ترمودینامیک و مکانیک آماری ستاره ها

وحید کریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۲۸ خرداد ۱۴۰۰

۱ مقدمه

فرض اساسی ما در هر نوع مطالعه اخترفیزیکی و کیهان شناسی این است که قوانین بنیادی فیزیک نه تنها در روی زمین بلکه در همه کائنات به همین شکل برقرارند و ثابت های بنیادی فیزیک مثل سرعت نور، ثابت پلانک یا ثابت گرانش و جرم و بار الکترون و دیگر ذرات نیز در همه جای عالم همین مقادیر را دارند. این فرض از آن جهت موجه است که بر طبق مشاهدات بی شمار معلوم شده است که کره زمین هیچ موقعیت ویژه ای در عالم ندارد و درست مثل ذره ای شن در انبوه شن های ساحل یک دریاست. بنابراین دلیلی وجود ندارد که قوانین و ثابت های فیزیکی در کره زمین شکل خاصی داشته باشند و با قوانینِ دیگر نقاط عالم فرق داشته باشند. با اتکا به همین فرض اساسی است که از قوانین فیزیک استفاده می کنیم تا رفتار ستارگان را در دورترین نقاط کیهان توصیف و تبیین کنیم . این توصیف با تجربه و رصد نیز مطابقت پیدا می کند و این مطابقت دلیل دیگری بر درستی فرض بنیادین ما خواهد بود.

در این درس آنچه را که در درسهای پیشین آموخته ایم برای توصیف فیزیکی یکی از جالب ترین ساختارهای عالم یعنی ستاره ها به کار می بریم. ستاره ها توده های گاز بسیار متراکمی هستند که تحت دو نیروی متضاد گرانش از یک سو و فشار حرارتی و تابشی از سوی دیگر به تعادل رسیده اند. مقابله این دو نیرو در تمام عمر ستاره از ابتدای تولد آنها تا بلوغ و نهایتا مرگ آنها نقشی اساسی دارد. در ابتدا یک ستاره با متراکم شدن یک توده بزرگ گاز در اثر گرانش متولد می شوند. این تراکم به افزایش دمای مرکزی توده گاز یا ستاره می انجامد و دما انقدر بالا رفته و تراکم آنقدر زیاد می شود که واکنش های زنجیره ای هسته ای در مرکز ستاره آغاز می شود. این واکنش ها منبع انرژی تقریبا بی پایان ستاره می شوند و از

رمبش و تراکم بیشتر ستاره جلوگیری می کنند تا اینکه زنجیره واکنش های هسته ای پس از میلیون ها یا میلیاردها سال به پایان می رسد که در این مرحله ستاره با رمبش به درون خود مراحل نهایی عمر خود را طی می کند و بسته به میزان جرمی که دارد به کوتوله سفید، [1] ستاره نوترونی [2] ، یا سیاهچاله [3] تبدیل می شوند. در طول این فرایند ستاره تقریبا تمامی ماده خود را به فضای بین ستاره ای [4] پرتاب می کند و این ماده است که دوباره برای تولید ستارگان نسل های بعدی متراکم می شود تا چرخه تولید و مرگ ستارگان ادامه یابد. در این درس می خواهیم با مقدمات فیزیک ستاره ها آشنا شویم و ببینیم ترمودینامیک و مکانیک آماری در مورد ساختار ستارگان و تولد و مرگ آنها چه چیزی به ما می آموزند. قبل از آنکه به ادامه درس بپردازیم برای استفاده آینده آنچه را که در باره مهم ترین ستاره ای که می شناسیم در اینجا گرد می آوریم:

جدول ۱: بعضی از پارامترهای خورشید

جرم	**شعاع**	**دمای سطح**	**درخشندگی**
$M_\odot$	$R_\odot$	T_{eff}	$L_\odot$
$1.99 \times 10^{30}\ kg$	$6.96 \times 10^{8}\ m$	$5780\ K$	$3.83 \times 10^{26}\ W$

جدول ۲: بعضی از پارامترهای خورشید

سن	**دمای مرکزی**	**چگالی مرکزی**	**فشار مرکزی**
$t_\odot$	T_c	ρ_c	P_c
$4.55 \times 10^{9}\ yr$	$15.6 \times 10^{6}\ K$	$1.45 \times 10^{5}\ kg\ m^{-3}$	$2.29 \times 10^{16}\ Pa$

[1] White Dwarf
[2] Neutron Star
[3] Black Hole
[4] Interstellar Space

۲ معیار جینز

ستارگان از تراکم توده های گاز متولد می شوند یا به عبارت دیگر از تراکم ناهمگنی هایی که در چگالی گاز میان ستاره ای وجود دارد متولد می شوند، اما هر توده ای از گاز به ستاره تبدیل نمی شود وگرنه اکنون شاهد انبوهی از ستارگان با قد و قواره های بیرون از شمار می بودیم. اگر یک توده گاز کروی شکل در نظر بگیریم، این توده از یک سو میل به تراکم در اثر گرانش دارد و از سوی دیگر فشار درونی ای دارد که سعی در پراکندن و پخش کردن گاز دارد. برای تبدیل این توده به ستاره عامل گرانش می بایست بر فشار غلبه کند در غیر این صورت گاز پراکنده و منبسط خواهد شد. بنابراین جرم توده می بایست از یک جرم بحرانی بیشتر باشد. این همان چیزی است که به نام معیار جینز [۵] معروف است.

شکل ۱: سر جیمز جینز (۱۸۷۷ـ۱۹۴۶) ، فیزیکدان، ریاضیدان و منجم انگلیسی که کارهای بسیاری در زمینه فیزیک ستارگان انجام داده است.

برای بدست آوردن معیار جینز کافی است یک توده گاز کروی شکل را در نظر بگیریم. انرژی این توده گاز که جرم، شعاع و دمای آن به ترتیب برابرند با M ،R و T به صورت زیر است:

$$U = \frac{3}{2} N k_B T - f \frac{GM^2}{R}. \tag{۱}$$

در این جا f یک ضریب عددی از مرتبه یک است که بستگی به توزیع چگالی در درون توده گاز دارد. هرگاه این انرژی از صفر کمتر باشد، گرانش نهایتا غلبه می کند و گاز رمبش می کند، در غیراین صورت گاز در اثر انرژی جنبشی ذرات اش پراکنده و رقیق می شود. می توان برای سادگی f

[۵] Jeans Criterion

را مساوی با یک گرفت. اگر گاز از اتمهایی با جرم m تشکیل شده باشد می توانیم بنویسیم:

$$M = Nm. \tag{۲}$$

در نتیجه شرط جینز به صورت زیر در می آید:

$$\frac{3}{2}Nk_BT - \frac{GMNm}{R} \leq 0 \tag{۳}$$

و یا

$$\frac{3}{2}k_BT - \frac{GMm}{R} \leq 0 \tag{۴}$$

و یا

$$M \geq M_J, \tag{۵}$$

که در آن

$$M_J := \frac{3}{2}\frac{k_BT}{Gm}R \tag{۶}$$

جرم جینز [۶] خوانده می شود. این رابطه می گوید که جرم یک توده گاز با شعاع و دمای مشخص می بایست از یک مقدار بحرانی بیشتر باشد تا گاز شروع به تراکم کند و نهایتا به یک ستاره تبدیل شود. طبیعی است که جرم جینز متناسب با دمای توده گاز است و هرچه که دمای توده گاز بیشتر باشد، برای متراکم کردن آن می بایست جرم کل توده گاز بیشتر باشد تا غلبه گرانش بر انرژی جنبشی ذرات امکان پذیر شود. بستگی جرم جینز به پارامترهای دیگر هم به صورت شهودی قابل فهم اند. هرچه شعاع بیشتر باشد، جرم جینز بیشتر خواهد شد. هر چه گاز از ذرات سبک تری تشکیل شده باشد که طبیعتا فرّار ترند، جرم جینز بیشتر خواهد شد. و سرانجام هر چه که ثابت گرانش بیشتر باشد، جرم جینز کمتر خواهد بود. دقت کنید که جرم جینز یک جرم مطلق نیست بلکه بستگی به شعاع توده گاز دارد. در واقع این رابطه می گوید که جرم یک توده گاز به شعاع R می بایست از جرم جینز نشان داده شده در رابطه (۶) بیشتر باشد تا توده گاز بتواند به ستاره تبدیل شود. به همین جهت رابطه (۵) را می توان به شکل های گوناگون نوشت که همگی البته معادل اند اما هرکدام از آنها تفسیر متفاوتی دارند. به عنوان مثال می توان با تعریف چگالی $\rho := \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ نوشت:

$$\rho \equiv \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \geq \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R^3} \tag{۷}$$

