیم که سرآغازش توزیع ماکسول-بولتزمن بود. می توانستیم بررسی کنیم که احتمال اینکه یک ذره سرعتش در نزدیکی یک مقدار معین باشد چقدر است؟ می توانستیم زمان پویش آزاد و طول پویش آزاد اتم ها را حساب کنیم، می توانستیم بررسی کنیم که اگر یک روزنه در دیواره یک ظرف ایجاد کنیم گاز با چه سرعتی از آن به بیرون نشت می کند. هم چنین می توانستیم فشاری را که برخورد ذرات بر دیواره ها ایجاد می کند حساب کنیم و از این روش معادله حالت را نیز حساب کنیم. سوال طبیعی که با آن مواجهیم این است که برای گاز فوتونی پاسخ این سوالها چیست؟

نخست به سوال های ساده تر می پردازیم. در صورتی که کاواک تنها شامل نور باشد و هیچ ماده ای در آن وجود نداشته باشد، فوتون ها برخوردی با هم نمی کنند و بنابراین طول پویش آزاد آنها را هیچ چیزی جز ابعاد ظرف محدود نمی کند. (در فضای بین ستاره ای طول پویش آزاد فوتون ها میلیون ها سال نوری است.) حال می رسیم به توزیعی که قرار است جایگزین تابع توزیع ماکسول بولتزمن بشود. نخست دقت می کنیم که فوتون ها با سرعت های متفاوت حرکت نمی کنند بلکه سرعت همه آنها سرعت نور است. تنها چیزی که از یک فوتون به فوتون دیگر فرق می

کند بردار موج آن (هم اندازه و هم جهت آن) است.

نخست توجه خود را به فوتون هایی معطوف می کنیم که همگی یک فرکانس معین دارند ولی در جهات مختلف حرکت می کنند. به عبارت دیگر وانمود می کنیم که همه فوتون ها یک فرکانس دارند. بعداً این فرض ساده کننده را اصلاح می کنیم. در غیاب یک جهت که بر جهت های دیگر ترجیح داشته باشد، جهت سرعت ها روی یک کره به صورت یکنواخت توزیع شده است. بنابراین اگر جهت حرکت یک فوتون را با بردار $\hat{\mathbf{k}}$ نشان دهیم، داریم

$$P(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{1}{4\pi}. \quad (45)$$

اگر تعداد فوتون ها در واحد حجم را با n نشان دهیم، آنگاه چگالی تعداد فوتون هایی که در جهت βk حرکت می کنند برابر است با:

$$n(\hat{\mathbf{k}}) = nP(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{n}{4\pi}. \quad (46)$$

در نتیجه چگالی جریان این فوتون ها برابر خواهد بود با:

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}) = \frac{n}{4\pi} \mathbf{v}$$

که در آن $\mathbf{v} = c\hat{\mathbf{k}}$ سرعت فوتون هاست. بنابراین

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}) = \frac{nc}{4\pi} \hat{\mathbf{k}} \quad (47)$$

هرگاه یک صفحه کوچک به مساحت A که بردار عمود بر آن مطابق شکل (۳) در جهت $\hat{\mathbf{z}}$ است در نظر بگیریم، می توانیم تکانه ای که فوتون ها در برخورد با این سطح به آن وارد می کنند به صورت زیر حساب کنیم. تعداد فوتون هایی که در واحد زمان و با سرعت $c\hat{\mathbf{k}}$ به این سطح برخورد می کنند برابر است با:

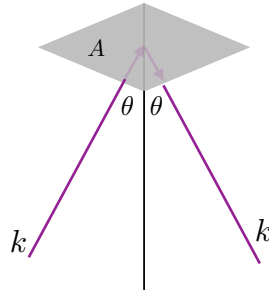
$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{A} = \frac{nc}{4\pi} A\hat{k}_z \quad (48)$$

که در آن \hat{k}_z مولفه z ام بردار $\hat{\mathbf{k}}$ است. تکانه ای که هر فوتون در برخورد با این سطح به آن وارد می کند برابر است با:

$$2\hbar k_z = 2\hbar k\hat{k}_z.$$

بنابراین تکانه ای که این فوتون ها در جهت z در واحد زمان به این المان سطح وارد می کنند برابر است با:

$$\frac{dP}{dt} = \mathbf{J}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{A} \times (2\hbar k\hat{k}_z) = \frac{nc}{4\pi} A\hat{k}_z \times (2\hbar k\hat{k}_z). \quad (49)$$



شکل ۷: فوتونی که با زاویه θ به سطح برخورد می کند با همان زاویه منعکس می شود و یک تکانه به سطح وارد می کند.

