

مقدمه ای بر گذار فاز

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۶ اردیبهشت ۱۳۹۹

۱ مقدمه

هر سیستم واقعی در طبیعت از تعداد فوق العاده زیادی ذره تشکیل شده که بین آنها برهم کنش وجود دارد. اغلب سیستم هایی که تا کنون مطالعه کردیم سیستم های بدون برهم کنش بودند. این موضوع باعث می شد که اساسا محاسبه تابع پارش یک سیستم بس ذره ای به محاسبه تابع پارش یک ذره کاهش یابد. البته روش هایی نیز برای محاسبه تابع پارش سیستم های با برهم کنش یاد گرفتیم مثل روش بسط خوشه ای. وجود برهم کنش همواره باعث ایجاد تصحیحاتی در تابع پارش و در نتیجه خواص ترمودینامیکی می شود. این تغییرات می توانند در معادله حالت و انرژی و به تبع آن در دیگر خواص ترمودینامیکی مثل ظرفیت گرمایی ویژه، ظرفیت تراکم پذیری، هدایت الکتریکی و گرمایی و بسیاری خواص دیگر ظاهر شوند. همه این ها پدیده های به اصطلاح اختلالی هستند به این معنا که سیستم هایی هستند که اندکی با سیستم های ایده آل و بدون برهم کنش فاصله دارند و ما با روش های تقریبی سعی می کنیم تغییرات اندکی را که در رفتار این سیستم ها نسبت به سیستم های ایده آل و بدون برهم کنش وجود دارد پیدا کنیم. مثلا با در نظر گرفتن برهم کنش بین اتم های یک گاز و محاسبه اولین و دومین ضرایب ویریا معادله گاز ایده آل را تصحیح کنیم و از آنجا تصحیحات اندکی را در ضرایب تراکم پذیری و ظرفیت گرمایی گاز محاسبه کنیم.

اما وقتی به دنیای اطراف خود نگاه می کنیم مهم ترین چیزی که می بینیم وجود فازهای مختلف در ماده است. با افزایش دما به ۱۰۰ درجه سانتی گراد آب از مایع به بخار تبدیل می شود و با کاهش دما به زیر صفر درجه آب یخ می زند و مایع تبدیل به یک جامد بلوری شکل با ساختار

منظم شبکه ای می شود. یک قطعه فلز مثل آهن یا کبالت که مغناطش دائمی ندارد با کاهش دما به زیر یک دمای بحرانی^۱ به ناگهان مغناطش دائمی پیدا می کند. یک قطعه فلز که در دمای اتاق مقاومت الکتریکی دارد، با کاهش دما ناگهان ابررسانا می شود و مقاومت آن به صفر می رسد آنچنانکه یک جریان الکتریکی می تواند سالها بدون اتلاف در آن بچرخد، و مایعی که در دمای اتاق گرانشی یا وشکسانی^۲ دارد، با کاهش دما به زیر ۴ درجه کلوین به ناگهان تبدیل به یک ابرشاره می شود و گرانشی اش را به کلی از دست می دهد. این ها همگی فازهای مختلف از یک ماده هستند و سوال اساسی ای که با آن روبرو هستیم این است که آیا ماده در این فازهای گوناگون با برهم کنش ها یا هامیلتونی های متفاوت تعریف می شود یا همواره می توانیم با یک هامیلتونی هر سیستمی را در فازهای گوناگونش توصیف کنیم. یادآوری می کنیم که تا حدود سالهای ۱۹۵۰ پاسخ این سوال بدیهی نبوده و هنوز هم بدیهی نیست چرا که توصیف این فازها با مکانیک آماری با روش های اختلالی در فیزیک امکان پذیر نیست و برای فهم آنها نمی توان از روش های تقریبی ای که تا کنون آموخته ایم استفاده کنیم. به عبارت بهتر همه این پدیده ها ، پدیده های غیراختلالی^۳ هستند. با مطالعاتی که در مورد سیستم های گوناگون انجام داده ایم امروزه به این «باور» رسیده ایم که ماده در همه فازهایش تنها با یک هامیلتونی توصیف می شود و این تابع پارش سیستم است که با تغییر پارامترهای خارجی از خود رفتار غیر پیوسته و غیرتحلیلی نشان می دهد و منجر به ناپیوستگی در کمیت های ترمودینامیکی ناشی از آن می شود که ما آن را به صورت فازهای مختلف ماده می بینیم. این موضوع یعنی توصیف فازهای مختلف یک سیستم یکی از چالش های بزرگ مکانیک آماری است.