[۶] Jeans Mass

و یا

$$\rho \geq \frac{9}{8\pi}\frac{k_B T}{GmR^2} =: R_J. \tag{۸}$$

و یا

$$R \geq (\frac{9}{8\pi}\frac{k_B T}{Gm\rho})^{\frac{1}{2}}. \tag{۹}$$

این رابطه بیان می کند که اندازه توده گازی که چگالی یکنواخت ρ دارد حتما می بایست از یک اندازه بحرانی ای بزرگ تر باشد تا بتواند در اثر تراکم به یک ستاره تبدیل شود. شعاع بحرانی برای یک توده کروی شکل گاز که شعاع جینز [۷] نامیده می شود، برابر است با:

$$R_J := (\frac{9}{8\pi}\frac{k_B T}{Gm\rho})^{\frac{1}{2}}. \tag{۱۰}$$

هم چنین می توان شعاع را بر حسب چگالی و جرم نوشت و به رابطه زیر رسید:

$$\rho \geq \rho_J, \tag{۱۱}$$

که در آن

$$\rho_J = \frac{3}{4\pi M^2}(\frac{3k_B T}{2Gm})^3 \tag{۱۲}$$

چگالی جینز [۸] خوانده می شود. این رابطه بیان می کند که توده گازی به جرم M حتما می بایست از یک مقدار بحرانی متراکم تر باشد که بتواند تشکیل یک ستاره بدهد. بنابراین قابل تصور هست که توده های گازی وجود داشته باشند که جرم آنها بسیار بسیار بزرگ است اما هرگز قابلیت تبدیل شدن به ستاره را پیدا نکنند.

۳ معادلات ساختار ستاره ها

شرط جینز می گوید که یک توده گاز چه موقع می تواند به یک ستاره تبدیل شود. حال فرض کنید که ستاره تشکیل شده است. سوال این است که درون آن چه خبر است. تا قبل از سال ۱۹۰۵ عقیده عمومی بر این بود که انرژی ستاره ها (یعنی آن انرژی که تابش می شود و به واسطه آن سیاره

[۷] Jeans Radius
[۸] Jeans Density

ای مثل زمین از خورشید نور و گرما می گیرد و در آن حیات شکل می گیرد)، ناشی از تبدیل انرژی پتانسیل گرانشی ستاره به انرژی جنبشی است. توده گازی که بتدریج متراکم می شود انرژی پتانسیل اش را به گرما تبدیل می کند و همین گرماست که از ستاره ساطع می شود. یک محاسبه ساده برای ستاره ای به جرم خورشید نشان می دهد که در این صورت خورشید بیش از ۲۰ میلیون سال دوام نخواهد آورد و سرد خواهد شد. این نتیجه به وضوح با مشاهدات زیست شناسی و زمین شناسی ای که برای زمین وجود دارد در تناقض است زیرا این مشاهدات نشان می دهند که برای تشکیل حیات در کره زمین به میلیاردها سال زمان نیاز بوده است. سال ۱۹۰۵ و کشف رابطه جرم و انرژی نشان داد که منبع انرژی ستاره ها چیزی بسیار عظیم تر از انرژی پتانسیل گرانشی است و تبدیل جرم به انرژی ستاره ها حتی اگر با نرخ میلیون ها تن در ثانیه رخ دهد (چنانچه در مورد خورشید چنین است) زودتر از ده میلیارد سال به زندگی یک ستاره پایان نخواهد داد. با این وجود بیش از سی سال طول کشید تا سازوکار دقیق واکنش های زنجیره ای هسته ای در درون یک ستاره فهمیده شود. اکنون می دانیم که زنجیره واکنش های هسته ای با همجوشی هیدروژن و تولید هلیوم شروع شده که در آن جرم کاهش یافته به انرژی تبدیل می شود و طی سلسله ای از واکنش های پیچیده به تولید عناصر سنگین تر نیز می انجامد تا دست آخر به تولید آهن منجر شده و در آنجا متوقف شود. ساده ترین واکنش ها چنین اند:

$$\begin{aligned} {}^1H +{}^1 H &\longrightarrow {}^2D + e^+ + \nu \\ {}^2D +{}^1 H &\longrightarrow {}^3He + \gamma \\ {}^3He +{}^3 He &\longrightarrow {}^4He +{}^1 H +{}^1 H, \end{aligned} \tag{۱۳}$$

که در آن 2^D هسته دوتریم، $\neq$ نوترینو و e^+ پوزیترون است. γ نیز نشان دهنده فوتون است. این واکنش سه مرحله ای که در آن عملا چهار هسته هیدروژن به هم جوش خورده و یک هسته هلیوم ^4He تولید می کنند ، به اندازه 26.5 میلیون الکترون ولت یا $26.5\ Mev$ انرژی تولید می کند.

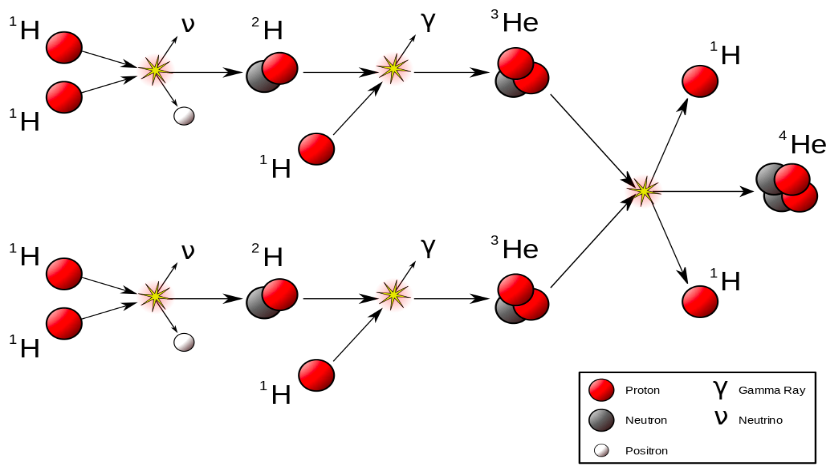
■ تمرین: ثابت خورشیدی [۹] یعنی مقدار انرژی خورشیدی که در هر ثانیه به هر متر مربع از سطح زمین می رسد برابر است با: $1.366\ \ Kw$.

الف: حساب کنید که در هر ثانیه چه مقدار هیدروژن می بایست در خورشید نابود شود تا چنین انرژی ای تولید شود.

ب: تخمین بزنید که اگر با همین نرخ هیدروژن های درون خورشید تبدیل به هلیوم شوند، چقدر طول خواهد کشید تا سوخت هیدروژنی خورشید تمام شود. فرض کنید که همه خورشید از گاز هیدروژن درست شده است.

پس از حل معمای انرژی ستاره ها می توان به معادلات ساختاری ستاره ها پرداخت. نخستین فرض این است که ستاره ساختاری کروی دارد و

[۹] Solar Constant



شکل ۲: رشته برهم کنش های هم جوشی هسته ای که نهایتا منجر به گداخت ۴ هسته هیدروژن به یک هسته هلیوم چهار می شود. در هرکدام از این واکنش ها 26.5 میلیون الکترون ولت انرژی آزاد می شود.

همه کمیت های موضعی در درون ستاره فقط به فاصله از مرکز یعنی r بستگی دارند. این فرض برای بسیاری از ستاره ها درست است مگر برای ستاره هایی که با سرعت خیلی زیاد می چرخند (مثل بعضی از ستاره های نوترونی). معادلات ساختاری یک ستاره می بایست به ما بگوید که ستاره چگونه تحت دو نیروی متضاد گرانش و فشار گرمایی رو به بیرون در حال تعادل است. هم چنین باید مشخص کند که چگونه انرژی ستاره از درون و مرکز ستاره به بیرون منتقل می شود. نهایتا می بایست با حل مجموعه این معادلات پی ببریم که دما و فشار و چگالی در هر نقطه از ستاره چه مقداری دارد. هم چنین این معادلات می بایست میزان کل انرژی تابشی ستاره و درخشندگی [۱۰] آن را که یک مشاهده پذیر مهم در ستارگان است تعیین کند.