در نتیجه نیروی وارد بر این سطح برابر است با:

$$F = \frac{nc}{4\pi} \times A 2\hbar k \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{n\hbar k}{3} A \quad (50)$$

و پس از تقسیم این نیرو بر سطح، فشار بدست می آید:

$$P = \frac{n\hbar k}{3} = \frac{n\epsilon}{3} = \frac{U}{3V} \quad (51)$$

که به همان معادله حالتی منجر می شود که قبلا به صورت سرانگشتی حساب کردیم. البته خواننده دقیق ممکن است در اینجا اعتراض کند و بگوید که فوتون ها همه یک اندازه تکانه و یک اندازه انرژی ندارد و البته حق با اوست. اما محاسبه بالا را می توان براحتی اصلاح کرد و این نکته را در نظر گرفت. راه اصلاح این محاسبه هم خیلی ساده است. از همان ابتدا به جای تابع $P(\hat{\mathbf{k}})$ تابع زیر را تعریف می کنیم:

$$P(\hat{\mathbf{k}}, \omega) = \frac{1}{4\pi} n(\omega). \quad (52)$$

این تابع نشان دهنده احتمال این است که فوتونی دارای فرکانس ω باشد و در جهت بردار \mathbf{k} حرکت کند. $n(\omega)$ نشان دهنده چگالی فوتون های با فرکانس ω است. به همین ترتیب جریان فوتون ها نیز به صورت زیر اصلاح می شود:

$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{k}}, \omega) = n(\omega) \frac{1}{4\pi} c \hat{\mathbf{k}} \quad (53)$$

که نشان دهنده جریان فوتون هایی است که فرکانس ω دارند و در جهت بردار \mathbf{k} حرکت می کنند. در پایان می بایست روی ω انتگرال بگیریم.

ولی انتگرال روی ω همان n یعنی چگالی کل را بدست خواهد داد و نتیجه نهایی تغییری نمی کند.

حال که تا اینجا طی کرده ایم می توانیم نرخ فرار فوتون ها را از یک روزنه که در دیواره کاواک ایجاد کرده ایم حساب کنیم، چرا که محاسبه این نرخ قسمتی از همان محاسبه فشار است. کافی است که از تکانه وارد شده به سطح صرف نظر کنیم. بازهم یک سطح کوچک به مساحت A با بردار عمود بر سطح z در نظر می گیریم. تعداد فوتون هایی با فرکانس ω که در واحد زمان از سطح A می گذرند عبارت است از:

$$\begin{aligned}\Phi_A(\omega) &= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{\pi} d\Omega \mathbf{J}(\hat{\mathbf{k}}, \omega) \cdot \mathbf{A} \\ &= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{\pi} d\Omega \frac{n(\omega)c}{4\pi} \hat{k}_z \\ &= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{\pi} \sin\theta d\theta d\phi \times \frac{n(\omega)c}{4\pi} A \cos\theta = \frac{n(\omega)cA}{4}\end{aligned}\quad (54)$$

و در نتیجه تعداد فوتون ها بر واحد سطح برابر است با:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{4}n(\omega)c. \quad (55)$$

هر کدام از این فوتون ها که از سطح خارج می شود انرژی $\hbar\omega$ دارد. بنابراین میزان انرژی تابش شده در واحد زمان از واحد سطح برابر می شود با

$$\mathcal{R}(\omega) = \Phi(\omega) \times \hbar\omega = \frac{1}{4}n(\omega)c\hbar\omega = \frac{c}{4}u(\omega) \quad (56)$$

که در آن $u(\omega)$ چگالی انرژی درون کاواک در یک بازه فرکانسی است. با انتگرال گیری روی هر دو طرف بدست می آوریم:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{4}uc. \quad (57)$$

که در آن \mathcal{R} کل انرژی تابش شده از واحد سطح در واحد زمان و u کل چگالی انرژی درون کاواک است.

۴. قدردانی

از آقای سپهر سلمانی یگانه، دانشجوی دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف که در نیمسال اول ۱۴۰۲ با دقت این درسنامه را خواندند و اشکالات متعدد آن را یادآوری کردند سپاسگزاری می کنم.

۵ مسئله‌ها

■ تمرین: ثابت کنید که در هر دمایی طول موجی که بیشترین انرژی تابشی در آن قرار دارد از رابطه زیر پیروی می‌کند:

$$\lambda_{max}T = const.$$

مقدار عددی این ثابت را محاسبه کنید. در دمای ۳۰۰ درجه کلوین نیز طول موج λ_{max} را حساب کنید. هم چنین این طول موج را در دمای $2.7 K$ یعنی دمای تابش زمینه کیهانی حساب کنید. این قانون نخستین بار به صورت تجربی مشاهده شده و به نام کاشف آن قانون واین^۳ نامیده می‌شود.

■ برای گاز فوتونی تابع پارش را محاسبه کردیم. از روی این تابع پارش کمیت‌های زیر را حساب کنید:

$$F = \text{Helmholtz Free energy}, \quad P = \text{Pressure}, \quad S = \text{Entropy}, \quad U = \text{Energy}. \quad (58)$$

■ دمای تابش زمینه کیهانی برابر با ۲.۷۳ درجه کلوین است.