قبل از آنکه با روش های مکانیک آماری برای فهم پدیده گذار فاز آشنا شویم بهتر است با مثالهایی از پدیده گذار فاز آشنا شویم. ضمن توضیح این مثال ها با بعضی از مفاهیم اساسی و کلی نیز آشنا می شویم. اما در همین ابتدا باید یک مفهوم مهم و کلی را معرفی کنیم.

■ **پارامتر نظم**^۴ چگونه باید فازهای مختلف را از هم تمیز دهیم؟ برای پاسخ به این سوال مفهوم پارامتر نظم ابداع شده است. این پارامتر یک مشاهده پذیر ماکروسکوپی و ترمودینامیکی است که مقدارش در فازهای مختلف به وضوح فرق می کند و به گونه ای انتخاب شده است که اندازه گیری آن به روشنی تعیین می کند که ماده در کدام یک از فازهای خود قرار گرفته است. این مشاهده پذیر معمولاً معنای شهودی روشنی دارد و به خوبی نشان دهنده خصوصیات یک فاز است. بعنوان مثال در گذار فاز مایع بخار ، اندازه چگالی می تواند نقش پارامتر نظم را بازی کند، هم چنین است تراکم پذیری. اما در مثال گذار فاز مغناطیسی چگالی ماده چنین نقشی ندارد بلکه در این مورد اندازه مغناطش ماکروسکوپی نقش پارامتر نظم را ایفا می کند. در بعضی از موارد نیز ممکن است تعریف پارامتر نظم از نظر شهودی چندان سراسر است و ساده نباشد و تعریف آن با توجه به ملاحظات مجردتری صورت بگیرد، مثل ابررسانایی و ابرشارگی.

^۱ Critical Temperature

^۲ Viscosity

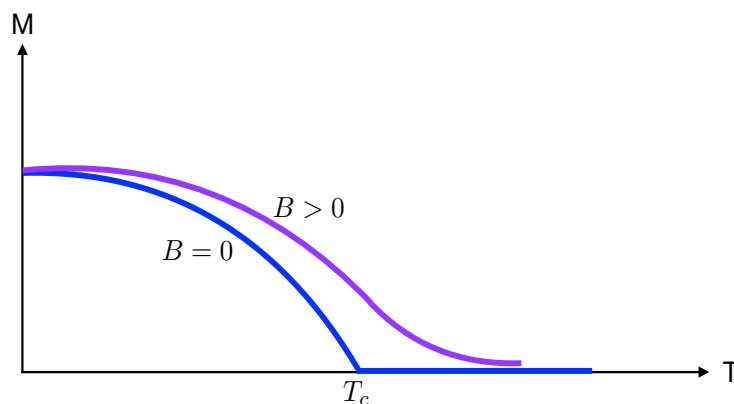
^۳ Non-Perturbative Phenomena

^۴ Order Parameter

۲ مثال هایی از گذار فاز

۱.۲ گذار فاز فرومغناطیسی

گروه خاصی از فلزات مثل آهن، کبالت و نیکل و البته ده ها آلیاژ دیگر که در رده فرومغناطیس ها قرار می گیرند، دارای این خاصیت هستند که اتم ها و مولکول های آنها دارای دوقطبی مغناطیسی دائمی هستند. این دوقطبی مغناطیسی را برای اتم i با بردار S_i نشان می دهیم. فرومغناطیس ها دارای این خاصیت هستند که در آنها دوقطبی های مجاور تمایل دارند که هم جهت شوند به عبارت دیگر انرژی برهم کنش این دوقطبی ها وقتی به کمترین مقدار خود می رسد که دوقطبی ها هم جهت شوند.



شکل ۱: مغناطش ماکروسکوپی در یک ماده فرومغناطیسی بر حسب دما در میدان های مغناطیسی متفاوت. در اینجا M اندازه بردار مغناطش و B اندازه بردار میدان مغناطیسی است.