در نگاه نخست می خواهیم به تعادل مکانیکی ستاره نگاه کنیم. مسلما چگالی ستاره یک نواخت نیست و لایه های درونی آن متراکم از لایه های بیرونی آن هستند. یک پوسته نازک در شعاع r به ضخامت dr و مساحت A در نظر می گیریم. نیرویی که به این پوسته به طرف بیرون وارد می شود برابر است با:

[۱۰] Luminosity

$$P(r)A - P(r+dr)A = -\frac{dP}{dr}Adr. \qquad (۱۴)$$

این نیرو می بایست با نیروی گرانش به طرف مرکز خنثی شود. نیروی گرانش روی این پوسته برابر است با:

$$df = g(r)\rho dr A \qquad (۱۵)$$

که در آن $g(r)$ شتاب گرانش در نقطه r است. اما از قانون گاووس برای گرانش می دانیم که:

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}, \qquad (۱۶)$$

که در آن $m(r)$ جرم کل درون کره ای به شعاع r است یعنی:

$$m(r) = \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2 dr' \qquad (۱۷)$$

به این ترتیب بدست می آوریم:

$$\boxed{\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}.} \qquad (۱۸)$$

این معادله یکی از معادلات اصلی ساختار ستاره است. یک معادله بدیهی دیگر نیز جرم $m(r)$ را به چگالی ربط می دهد و به این صورت است:

$$\boxed{\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2} \qquad (۱۹)$$

معادلات (۱۸) و (۱۹) به تنهایی قابل حل نیستند چرا که رابطه فشار و چگالی روشن نیست. به طور کلی فشار در درون یک ستاره از دو قسمت فشار گاز و فشار تابش تشکیل شده است. داریم:

$$P = P_{gas} + P_r \qquad (۲۰)$$

که در آن P_{gas} فشار گاز است که با تقریب خوبی از معادله حالت گاز ایده آل بدست می آید. گر جرم اتم های گاز برابر با m باشد معادله حالت گاز به شکل زیر نوشته می شود:

$$P_{gas}(r) = \frac{N}{V}k_BT = \frac{1}{m}\frac{Nm}{V}k_BT = \frac{\rho}{m}k_BT \qquad (۲۱)$$

که در آن ρ چگالی جرمی گاز است. به صورت موضعی می توان این معادله را به شکل زیر نوشت:

$$P_{gas}(r) = \frac{\rho(r)}{m} k_B T(r) \tag{۲۲}$$

که در آن m جرم متوسط اتم ها یا هسته هایی است که گاز را تشکیل می دهند. معمولا این اتم ها عبارتند از اتم های یونیزه شده و یونیزه نشده هیدروژن و هلیوم و دیگر هسته های سنگین تر که درصد ترکیب آنها می بایست از مطالعه واکنش های هسته ای تعیین شده باشد. علاوه بر این فشار گاز، فشار تابش نیز وجود دارد که از رابطه زیر تعیین می شود:

$$P_r = \frac{1}{3} a T^4 = \frac{4}{3c} \sigma T^4 \tag{۲۳}$$

که در آن σ ثابت اشتفان-بولتزمن است:

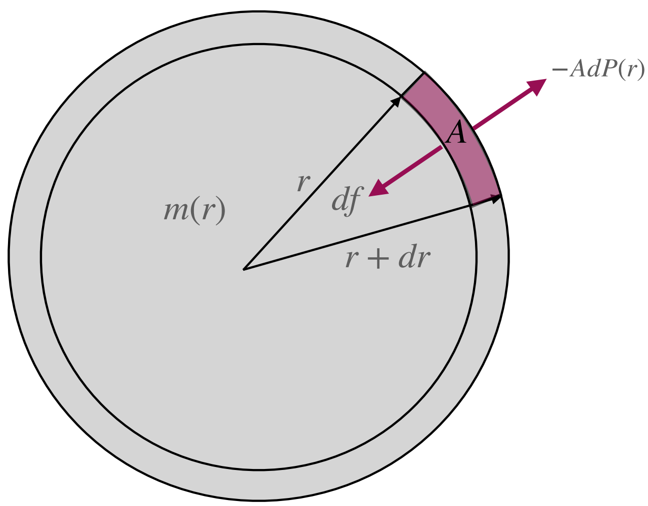
$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} = 7.565 \times 10^{-16}\ J\ m^3\ K^{-4}. \tag{۲۴}$$

■ تمرین: برای ستاره ای که تماما از هسته هیدروژن ساخته شده است، نسبت فشار تابش به فشار گاز را در دمای ده میلیون کلوین حساب کنید.

اگر تمرین بالا را حل کرده باشید متوجه می شوید که در بسیاری از شرایط فشار تابش نسبت به فشار گاز ناچیز و قابل صرف نظر کردن است. بنابراین می توانیم به معادلات (۱۸) و (۱۹) معادله (۲۲) را نیز اضافه کنیم تا رابطه فشار و چگالی نیز تعیین شود. اما نکته این است که حال یک مجهول دیگر یعنی $T(r)$ نیز پدیدار شده که می بایست تکلیف آن را تعیین کنیم. همین طور که پیش می رویم متوجه می شویم هر بار که معادله جدیدی اضافه می کنیم مجهول جدیدی نیز اضافه می شود و همین طور معادلات ساختار ستاره پیچیده و در هم تنیده می شود. برای اینکه بفهمیم دما در حجم ستاره چگونه تغییر می کند، می بایست به مکانیزم تولید و انتشار انرژی در درون ستاره نگاه کنیم. اگر میزان تولید انرژی را در هر واحد جرم از ستاره در فاصله r با $\epsilon(r)$ نشان دهیم، و میزان کل انرژی تولید شده تا فاصله r را با $L(r)$ نشان دهیم، آنگاه داریم:

$$\boxed{\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi\rho(r) r^2 \epsilon(r).} \tag{۲۵}$$

میزان تولید انرژی یعنی $\epsilon(r)$ می بایست با اطلاعاتی که از نوع واکنش های هسته ای در درون ستاره داریم تعیین شود و این تابع البته با عمر ستاره که نوع سوخت آن و هم چنین ذخیره آن از عناصر عوض می شود تغییر خواهد کرد. اما انرژی ای که در هر لایه ستاره تولید می شود به بیرون



شکل ۳: قطعه ای از گاز که به صورت رنگی مشخص شده است تحت تاثیر دو نیروی متضاد در حال تعادل است. فشار گاز که نیرویی رو به بیرون و گرانش که نیرویی رو به مرکز ستاره است.

از ستاره می رود و نهایتا از ستاره به بیرون منتشر می شود. دو مکانیزم عمده برای انتشار انرژی از درون به بیرون وجود دارد. یکی توسط تابش [۱۱] و دیگری همرفت [۱۲]. در مکانیزم انتقال تابشی انرژی توسط فوتون ها منتشر می شود اما میلیون ها سال طول می کشد تا یک فوتون از درون ستاره به سطح ستاره برسد. در واقع اگر همین امروز واکنش های هسته ای درون مرکز خورشید خاموش شوند بیش از یک میلیون سال طول می کشد تا ما تغییر محسوسی در انرژی ساطع شده از خورشید حس کنیم زیرا در این مدت فوتون ها انرژی تولید شده را به بیرون حمل می کنند. دلیل اش هم این است که فوتون در مسیر مستقیم و با سرعت نور حرکت نمی کند بلکه یک ولگشت خیلی آهسته را با سرعت نسبی حدود یک سانتی متر بر ثانیه طی می کند. به بیان دقیق تر هر فوتون بسته به چگالی گاز درون ستاره، پس از طی حدود یک سانتی متر توسط یک اتم جذب شده و سپس در جهت تصادفی دیگری باز نشر می شود. البته فوتون دومی دیگر همان فوتون اولی نیست و تنها برای سادگی است که می توان گفت فوتون یک ولگشت را در درون ستاره انجام می دهد.

[۱۱] Radiative Transfer
[۱۲] Convective Transfer

البته مکانیزم دیگری نیز در انتقال انرژی در درون ستاره دخالت دارد که البته اهمیت اش کمتر از مکانیز تابش است. این مکانیزم همرفت است به این معنا که توده های بزرگ ماده یا به عبارت بهتر جریان های سیال و داغی از اقیانوس ماده درون ستاره حرکت کرده به سمت سطح ستاره حرکت می کند و بجای آن اقیانوسهایی از ماده سردتر(که البته در مقیاس زمینی بسیار داغ است) به سمت مرکز ستاره پیش می روند.

با فرض اینکه تنها مکانیزم انتقال انرژی از درون ستاره به بیرون انتقال تابشی است می خواهیم بدانیم که انتقال انرژی چه ربطی به فاصله از مرکز دارد. شار تابشی را در نقطه ی r با $J(r)$ نشان می دهیم. این شار عبارت است از میزان انرژی ای که توسط فوتون ها از واحد سطح عمود بر شعاع در واحد زمان عبور می کند. بنابراین اگر $L(r)$ را کل میزان تابش از پوسته ای به شعاع r بگیریم، داریم:

$$L(r) = 4\pi r^2 J(r). \tag{۲۶}$$

اما می دانیم که انتقال تابشی متناسب به گرادیان دماست به این معنا که:

$$J(r) = -\kappa_{ph}\left(\frac{dT}{dr}\right) \tag{۲۷}$$

که در آن κ_{ph} ضریب هدایت گرمایی فوتون هاست. فوتون ها هم گرما را از لایه های گرم به لایه های سرد تر منتقل می کنند. κ_{ph} نیز متناسب با طول پویش آزاد فوتون ها (l) و سرعت نور و هم چنین چگالی ظرفیت گرمایی گاز فوتونی درون ستاره است، یعنی

$$\kappa_{ph} = \frac{1}{3}Clc. \tag{۲۸}$$

برای اینکه ربط ظرفیت گرمایی گاز فوتونی را به دما بفهمیم، از این استفاده می کنیم که برای گاز فوتونی، چگالی انرژی برابر است با:

$$u = \frac{4\sigma}{c}T^4 \tag{۲۹}$$

بنابراین

$$C = \frac{16\sigma}{c}T^3. \tag{۳۰}$$

بنابراین با ترکیب این روابط تا اینجا فهمیده ایم که:

$$\begin{aligned} L(r) &= J(r)\times 4\pi r^2 = -\kappa_{ph}\left(\frac{dT}{dr}\right)\times 4\pi r^2 \\ &= -\frac{1}{3}Clc\times 4\pi r^2\left(\frac{dT}{dr}\right) \end{aligned}$$

$$= \quad -\frac{1}{3} \times \frac{16\sigma}{c} T^3 \times lc \times 4\pi r^2 \left(\frac{dT}{dr}\right) \qquad (۳۱)$$