الف: چگالی انرژی تابش زمینه کیهانی را در این دما حساب کنید.

اگر کف دست خود را باز کنید،

ب: تعداد فوتون‌هایی که در هر ثانیه بر کف دست شما می‌بارد را حساب کنید.

پ: انرژی تابشی که در هر ثانیه به کف دست شما می‌تابد را حساب کنید.

ت: فشار تابشی که بر کف دست شما وارد می‌شود را محاسبه کنید.

^۳Law Wien

■ تعداد فوتون هایی را که از تابش زمینه کیهانی در هر ثانیه به کف دست شما می رسد با تعداد فوتون هایی که از خورشید می رسد مقایسه کنید.

■ برای انرژی تابشی در دمای T نشان دهید که :

$$s = \text{Entropy Density} = \frac{4p}{T}, \quad G = \text{Gibbs Energy} = 0, \quad C_v = 3s. \quad (59)$$

■ تمرین: نشان دهید که تعداد متوسط فوتون ها در یک کاواک در دمای T برابر است با:

$$N = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 V. \quad (60)$$

سپس نشان دهید که متوسط انرژی هر فوتون برابر است با:

$$\bar{u}_{photons} = 2.701 k_B T. \quad (61)$$

برای اتم های یک گاز ایده آل انرژی متوسط برابر است با:

$$\bar{u}_{atoms} = \frac{3}{2} k_B T. \quad (62)$$

دلیل این تفاوت و اینکه فوتون ها از اصل هم پاری انرژی پیروی نمی کنند چیست؟

■ تمرین: یک نوسانگر هارمونیک کوانتومی در نظر بگیرید. سطوح انرژی این نوسانگر برابرند با $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. این نوسانگر در یک محیط با دمای T قرار گرفته و به حالت تعادل رسیده است. متوسط های کمیت های زیر را حساب کنید:

$$\langle E \rangle, \quad \langle E^2 \rangle, \quad E^2 - \langle E \rangle^2. \quad (63)$$

■ تمرین: دو نوسانگر هارمونیک کوانتومی با فرکانس های $\omega_1 = \omega$ و $\omega_2 = 2\omega$ این دو نوسانگر با هم برهم کنشی ندارند و در دمای T با محیط اطراف به تعادل رسیده اند. احتمال این که انرژی نوسانگر اول دو برابر انرژی نوسانگر دوم باشد چقدر است؟

■ تمرین: یک کاواک مکعب شکل در نظر بگیرید که ابعاد آن 3.16 cm باشد. در این کاواک امواج الکترومغناطیسی وجود دارد. حساب کنید که چه تعداد هماهنگ در بازه زیر وجود دارد:

$$10^{10} \text{ Hz} \leq \omega \leq 10^{12} \text{ Hz}. \quad (64)$$

۶ ضمیمه: چند رابطه ریاضی مفید

در این ضمیمه چند رابطه ریاضی مفید را بیان می‌کنیم که هم در این درس و هم در درسهای آینده به آنها نیاز خواهیم داشت. تابع زیر را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم این تابع را حساب کنیم.

$$g(\alpha) := \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha dx}{e^x - 1} = \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha e^{-x} dx}{1 - e^{-x}} \quad (65)$$

با بسط دو جمله ای خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x^\alpha e^{-mx} dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^\alpha e^{-mx} dx = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha+1}} u^\alpha e^{-u} du \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1) = \Gamma(\alpha+1) \zeta(\alpha+1) \end{aligned} \quad (66)$$

که در آن $\Gamma(\alpha+1)$ نشان دهنده تابع گاما است و برای وقتی که α عدد صحیح باشد، مقدارش برابر است با:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha!, \quad (67)$$

و

$$\zeta(\alpha) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots$$

تابع زتای ریمان است. چند مقدار اولیه تابع زیمان عبارتند از:

$$\begin{aligned} \zeta(1) &= \infty \\ \zeta(2) &= \frac{\pi^2}{6} \\ \zeta(3) &= 1.202 \\ \zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90}. \end{aligned} \quad (68)$$

هم چنین تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(\alpha) = \int_0^{\infty} x^\alpha \ln(1 - e^{-x}) dx. \quad (69)$$

انتگرال فوق را می توان با استفاده از روش جزء به جزء حساب کرد:

$$f(\alpha) = \frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha} \Big|_0^\infty - \frac{1}{1+\alpha} \int_0^\infty \frac{x^{1+\alpha} e^{-x}}{1-e^{-x}} dx = 0 - \frac{1}{1+\alpha} \alpha! \zeta(\alpha+1). \quad (70)$$

بنابراین

$$f(\alpha) = -\frac{\alpha! \zeta(\alpha+1)}{1+\alpha}. \quad (71)$$