در ساده ترین حالت هامیلتونی این سیستم با عبارت زیر داده می شود:

$$H = - \sum_{i,j} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \mathbf{B} \cdot \sum_i \mathbf{S}_i \quad (۱)$$

که در آن و J_{ij} ضرایب برهم کنش و مثبت است. در غیاب میدان مغناطیسی این هامیلتونی دارای تقارن است به این معنا که انرژی هر هیئت با دوران همه اسپین ها به یک اندازه تغییر نمی کند، یعنی

$$H(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_N) = H(R\mathbf{S}_1, R\mathbf{S}_2, \dots, R\mathbf{S}_N), \quad (۲)$$

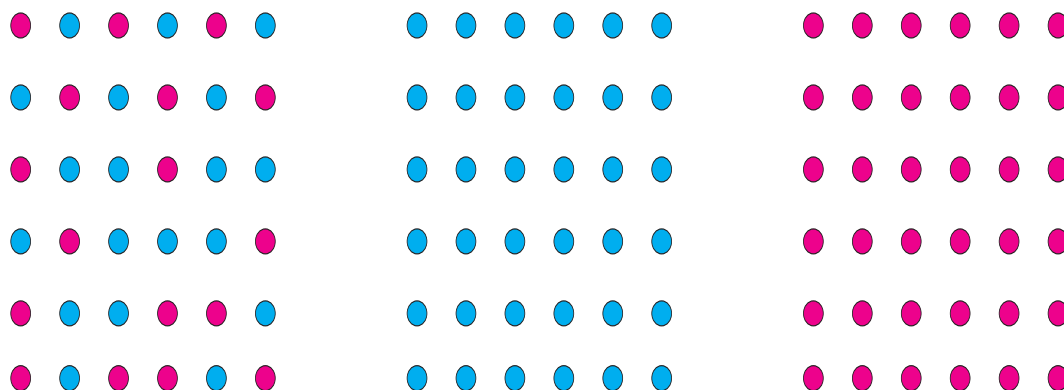
که در آن R یک ماتریس دوران متعلق به گروه $SO(3)$ است. حالت تعادل چنین سیستمی با کمینه کردن انرژی آزاد همپهلوتز یعنی $F = E - TS$ حاصل می شود. در دمای غیر صفر این کمینه کردن با ایجاد توازن بین دو عامل متضاد صورت می پذیرد، یکی کم کردن انرژی که در آن میدان مغناطیسی خارجی نقش ایفا می کند چرا که دوقطبی ها را با جهت خود همراستا می کند و دیگری با افزایش انتروپی که در آن دما و بی نظمی حاصل از افت و خیز گرمایی نقش ایفا می کند. حاصل این توازن باعث ایجاد یک مغناطش ماکروسکوپی در کل ماده می شود. هر چه دما را کمتر کنیم مقدار این مغناطش بیشتر می شود. در غیاب میدان مغناطیسی هیچ جهت مرجحی در فضا وجود ندارد و انتظار داریم که با توجه به تقارن دورانی برهم کنش ها هیچ نوع مغناطش ماکروسکوپی در ماده ظهور نکند، اما بر خلاف انتظار این اتفاق در پایین تر از یک دمای بحرانی که آن را با T_c نشان می دهیم می افتد و دوقطبی ها در یک راستای تصادفی شروع به هم جهت شدن می کنند و مغناطش ماکروسکوپی در ماده ظهور می کند و هر چه که دما را پایین تر بیاوریم اندازه این مغناطش ماکروسکوپی بزرگتر می شود. شکل (۱) نشان دهنده رفتار مغناطش ماکروسکوپی بر حسب دما در میدان های مغناطیسی متفاوت است.