تنها چیزی که باقیمانده است این است که بستگی طول پویش آزاد فوتون را با فاصله از مرکز تعیین کنیم. طول پویش آزاد فوتون را نمی توان مثل اتم ها برحسب شعاع اتم ها بدست آورد. فوتون ها بر حسب فرکانس یا طول موجی که دارند توسط اتم ها جذب می شوند و سپس در جهات دیگر ساطع می شوند. بنابراین طول پویش آزاد فوتون ها به طول موج آنها وابسته است. باریکه ای از نور با طول موج λ و شدت I_λ در نظر بگیرید. اگر این باریکه به اندازه فاصله ds در گازی با چگالی ρ حرکت کند شدت آن به اندازه dI_λ کم خواهد شد. این تغییر شدت متناسب است با فاصله ds با چگالی ρ و البته با چگالی اولیه I_λ. بنابراین داریم:

$$dI_\lambda \propto -I_\lambda \rho ds \qquad (۳۲)$$

ضریب تناسب را با χ_λ نشان می دهیم. این ضریب تناسب که به آن میزان کدر بودن [۱۳] گاز گفته می شود، نشان می دهد که فوتون ها چه مقدار پراکنده می شوند. هرچه که این ضریب بیشتر باشد (به اصطلاح گاز برای آن طول موج کدرتر باشد) به این معناست که فوتون هایی با آن طول موج طول پویش آزاد کوتاه تری دارند و بیشتر پراکنده می شوند. این ضریب را می توان برای هر طول موجی اندازه گیری کرد. به این ترتیب می توان نوشت:

$$dI_\lambda = -\chi_\lambda \rho I_\lambda ds \qquad (۳۳)$$

که با حل آن به رابطه زیر می رسیم:

$$I(s) = I(0) e^{-\frac{s}{\chi_\lambda \rho}} \qquad (۳۴)$$

این رابطه نشان می دهد که شدت نور یا در واقع همان تعداد فوتون ها به صورت نمایی و با مقیاس طولی $l_\lambda := \chi_\lambda \rho$ کم می شود. به این ترتیب معنا و مفهوم l_λ همان طول پویش آزاد فوتون هاست. اگر در روابطی که بدست آورده ایم تفاوتی بین فوتون هایی با طول موج های متفاوت قایل نشویم یا اینکه متوسط این طول پویش آزاد را برای طول موج های متفاوت با l نشان دهیم، آنگاه می توانیم رابطه (۳۱) را به شکل نهایی زیر بنویسیم:

$$L(r) = \frac{1}{3} \times \frac{16\sigma}{c} T^3 \times \frac{1}{\rho(r)\chi(r)} c \times 4\pi r^2 \left(\frac{dT}{dr}\right) \qquad (۳۵)$$

[۱۳] Opacity

و یا پس از خلاصه کردن

$$\boxed{L(r) = -4\pi r^2 \frac{16\sigma T^3(r)}{3\chi(r)\rho(r)} \frac{dT}{dr}.} \tag{۳۶}$$

حال می توانیم همه معادلات را یک جا جمع کنیم:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dm(r)}{dr} &= 4\pi\rho(r)r^2 \\ \frac{dp(r)}{dr} &= -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \\ \frac{dL(r)}{dr} &= 4\pi\rho(r)r^2\epsilon(r) \\ \frac{dT}{dr} &= -\frac{3\chi(r)\rho(r)}{64\pi r^2\sigma T^3(r)}L(r). \end{aligned}} \tag{۳۷}$$

این معادلات دیفرانسیل بیان می کنند که تغییرات فشار، چگالی، دما و تابش با شعاع چگونه اند. اما این معادلات به شکل فعلی کامل نیستند و نمی توان آنها را حل کرد. برای حل کامل این معادلات می بایست بدانیم که در هر نقطه رابطه فشار، دما و چگالی چگونه است (یعنی معادله حالت را بدانیم) ، هم چنین باید بدانیم که در هر نقطه چه مقدار انرژی (هسته ای) تولید می شود، و بالاخره میزان کدر بودن ستاره را داشته باشیم. با داشتن ترکیب هسته ها (که معمولا از روی عمر و شعاع ستاره بدست می آید) و هم چنین با داشتن چگالی و دما می توانیم فشار، نرخ تولید انرژی و کدر بودن ستاره را تعیین کنیم. روابط زیر همین کار را انجام می دهند که می بایست به معادلات چهارگانه دیفرانسیلی که قبلا بدست آوردیم اضافه شوند:

$$\boxed{\begin{aligned} &P = P(T, \rho, \mathrm{Composition}) \\ &\chi = \chi(T, \rho, \mathrm{Composition}) \\ &\epsilon = \epsilon(T, \rho, \mathrm{Composition}). \end{aligned}} \tag{۳۸}$$

سه معادله جبری فوق که در آنها ترکیب شیمیایی [۱۴] نیز باید معلوم باشد، به همراه معادلات چهارگانه دیفرانسیل معادلات هفت گانه ساختار ستارگان را تشکیل می دهند. طبیعی است که این معادلات را نمی توان به صورت تحلیل حل کرد. اما حل عددی این معادلات امکان پذیر است و از طریق

[۱۴] Composition

حل همین معادلات است که اخترفیزیکدان ها اطلاعات فوق العاده باارزشی در مورد ساختار ستارگان بدست آورده اند. در واقع اطلاعات ما از ساختار درون ستاره ها بسیار بیشتر از ساختار درون زمین و دیگر سیارات است.

۴ فشار واگنی الکترون

در مرکز ستاره ها زنجیره ای از واکنش های هسته ای با گداخت هسته های هیدروژن و تولید هسته های هلیوم آغاز می شود و سپس با گداخت هسته های هلیوم و تولید هسته های کربن ادامه پیدا می کند. این زنجیره سرانجام با تولید هسته های سنگین آهن پایان می یابد. در این مرحله است که تمامی سوخت هسته ای ستاره به پایان می رسد و فشار ناشی از گرما از بین می رود و ستاره در مقابل رمبش گرانشی بی دفاع می شود. اگر هیچ عامل دیگری در مقابل رمبش گرانشی نایستد، ستاره در چند دقیقه دچار رمبش خواهد شد. می توانیم تخمینی از زمانی که طول می کشد تا این رمبش انجام شود، بدست آوریم. جرم ستاره را M و شعاع آن را R می گیریم. در این صورت اگر قطعه سنگی به جرم m را در سطح ستاره در نظر بگیریم می توانیم بپرسیم که چه زمانی طول خواهد کشید که این قطعه سنگ به درون مرکز ستاره سقوط کند. از قانون بقای انرژی می دانیم که انرژی جنبشی قطعه سنگ در زمانی که به مرکز ستاره می رسد برابر است با:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R}. \qquad (۳۹)$$

اگر قرار دهیم $T_c := \frac{R}{v}$ که در آن T_c زمان رمبش است، بدست می آوریم:

$$T_c = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}}. \qquad (۴۰)$$

برای خورشید، این زمان حدوداً برابر است با ۱۲۰۰ ثانیه یا بیست دقیقه. اما پس از تمام شدن سوخت هسته ای و سرد شدن ستاره یک عامل مهم مانع از رمبش ستاره تا شعاع صفر می شود و آن فشار واگنی الکترون هاست. [۱۵] منظور از فشار واگنی چیست؟ خاکستر بجا مانده از سوخت هسته ای را می توان به صورت یک توده ای از هسته های سنگین و یک گاز الکترونی در نظر گرفت. در این مرحله می توان از هسته ها صرف نظر کرد. دلیل این امر را بزودی خواهیم فهمید. نکته این است که اصل طرد پاوولی مانع فشرده شدن بیشتر الکترون ها می شود و فشار حاصل از اصل طرد پاوولی به اندازه ای است که مانع رمبش بیشتر ستاره می شود. می توانیم مقدار این فشار را به ترتیب زیر حساب کنیم. اگر گاز الکترونی را یک

[۱۵] Electron Degeneracy Pressure

گاز غیر نسبیتی در نظر بگیریم و از رابطه $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ برای آن استفاده کنیم، از درس مربوط به مکانیک آماری گاز فرمیونی در دمای صفر می دانیم که روابط زیر برقرارند:

$$N_e = \frac{V}{6\pi^2}\left(\frac{2m_e\epsilon_F}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \qquad U = \frac{3}{5}N_e\epsilon_F, \qquad P_eV = \frac{2}{3}U, \tag{۴۱}$$

که در آن P_e را برای توصیف فشار واگنی گاز الکترونی به کار برده ایم. N_e نیز تعداد الکترون هاست. در این روابط m_e جرم الکترون است. با ترکیب این روابط بدست می آوریم:

$$P_e = \frac{2}{5}N_e\epsilon_F = \frac{2}{5}N[(\frac{6\pi^2N_e}{V})^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2}{2m_e}] \tag{۴۲}$$

و یا

$$P_e = \frac{1}{5}\frac{\hbar^2}{m_e}(6\pi^2)^{2/3}n_e^{5/3} \tag{۴۳}$$

که در آن $n_e = \frac{N_e}{V}$ چگالی تعداد الکترون هاست. دقت کنید که این فشار متناسب با $\hbar$ است که به وضوح منشاء کوانتومی آن را نشان می دهد. اگر ثابت پلانک را به سمت صفر میل دهیم این فشار نیز به سمت صفر میل می کند. هم چنین متناسب با عکس جرم الکترون است. اگر الکترون ها سبک تر باشند، معنایش این است که فاصله سطوح انرژی الکترون ها از هم بیشتر می شود و اگر بخواهیم تعداد معینی الکترون را در یک حجم معین قرار دهیم سطح انرژی فرمی بالاتر خواهد رفت و فشار واگنی بیشتر خواهد شد. برای این که این چگالی تعداد را به چگالی جرمی ستاره تبدیل کنیم توجه می کنیم که اگر ستاره از اتم هایی با جرم اتمی A و عدد اتمی Z تشکیل شده باشد، آنگاه به ازای هر Z الکترون، A هسته وجود دارد. بنابراین رابطه چگالی عددی الکترون ها با چگالی جرمی به صورت زیر است:

$$\rho = \frac{Am_p}{Z}n_e. \tag{۴۴}$$

که در آن m_p جرم پروتون است. (جرم پروتون و نوترون را تقریبا مساوی گرفته ایم.) با قرار دادن این رابطه در (۴۳) فشار واگنی گاز الکترونی را بر حسب چگالی جرمی ρ بدست می آوری که برابر است با:

$$P_e = \frac{1}{5}\frac{\hbar^2}{m_e}(6\pi^2)^{2/3}(\frac{Z}{Am_p})^{5/3}\rho^{5/3} \tag{۴۵}$$

سوای ضرایبی که در رابطه بالا وجود دارد آنچه که مهم است رابطه بین فشار و چگالی جرمی است که آن را به صورت زیر می نویسیم:

$$P_e \sim \rho^{5/3}, \tag{۴۶}$$

که نشان می دهد فشار واگنی یک گاز الکترونی غیر نسبیتی چگونه با افزایش چگالی افزایش می یابد. به این ترتیب با متراکم شدن ستاره و طبیعتا افزایش چگالی جرمی ستاره که فشار گرانشی را رو به مرکز ستاره افزایش می دهد، فشار واگنی الکترون ها که سعی می کند مانع آن شود، هم شروع به افزایش می کند. سوال این است که آیا فشار واگنی الکترون ها برای مقابله با رمبش گرانشی ستاره کافی است یا نه؟ برای این کار به معادله تعادل هیدرواستاتیک ستاره یعنی (۱۸) نگاه می کنیم که به موجب آن:

$$\frac{dP_g}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}. \tag{۴۷}$$

در این رابطه برای مشخص بودن بیشتر، فشار گرانشی را با P_g نشان داده ایم. با ضرب کردن دو طرف این رابطه در $4\pi r^3 dr$ بدست می آوریم:

$$\int_0^R \frac{dP_g(r)}{dr} 4\pi r^3 dr = -\int_0^R Gm(r) 4\pi\rho(r) r dr, \tag{۴۸}$$

که در آن R شعاع ستاره است. با محاسبه انتگرال سمت چپ به صورت جزئی خواهیم داشت:

$$P_g 4\pi r^3 \left.\right|_0^R - 3\int P_g(r) 4\pi r^2 dr = -\Omega. \tag{۴۹}$$

اما به دلیل اینکه فشار در سطح ستاره صفر است این رابطه تبدیل می شود به:

$$P_g = \frac{1}{3}\Omega. \tag{۵۰}$$

در این رابطه P_g متوسط فشار گرانشی و Ω مقدار کل انرژی گرانشی است. اما مقدار کل انرژی گرانشی چقدر است. در اینجا بازهم برای سادگی فرض می کنیم که چگالی در کل ستاره ثابت است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Omega = -\int_0^R Gm(r)\rho(r) r dr = -\int_0^R G\frac{4}{3}\pi r^3 \rho 4\pi\rho r dr = -\frac{3GM^2}{5R}. \tag{۵۱}$$

بنابراین فشار گرانشی برابر می شود با:

$$P_g = \frac{|\Omega|}{3V} = \frac{GM^2}{5R} \tag{۵۲}$$

و یا

$$P_g = \frac{G}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} M^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} \tag{۵۳}$$

به این ترتیب هم فشار واگنی گاز الکترونی را که رو به بیرون است و هم فشار گرانشی رو به داخل ستاره را محاسبه کرده ایم. حالا می توانیم آنها را با هم مقایسه کنیم. این فشارها عبارتند از:

$$\boxed{\begin{aligned} P_g &= \frac{G}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} M^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{4}{3}} \\ P_e &= \frac{1}{5}\frac{\hbar^2}{m}(6\pi^2)^{2/3}(\frac{Z}{Am_p})^{5/3}\rho^{5/3}. \end{aligned}} \tag{۵۴}$$

می بینیم که در اثر متراکم شدن ستاره و افزایش چگالی، فشار واگنی گاز الکترونی با شیب بیشتری افزایش می یابد و سرانجام به اندازه ای می رسد که بتواند با فشار گرانشی برابر شده و مانع رمبش بیشتر ستاره شود. ستاره وقتی به حال تعادل می رسد که این دو فشار با هم برابر شوند. ستاره ای که در این شرایط قرار گرفته یعنی فشار واگنی الکترون رمبش ستاره را متوقف کرده یک ستاره کوتوله سفید [۱۶] نام دارد. برای این ستاره داریم:

$$P_e = P_g \tag{۵۵}$$

یا

$$\frac{G}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} M^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{5}\frac{\hbar^2}{m}(6\pi^2)^{2/3}(\frac{Z}{Am_p})^{5/3}\rho^{5/3}. \tag{۵۶}$$

و یا پس از ساده کردن

$$M = (\frac{3\pi}{G}\frac{\hbar^2}{m_e})^{\frac{3}{2}}(\frac{Z}{Am_p})^{5/2}\rho^{1/2}. \tag{۵۷}$$

با استفاده از رابطه

$$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} \tag{۵۸}$$

می توانیم این رابطه را به صورت زیر نیز بنویسیم:

$$M_{wd} = (\frac{9\pi}{2})^2(\frac{\hbar^2}{Gm_e})^3(\frac{Z}{Am_p})^5\frac{1}{R^3}. \tag{۵۹}$$

که در آن M_{wd} جرم ستاره کوتوله سفید است. این رابطه اولا بیان می کند که جرم این نوع ستاره ها با عکس توان سوم شعاع آنها متناسب است و این موضوعی است که می توان درستی آن را با مشاهدات اخترفیزیکی سنجید. این رابطه با شهود ما نیز سازگار است، هرچه که ستاره پر جرم تر

[۱۶] White Dwarf

باشد تحت رمبش گرانشی کوچک تر خواهد شد. هم چنین این جرم متناسب با ثابت پلانک است که معنایش این است که اگر ثابت پلانک صفر باشد هیچ ستاره کوتوله سفیدی نمی بایست داشته باشیم، به عبارت دیگر همه ستاره هایی که سوخت آنها تمام شده باشد می بایست در اثر رمبش از بین رفته باشند یا تبدیل به سیاه چاله شده باشند.