ظهور مغناطش ماکروسکوپی در یک جهت تصادفی به معنای شکستن تقارن دورانی است. اگر یک موجود میکروسکوپی را درون این ماده تصور کنید، پس از پیدایش مغناطش خود بخود یک جهت یگانه را در دنیای اطراف خود می بیند و حول این جهت یگانه هنوز تقارن دورانی وجود دارد. اصطلاحاً می گوییم که تقارن گروه $SO(3)$ ، به تقارن زیر گروه آن یعنی $SO(2)$ شکسته شده است. پارامتر نظم در این جا همان مغناطش ماکروسکوپی یا $\mathbf{M} := \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{S}_i \rangle$ است که در آن علامت $\langle A \rangle$ به معنای متوسط آماری در حال تعادل است:

$$\langle A \rangle := \frac{1}{Z} \int d\mathbf{S}_1 \dots d\mathbf{S}_N A e^{-\beta H}. \quad (۳)$$

در نظر گرفت. دقت در عبارت بالا نشان می دهد که وقتی میدان مغناطیسی صفر است، به دلیل تقارن کروی می بایست $\mathbf{M}$ همواره مساوی صفر باشد. صفر نشدن این عبارت در غیاب میدان مغناطیسی به معنای شکستن آن تقارن است.

■ شکست تقارن



شکل ۲: فازهای مختلف در یک ماده فرومغناطیس: سمت چپ: فاز بی نظم، وسط فازی که در آن مغناطش مقدار مثبت یک دارد، سمت راست فازی که مغناطش مقدار منفی یک دارد. در اینجا برای سادگی فرض کرده ایم که دوقطبی مغناطیسی یک بردار نیست بلکه یک کمیت عددی است که مقدار آن یک یا منهای یک است. در بعضی از مواد یک نوع ناهمسانگری قوی وجود دارد به طوری که دو قطبی ها فقط یک جهت مثبت یا منفی در یک راستای مرجع دارند. این راستای مرجع توسط ساختار کریستالی ماده تعیین شده است. در این گونه مواد تقارن نسبت به دو جهتی که در راستای این امتداد وجود دارد به نفع یکی از این دو جهت شکسته شده است.

آنچه که در این مثل دیدیم نخستین نمونه از پدیده ای است که آن را شکست خودبخود تقارن^۵ می نامیم. به این معنا که برهم کنش های بنیادی بین ذرات تقارنی دارند (مثلا تقارن کروی) که این تقارن هیچ جهتی را نسبت به جهات دیگر برتر نمی داند اما با وجود این تقارن ، نهایتا مجموعه ذرات و همبستگی بین آنها باعث می شود که همگی راستایی را انتخاب کنند و در آن راستا منظم شوند. بوضوح این انتخاب و این ترجیح با آن تقارن بنیادی منافات دارد. برای درک اهمیت این پدیده به این مثال توجه کنیم:

دانش آموزانی را در نظر بگیرید که همواره میل به شلوغی دارند و در یک میدان بزرگ دایره ای شکل که همه جهت هایش از هر نظر با هم یکسان اند، بدون مربی و معلم رها شده اند. وقتی می بینیم که این دانش آموزان خود به خود در جهت خاصی یک صف واحد تشکیل می دهند می بایست بی نهایت شگفت زده شویم و از خود بپرسیم چه عاملی باعث شده این دانش آموزان آن جهت خاص را بر جهات دیگر ترجیح دهند؟ چرا آن تقارن دایره ای «شکسته» شده است؟ چرا علیرغم آن افت و خیزهای فردی دانش آموزان این نظم در آنها پدیدار شده است؟ چرا دانش آموزان از فاز «نامنظم» به فاز «منظم» رفته اند و «تغییر فاز» داده اند؟ در حالی که هر دانش آموزی تنها با چند دانش آموز نزدیک خود حرف می زند چگونه چنین «نظم بلندبردی» در مجموعه دانشجویان شکل گرفته؟ این نظم تا کجاها امتداد دارد؟ این طول همبستگی چگونه با افزایش افت و خیزهای

^۵Spontaneous Symmetry Breaking

دانش آموزان کم و زیاد می شود؟ در اثر افزایش افت و خیزهای فردی نظم چگونه از بین می رود و چگونه با کاهش آن افت و خیزها پدیدار می شود؟

این پدیده یعنی شکست خود بخود تقارن^۶ در بسیاری از گذار فازها وجود دارد. البته باید توجه داشت که بعضی از گذار فازها نیز چنین پدیده ای را از خود نشان نمی دهند مثل تبدیل بخار به آب که در هر دو مورد تقارن کروی وجود دارد. هم چنین اخیراً نیز دسته ای از گذار فازها موسوم به گذار فاز توپولوژیک کشف شده اند که همراه با شکست تقارن نیستند.