---

۵ حد چاندراسخار و ستاره های نوترونی

آیا ستاره می تواند از حد کوتوله های سفید هم کوچکتر شده و در هم فشرده شود؟ آیا ممکن است فشار واگنی الکترون ها نتواند مانع رمبش ستاره شود؟ اگر به روابط (۸۰) نگاه کنیم به نظر می رسد که چنین چیزی ممکن نیست زیرا به هر حال با رمبش بیشتر و افزایش چگالی، بالاخره فشار واگنی الکترون ها به حدی زیاد می شود که در یک چگالی معین یا یک شعاع معین مانع رمبش بیشتر ستاره می شود و این شعاع همان شعاعی است که ستاره کوتوله سفید تشکیل می شود. اما یک نکته مهم در این روابط فراموش شده است و آن اینکه گاز الکترونی در آن غیر نسبیتی در نظر گرفته شده است. اگر گاز نسبیتی باشد، یک تغییر عمده در فشار واگنی رخ می دهد و آن اینکه رفتار فشار واگنی به جای $P_e \propto \rho^{5/3}$ به صورت $P_e \propto \rho^{4/3}$ خواهد بود و این به این معناست که با رمبش ستاره فشار واگنی الکترون ها و فشار گرانش پا به پای هم زیاد می شوند و فشار واگنی نمی تواند مانع رمبش شود. چنین ستاره ای در حد کوتوله های سفید متوقف نخواهد شد و به رمبش بیشتر ادامه خواهد داد. حال با سوالات متعددی روبرو هستیم: مثل:

سوال یک: تحت چه شرایطی یک گاز الکترونی نسبیتی است؟

سوال دو: چرا فشار یک گاز الکترونی نسبیتی رابطه اش با چگالی به صورت $P_e \propto \rho^{4/3}$ است؟

سوال سه: وقتی ستاره از حد کوتوله سفید عبور می کند چه چیزی مانع رمبش بیشتر ستاره می شود و رمبش بیشتر در کجا متوقف می شود؟ ستاره ای که ایجاد می شود چگونه است؟

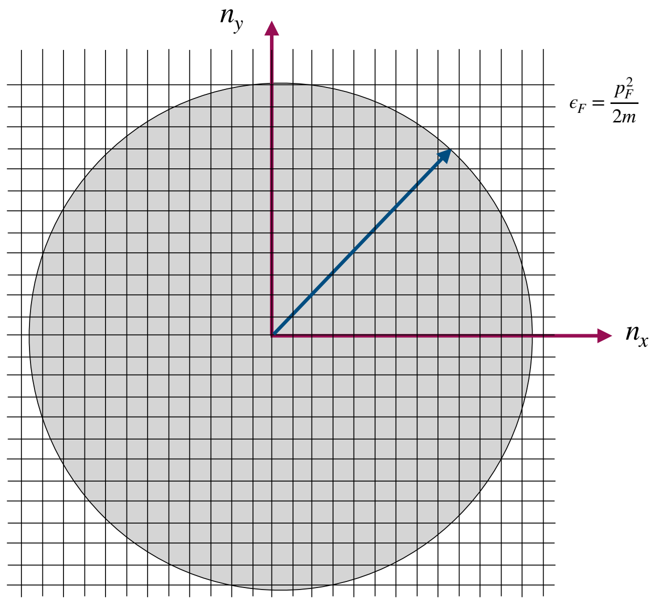
حال سعی می کنیم به این سوالات یک به یک پاسخ دهیم.

پاسخ سوال یک: مسلم است که در یک گاز الکترونی الکترون ها از پایین ترین سطح انرژی یعنی انرژی صفر را تا بالاترین سطح انرژی یعنی انرژی فرمی را پر می کنند. شکل (۴) . اما در واقع می توان گفت که تعداد نقاطی که نزدیک انرژی فرمی هستند بسیار بسیار بیشتر از بقیه نقاط است. به همین دلیل وقتی که می گوییم یک گاز الکترونی نسبیتی است معنایش این است که انرژی فرمی آن نسبیتی است. بنابراین شرط نسبیتی

بودن یک گاز الکترونی این است که داشته باشیم:

$$p_F \gtrapprox m_e c, \quad or \quad \epsilon_F >> m_e c^2. \tag{۶۰}$$

بنابراین برای تشخیص نسبیتی بودن یک گاز فرمی کافی است که تکانه فرمی را حساب کنیم.



شکل ۴: هر نقطه از این شبکه یک حالت از الکترون آزاد در یک محفظه دو بعدی را نشان می دهد. در این شبکه داریم: $\epsilon_{\mathbf{n}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$، و $k_x = \frac{\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{\pi n_y}{L}$. تکانه فرمی عبارت است از p_F و انرژی فرمی نیز برابر است با ϵ_F. تعداد نقاطی که در فاصله $\Delta\epsilon$ از سطح فرمی هستند بسیار بیشتر از تعداد نقاطی است که در همان فاصله ولی در یک انرژی کمتر هستند. این یک اثر هندسی است که با افزایش بعد نیز تشدید می شود. به عبارت دیگر تقریبا اکثریت نقاط انرژی ای نزدیک سطح فرمی دارند و می توان از تعداد بقیه نقاط صرف نظر کرد. این ویژگی را قبلا در درس های ابتدایی مکانیک آماری و آنزامبل میکروکانونیک دیده ایم.

اما تکانه فرمی براحتی از روی چگالی ذرات حساب می شود. با توجه به شکل (۴) در بعد ۳ داریم:

$$N = \frac{V}{8\pi^3}\int_0^{k_F} 4\pi k^2 dk = \frac{V}{2\pi^2}k_F^3. \tag{۶۱}$$

و از آنجا

$$k_F = (2\pi^2 n_e)^{\frac{1}{3}} \tag{۶۲}$$

و

$$p_F = \hbar k_F = \hbar(2\pi^2 n_e)^{\frac{1}{3}}. \tag{۶۳}$$

بنابراین شرط نسبیتی بودن یک گاز فرمی الکترونی این است که :

$$\hbar(2\pi^2 n_e)^{\frac{1}{3}} \gtrapprox m_e c. \tag{۶۴}$$

این رابطه بیان می کند که نسبیتی بودن یک گاز فرمی در دمای صفر تنها به چگالی آن بستگی دارد و اگر چگالی گاز از مقدار معینی بیشتر شود حتما گاز الکترونی را می بایست به صورت نسبیتی در نظر گرفت. برای اینکه احساسی از مقدار چگالی مورد نیاز پیدا کنیم می توانیم چگالی لازم را تخمین بزنیم. از این رابطه می بایست داشته باشیم:

$$n_e \gtrapprox \frac{1}{2\pi^2}(\frac{m_e c}{\hbar})^3 \approx 10^{36}\ m^{-3}. \tag{۶۵}$$

می توانیم این چگالی را با چگالی گاز الکترونی درون یک فلز مقایسه کنیم. در یک فلز این چگالی چیزی در حدودِ $10^{30}\ m^{-3}$ است. بنابراین هرگاه چگالی یک فلز را یک میلیون برابر کنیم، گاز الکترونی درون آن نسبیتی خواهد شد.
بسیار خوب تا اینجا فهمیدیم که چه موقع گاز الکترونی نسبیتی می شود و ستاره کوتوله سفید دیگر پایدار نخواهد بود و به رمبش گرانشی ادامه خواهد داد. برای پاسخ به این سوال کافی است که به رابطه (۶۴) و هم چنین رابطه $\rho = \frac{Am_p}{Z} n_e$ توجه کنیم و آنها را با هم ترکیب کنیم تا بدست آوریم:

$$\rho \gtrapprox \frac{Am_p}{Z}\frac{1}{2\pi^2}(\frac{m_e c}{\hbar})^3. \tag{۶۶}$$

بنابراین اگر یک ستاره کوتوله سفید چگالی جرمی اش از حد آستانه بالا بیشتر باشد نمی تواند در مقابل فشار گرانشی مقاومت کند و رمبش خواهد کرد. اما چگالی یک ستاره کوتوله سفید را از چه رابطه ای باید بدست آوریم و در رابطه بالا قرار دهیم؟ پاسخ اش رابطه (**؟؟**) است. زیرا این رابطه می گوید که ستاره ای که تحت دو فشار متضاد یعنی گرانش و گاز الکترونی به تعادل رسیده است چه معادله حالتی دارد. با ترکیب این رابطه و رابطه بالا بدست می آوریم:

$$M \equiv (\frac{3\pi}{G}\frac{\hbar^2}{m_e})^{\frac{3}{2}}(\frac{Z}{Am_p})^{5/2}\rho^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&\gtrapprox (\frac{3\pi}{G}\frac{\hbar^2}{m_e})^{\frac{3}{2}}(\frac{Z}{Am_p})^{5/2}(\frac{Am_p}{Z}\frac{1}{2\pi^2}(\frac{m_e c}{\hbar})^3)^{\frac{1}{2}} \\
&= 3\sqrt{\frac{3\pi}{2}}(\frac{Z}{Am_p})^2(\frac{\hbar c}{G})^{3/2} =: M_{ch} \qquad (۶۷)
\end{aligned}
$$

عبارت آخر جرمی را مشخص می کند که به آن جرم چاندراسخار [۱۷] می گوییم.

شکل ۵: سوبرامانیان چاندراسخار(۱۹۱۰-۱۹۹۵) اخترفیزیکدان هندی الاصل امریکایی و استاد دانشگاه شیکاگو که کارهای پیشتازانه فراوانی در اختر فیزیک انجام داد. وی در سال ۱۹۸۳ برنده جایزه نوبل در فیزیک شد.

$$
M_{ch} := 3\sqrt{\frac{3\pi}{2}}(\frac{Z}{Am_p})^2(\frac{\hbar c}{G})^{3/2} \qquad (۶۸)
$$

این جرم یک جرم بحرانی را مشخص می کند که اگر ستاره از آن سنگین تر باشد نمی تواند به عنوان یک ستاره کوتوله سفید پایدار باقی بماند و حتما بیشتر رمبش خواهد کرد. نکته مهم این است که این جرم بر حسب شرایط اولیه مثل چگالی یا جرم توده گاز و نظایر آن داده نمی شود بلکه

[۱۷] Chandraseckhar Mass

بر اساس ثابت های جهانی فیزیک داده می شود. تنها چیزی که به جز ثابت های جهانی در این رابطه وجود دارند نسبت $\frac{A}{Z}$ است که ترکیب اولیه ستاره را تعیین می کند. برای ستاره ای که از گاز هلیوم درست شده باشد، این جرم در حدود 1.4 برابر جرم خورشید است. بنابراین هر کوتوله سفیدی که در آسمان رصد می کنیم می بایست جرمی کمتر از 1.4 جرم خورشید داشته باشد، مستقل از این که در ابتدا و قبل از پایان سوخت و سازش چه مقدار جرم داشته و چقدر بزرگ بوده است. حال سوال این است که سرانجام چنین ستاره ای که از حد کوتوله های سفید نیز فراتر می رود چیست؟

این رابطه را می توان بر حسب جرم ستاره نیز نوشت. با توجه به $M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3$ بدست می آوریم

$$M \gtrapprox \rho \gtrapprox \frac{A}{Z} m_e \frac{1}{2\pi^2}(\frac{m_e c}{\hbar})^3. \tag{۶۹}$$

پاسخ سوال دو: برای گاز الکترونی نسبیتی می توانیم روابط انرژی و فشار را درست مثل گاز غیرنسبیتی حساب کنیم. با توجه به آنچه که در باره گاز فرمیونی یاد گرفته ایم، و هم چنین رابطه (۶۰) که چگالی حالت ها را بیان می کند، همواره می توانیم بنویسیم:

$$U = \frac{V}{8\pi^3}\int_0^{k_F} \epsilon(k) 4\pi k^2 dk. \tag{۷۰}$$

کافی است که عبارت مناسب را بجای $\epsilon(k)$ قرار دهیم تا انرژی کل حساب شود. در مورد یک گاز غیرنسبیتی این عبارت برابر است با $\epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ و در مورد یک گاز نسبیتی این عبارت برابر است با $\epsilon(k) = \sqrt{m^2c^4 + \hbar^2 k^2 c^2}$. علی الاصول می توانیم برای یک گاز الکترونی نسبیتی انتگرال زیر را حساب کنیم:

$$U = \frac{V}{2\pi^2}\int_0^{k_F} \sqrt{(mc^2)^2 + (\hbar k c)^2}\; k^2 dk. \tag{۷۱}$$

اما با توجه به این که چگالی حالت ها در نزدیکی سطح فرمی خیلی زیاد است و در آن نزدیکی بنابر نسبیتی بودن ذرات تکانه $\hbar k$ خیلی از mc بیشتر است، می توانیم بنویسیم:

$$U \approx \frac{V}{2\pi^2}\int_0^{k_F} \hbar k c\, k^2 dk = \frac{V}{8\pi^2}\hbar c k_F^4 \tag{۷۲}$$

اما از رابطه (۶۱) می توانیم تکانه فرمی را بر حسب چگالی بدست آوریم و در رابطه بالا جایگزین کنیم. به این ترتیب انرژی کل را بدست می آوریم:

$$U \approx \frac{(2\pi^2)^{1/3}}{4} V\hbar c\, n^{4/3}. \tag{۷۳}$$

البته از همان ابتدا هم می توانستیم با استدلال ابعادی بفهمیم که رابطه انرژی کل و چگالی می بایست به این صورت باشد.

■ **تمرین:** با استفاده از آنالیز ابعادی یک بار برای گاز غیرنسبیتی و یک بار هم بار هم برای گاز فوق نسبیتی انرژی فرمی و انرژی کل را برحسب چگالی بدست آورید.

اما چگونه می توانیم فشار را بدست آوریم؟ برای این کار به رابطه کلی ای در مورد فشار نگاه می کنیم.

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{2\pi^2}\int_0^\infty k^2 dk \ln(ze^{-\beta\epsilon_k}+1). \tag{۷۴}$$

در دمای صفر می دانیم که وقتی انرژی کمتر از انرژی فرمی است،

$$\ln(ze^{-\beta\epsilon_k}+1) = \ln ze^{-\beta\epsilon_k} = \beta(\epsilon_F - \epsilon_k) \tag{۷۵}$$

و وقتی که گاز نسبیتی است (با تقریبِ $\epsilon_k \approx \hbar kc$)

$$\ln(ze^{-\beta\epsilon_k}+1) = \hbar\beta c(k_F - k). \tag{۷۶}$$

در نتیجه

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{2\pi^2}\int_0^{k_F} k^2 dk\, \hbar\beta c\,(k_F - k) = \frac{V}{2\pi^2}\frac{\hbar c}{kT}\frac{1}{12}k_F^4. \tag{۷۷}$$

در نتیجه

$$PV = \frac{\hbar c}{24\pi^2}k_F^4. \tag{۷۸}$$

اگر این رابطه را با رابطه (۷۱) مقایسه کنیم، به نتیجه زیر می رسیم:

$$PV = \frac{1}{3}U = \frac{(2\pi^2)^{1/3}}{12}V\hbar c\, n^{4/3}. \tag{۷۹}$$

این نتیجه را هم می شد با استدلال ابعادی (البته منهای ضرایب عددی آن) بدست آورد (تمرین زیر.) به این ترتیب نشان داده ایم که در یک گاز نسبیتی فشار با توان $\frac{4}{3}$ از چگالی متناسب است.

■ **تمرین:** با استدلال ابعادی نشان دهید که فشار یک گاز چه نسبتی وچه غیر نسبیتی همواره در رابطه $PV \propto U$ صدق می کند.

پاسخ سوال سه: حال می رسیم به پاسخ آخرین سوال. اگر فشار واگنی الکترون ها که حالا نسبیتی شده اند در مقابل رمبش گرانشی مقاومت نمی کند پس چه چیزی مانع رمبش ستاره به طور کامل می شود؟ پاسخ اش را باید در همان سوال نخست و در رابطه (۶۴) جستجو کرد. یک

گاز الکترونی در چگالی های حدود $10^{36}\ m^{-3}$ نسبیتی می شود. اما همین رابطه نشان می دهد که یک گاز نوترونی در چگالی های بسیار بیشتر نسبیتی خواهد شد. اگر جرم نوترون را حدودا ۲۰۰۰ برابر جرم الکترون بگیریم، این رابطه بیان می کند که یک گاز نوترونی در چگالی هایی یک میلیارد برابر در حدود $10^9 \times 10^{36}\ m^{-3}$ نسبیتی خواهد شد. بنابراین وقتی که گاز الکترونی نسبیتی شده و قادر به مقاومت در برابر رمبش نیست، گاز نوترونی درون ستاره هنوز غیر نسبیتی است و فشار آن به صورت $\rho^{5/3}$ با چگالی زیاد می شود و نهایتا مانع رمبش خواهد شد. بنابراین همان معادله ای که برای تعادل یک ستاره کوتوله سفید نوشتیم یعنی معادله (۸۱) برای یک ستاره نوترونی نیز با یک تصحیح مناسب برقرار خواهد بود. این تصحیح مناسب می بایست در معادله فشار گاز الکترونی صورت بگیرد تا آن را تبدیل به فشار گاز نوترونی کند. نخست معادله (۴۳) را به صورت زیر تصحیح می کنیم که در آن از جرم و تعداد الکترون ها با جرم و تعداد نوترون ها عوض شده است:

$$P_n = \frac{1}{5}\frac{\hbar^2}{m_n}(6\pi^2)^{2/3}n_n^{5/3} \tag{۸۰}$$

و سپس دقت می کنیم که رابطه چگالی تعداد نوترون ها با چگالی جرمی ساده است و به صورت $\rho = n_n m_n$ نوشته می شود. بنابراین به جای دو معادله (۸۰) معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$\boxed{\begin{aligned} P_g &= \frac{G}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} M^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{4}{3}} \\ P_n &= \frac{1}{5}\frac{\hbar^2}{m_n}(6\pi^2)^{2/3}(\frac{1}{m_n})^{5/3}\rho^{5/3}. \end{aligned}} \tag{۸۱}$$

تساوی این دو نوع فشار معادله حالت تعادل یک ستاره نوترونی را بدست می دهد که پس از ساده کردن شکل آن چنین است:

$$M_{ns} = (\frac{9\pi}{2})^2(\frac{\hbar^2}{Gm_n})^3(\frac{1}{m_n})^5\frac{1}{R^3}. \tag{۸۲}$$

که در آن M_{ns} جرم ستاره نوترونی است. این رابطه نشان می دهد که شعاع یک ستاره نوترونی با یک جرم معین ۲۰۰۰ برابر کوچکتر از یک ستاره کوتوله سفید با همان جرم است.