۲.۲ گذار فاز بخار مایع

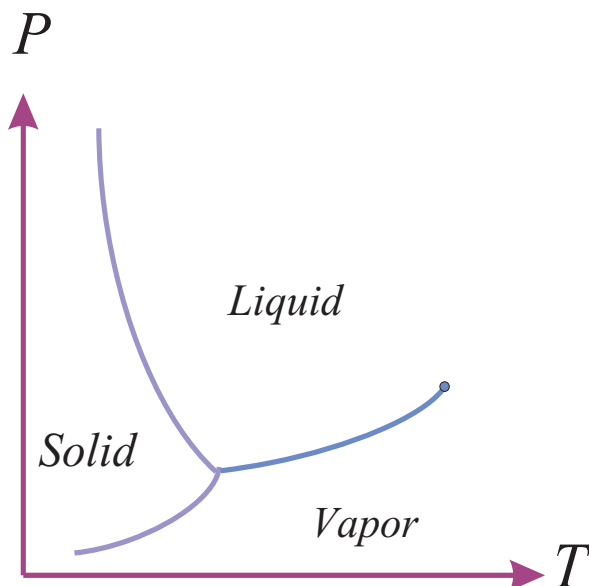
شکل های (۳) و (۴) دیاگرام فاز یک مایع معمولی مثل آب را نشان می دهند.

در این شکل ناحیه های یخ، آب و بخار مشخص شده اند. این دیاگرام در واقع مقطع حجم ثابت از یک شکل سه بعدی است که به طور کامل نشان می دهد در هر مقداری از دما، حجم و فشار آب در چه فازی قرار دارد. منحنی های رسم شده در شکل (۳) در واقع ناحیه های همزیستی فازهای متفاوت هستند. به عنوان مثال در شکل (۴) منحنی AB ناحیه همزیستی بخار و آب را نشان می دهد. عبور از این خطها همواره با آزاد شدن یا جذب گرمای نهان همراه است. به تدریج که در طول این خط بالا می رویم و به نقطه B می رسیم پهنای ناحیه همزیستی کم تر و کم تر شده و در نقطه B (در دمای $T_c = 647^\circ$ و فشار $P_c = 218 \text{ Atm}$) این پهنای دقیقاً صفر می شود. پارامتر نظم در این نوع گذار فاز تفاوت بین چگالی مایع و بخار است یعنی $v_l - v_g$. برای این نوع گذار فاز نقطه بحرانی با دمای $T_c = 647^\circ$ و فشار $P_c = 218 \text{ Atm}$ مشخص می شود. برای اینکه تشابه این دیاگرام را با دیاگرام هایی که در مورد گذار فاز فرومغناطیسی و پادفرومغناطیسی داشتیم بفهمیم بهتر است این دیاگرام را از یک جهت دیگر نگاه کنیم. در این صورت شکل (؟؟) حاصل خواهد شد:

پارامتر نظم در این جا اختلاف چگالی بین مایع و بخار یا اختلاف حجم مولی آنها یعنی $v_l - v_g$ است. این پارامتر نظم جایگزین مغناطش متوسط در مدل های فرومغناطیسی شده است. نقش میدان مغناطیسی خارجی را نیز $P - P_c$ بازی می کند. همه پارامترها و مشاهده پذیرها را بین این مدل می توان براحتی با هم متناظر کرد.

■ **تمرین:** متناظر با ضرب نفوذ پذیری مغناطیسی در فرومغناطیس چه کمیتی در مایعات داریم؟

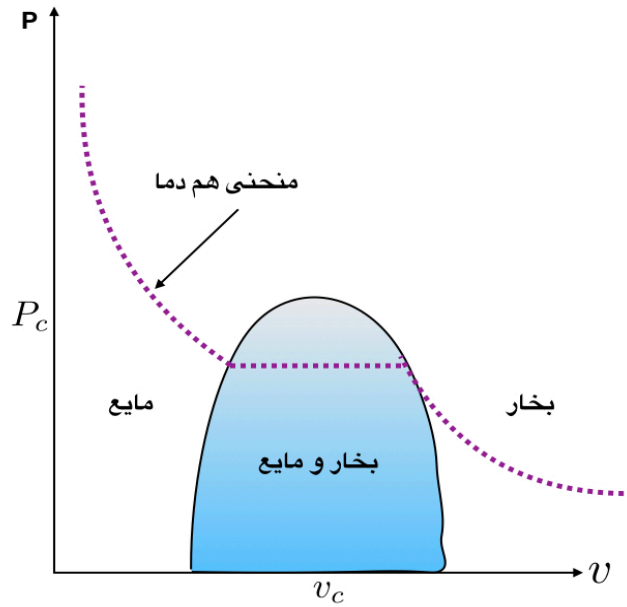
Spontaneous Symmetry Breaking^۹



شکل ۳: دیاگرام فاز مایع - در حجم ثابت. محور افقی دما و محور عمودی فشار است. هرکدام از منحنی های آبی رنگ در واقع یک ناحیه همزیستی را بین دو فاز را نشان می دهد. در شکل سه بعدی هر کدام از این منحنی ها نشان دهنده یک ناحیه هستند. در امتداد هر کدام از منحنی ها گذار فاز مرتبه یک بین دو فاز انجام می شود. این نوع گذار فاز همراه با گرمای نهان است و پارامتر نظم (چگالی) به طور ناپیوسته از یک فاز به فاز دیگر تغییر می کند. هم چنان که در امتداد هر کدام از این منحنی ها بالا می رویم حجم این ناحیه کوچک تر می شود. ناحیه همزیستی بین بخار و مایع در نقطه انتهایی این منحنی تمام می شود. در بالاتر از این نقطه گذار فاز بین دو فاز مرتبه دو و پیوسته است.

۳.۲ گذار فاز پادفرومغناطیسی

در بعضی از مواد تمایل دوقطبی های مجاور این است که در خلاف جهت هم قرار گیرند. هرگاه شبکه ای که این دوقطبی ها روی آن قرار گرفته اند یک شبکه دوقسمتی^۷ باشد، آنگاه حالت منظم این چنین ماده ای این است که روی یکی از زیرشبکه ها اسپین ها در یک جهت و روی زیرشبکه دیگر اسپین ها در جهت مخالف قرار گرفته باشند. یادآوری می کنیم که یک شبکه دوقسمتی شبکه ای است که از دو زیرشبکه A و B تشکیل شده به قسمتی که هر نقطه روی شبکه A فقط با نقاط شبکه B همسایه نزدیک است و بالعکس. حالت نامنظم برای این ماده این است که اسپین ها مستقل از این که متعلق به کدام زیر شبکه هستند در جهات مختلف قرار می گیرند. در دماهای بالا سیستم کاملاً بی نظم است ولی وقتی که دما را پایین می آوریم در پایین تر از یک دمای بحرانی، نظم خود بخود پدیدار می شود. برای چنین سیستمی نمی توان پارامتر نظم را به همان



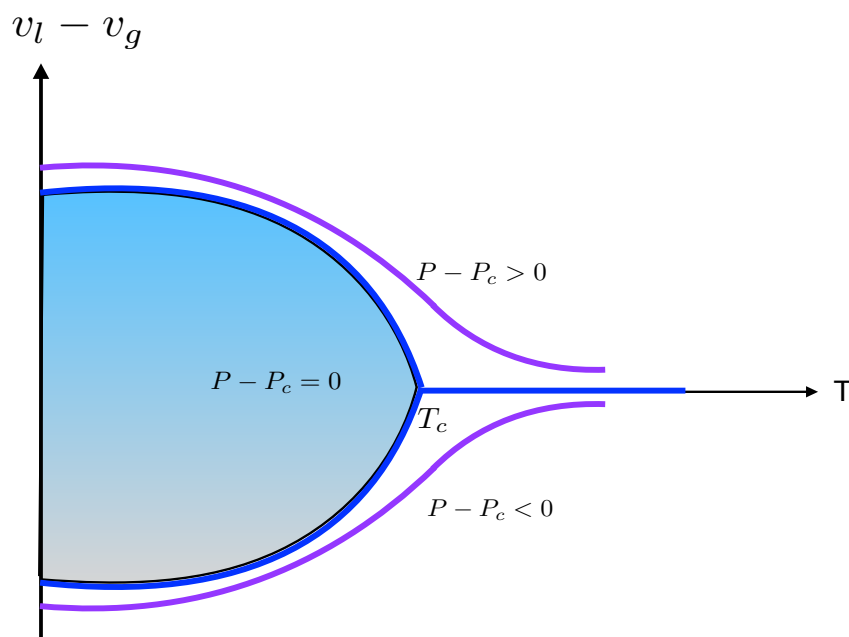
شکل ۴: نمای دیگری از دیاگرام فاز مایع. هرکدام از خطوط سیاه رنگ یک منحنی همدماست. محور افقی نشان دهنده حجم یک مول است. هم چنان که در امتداد هر کدام از این منحنی ها که حرکت می کنیم (با گرم کردن مایع) حجم مایع افزایش می یابد و فشار آن کاهش می یابد. وقتی وارد ناحیه همزیستی می شویم فشار ثابت می ماند و فاز مایع وارد همزیستی با فاز بخار می شود. ناحیه همزیستی بخار و آب در یک جایی تمامی می شود که همان نقطه بحرانی است. اما ناحیه های همزیستی دو فاز دیگر تا به امروز هیچ گونه نقطه بحرانی ای از خود نشان نداده اند.