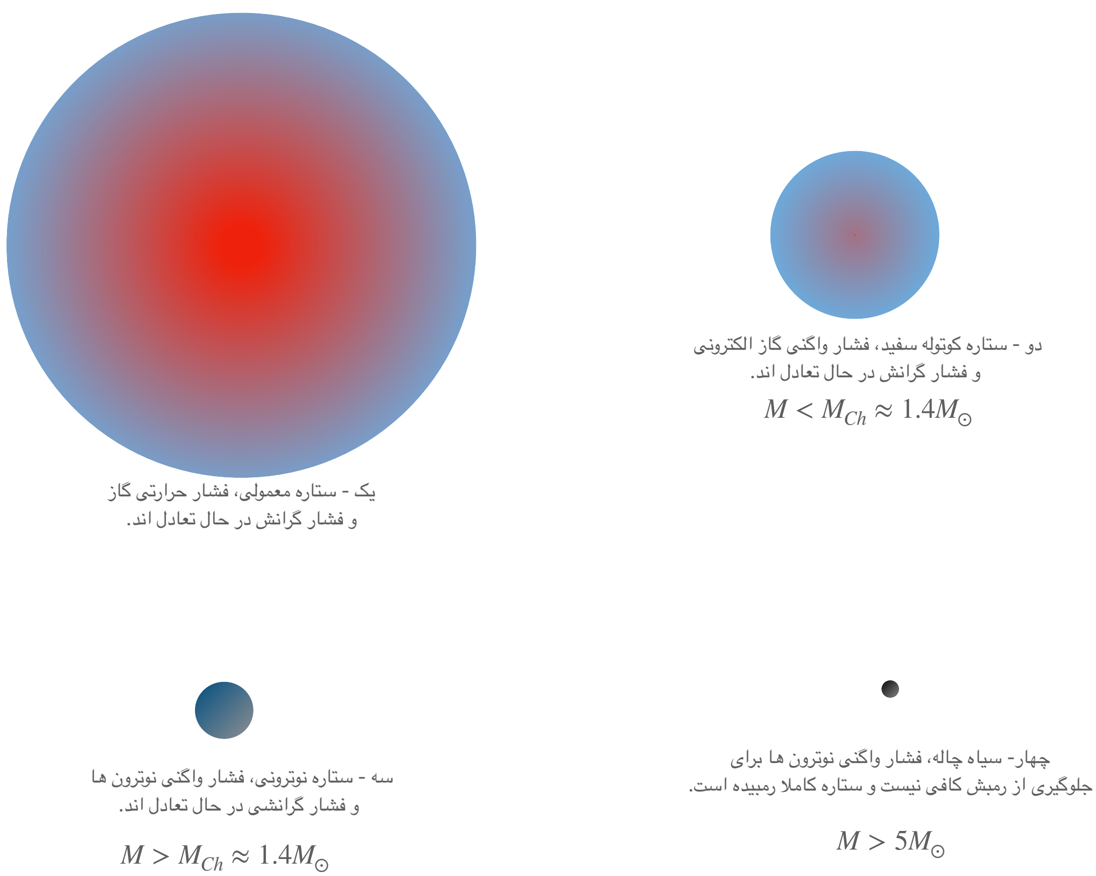
حال همان سوالی را که در بخش قبلی پرسیدیم اینجا نیز می توانیم بپرسیم؟ چه موقع یک ستاره حتی با استفاده از فشار واگنی نوترونی نیز نمی تواند در مقابل گرانش مقاومت کند و در خود فرومی ریزد؟ این همان سوال یک و پاسخ آن در رابطه (۶۳) است که باید به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\hbar(2\pi^2 n_n)^{\frac{1}{3}} \gtrapprox m_n c. \tag{۸۳}$$

از آنجا که جرم نوترون حدودا ۲۰۰۰ برابر جرم الکترون است، این رابطه بیان می کند که چگالی تعداد نوترون ها یا در واقع چگالی جرمی ستاره می بایست به حدود یک میلیارد برابر چگالی چاندراسخار برسد تا نوترون ها نیز نسبیتی شوند و مقاومت شان را در مقابل فشار گرانش از دست بدهند. این رابطه را به شکل مشابه رابطه (۶۶) نیز می توان نوشت. اگر همان خط محاسبه را دنبال کنیم به نتیجه زیر می رسیم:

$$M > 3\sqrt{\frac{3\pi}{2}}(\frac{1}{m_p})^2(\frac{\hbar c}{G})^{3/2} =: M_{CH} \qquad (۸۴)$$

که در آن M_{CH} را می توان جرم چاندارسخاری نامید که اگر جرم ستاره از آن بیشتر باشد، دیگر فشار واگنی نوترونی نیز نمی تواند مانع رمبش ستاره در اثر گرانش شود و ستاره حتما تبدیل به یک سیاه چاله خواهد شد. این جرم چیزی در حدود ۵ برابر جرم خورشید است.



شکل ۶: شرایط مختلف یک ستاره.

۶ مسئله ها

- مسئله اول: تعداد پروتون های درون خورشید را تخمین بزنید.

- مسئله دوم: الف: یک ابر هیدروژنی با جرم حدود $1000\ M_\odot$ در دمای ۲۰ درجه کلوین در نظر بگیرید. این ابر هیدروژنی چه چگالی بحرانی ای باید داشته باشد تا بتواند متراکم شده و تبدیل به یک ستاره شود.

ب: اگر این ابر هیدروژنی جرمی در حدود جرم خورشید داشته باشد و دمای آن نیز $100\ K$ باشد، چگالی بحرانی فوق چه مقدار خواهد بود.

- مسئله سوم: چگالی جینز را برای یک ابر هیدروژنی که جرم آن $10\ M_\odot$ و دمای آن $10\ K$ است پیدا کنید.

- مسئله چهارم: یک ابر هیدروژنی جرمی برابر با $1000\ M_\odot$ و دمایی برابر با $3\ K$ دارد. شعاع این ابر هیدروژنی چقدر باید باشد که بتواند تبدیل به یک ستاره شود؟

- مسئله پنجم: جرم جینز برابر است با: $M_J := \frac{3}{2}\frac{k_B T}{Gm}R$. از نظر شهودی بستگی این جرم را به پارامترهای شعاع، دما، جرم مولکولهای گاز و هم چنین ثابت گرانش توضیح دهید.

- مسئله ششم: ستاره ای را تصور کنید که جرم آن $1000\ M_\odot$ و شعاع آن $10\ R_\odot$ است. اگر این ستاره سوخت اش تمام شود تخمین بزنید که چقدر طول خواهد کشید که در اثر رمبش گرانشی درخود فرو بریزد.

- مسئله هفتم: فرض کنید که الکترون های درون خورشید آزاد هستند. نرژی فرمی را برای گاز الکترونی درون خورشید در شرایط فعلی حساب کنید. آیا درست که بگوییم این گاز فرمی در دمای صفر است؟

- مسئله هشتم: شعاع یک ستاره کوتوله سفید که جرمی برابر با جرم خورشید دارد چقدر است؟ فرض کنید که ستاره از گاز هلیوم تشکیل شده است.

- مسئله نهم: اگر خورشید شروع به رمبش گرانشی کند، با فرض اینکه هیچ جرمی از دست ندهد و الکترون های های درون آن یک گاز آزاد تشکیل دهند، حساب کنید در چه شعاعی گاز الکترونی نسبیتی خواهد شد. در چه شعاعی گاز نوترونی نسبیتی خواهد شد؟

- مسئله دهم: شعاع یک ستاره کوتوله سفید به جرم خورشید را تخمین بزنید. میزان فشار گرانشی و هم چنین فشار واگنی الکترون را برای چنین ستاره ای بدست آورید. یک سانتی متر مکعب از این ستاره چه مقدار جرم دارد؟

- مسئله یازدهم: یک ستاره نوترونی با چرخش سریع خود حول محورش که یک نیروی گریز از مرکز ایجاد می کند می تواند با نیروی گرانشی مقابله کند. چنین ستاره ای یک تپ اختر [۱۸] نامیده می شود. نخست شعاع یک ستاره نوترونی با جرم ۲ برابر جرم خورشید را محاسبه کنید. سپس مقدار می نیمم سرعت زاویه ای این ستاره را پیدا کنید به نحوی که مانع رمبش گرانشی شود.

[۱۸] Pulsar