صورت فرومغناطیس ها تعریف کرد. در واقع اگر تعریف کنیم که $M = \langle \sum_i S_i \rangle$ براحتی معلوم می شود که متوسط M هم در حالت منظم و هم در حالت بی نظم برابر با 0 است. به این ترتیب این کمیت نمی تواند فاز منظم را از فاز بی نظم تشخیص دهد. اما می توانیم یک کمیت دیگر تشکیل دهیم که به آن مغناطش متناوب ^۸ می گوییم. این کمیت به صورت زیر تعریف می شود:

$$M_s := \langle \sum_{i \in A} M_i - \sum_{i \in B} M_i \rangle. \quad (۴)$$

اندازه این بردار در فاز بی نظم برابر با صفر است و در فاز کاملاً منظم بیشینه مقدار خود را پیدا می کند. اگر تعداد نقاط شبکه برابر با N و

^۸ Staggered Magnetization



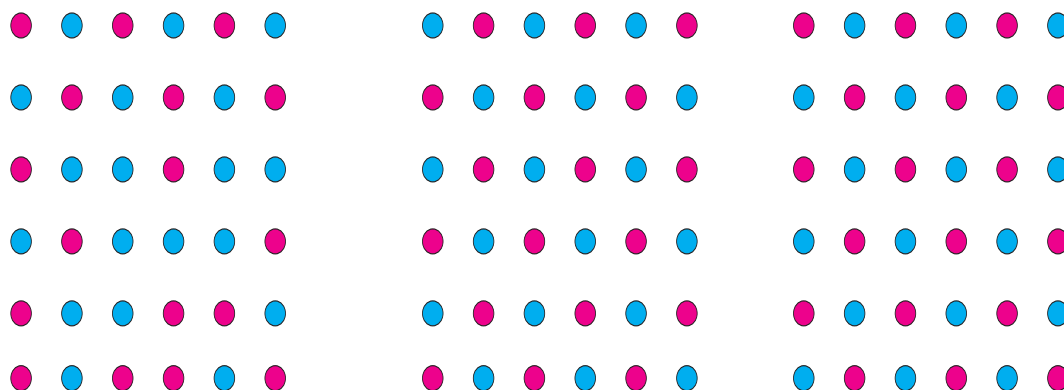
شکل ۵: نمای دیگری از دیاگرام فاز مایع و بخار که نشان دهنده تشابه این دیاگرام با دیاگرام های گذار فاز در یک ماده فرومغناطیسی است وقتی که مغناطش فقط در یک جهت قرار دارد و با یک عدد مشخص می شود.

اندازه هر دوقطبی نیز برابر با 1 باشد مقدار بیشینه M برابر با N خواهد شد.

۴.۲ گذار فاز آیزینگ

در بسیاری از مواد فرومغناطیسی ممکن است ساختار شبکه ای و هم چنین ساختار اوربیتالی اتم ها به گونه ای باشد که تقارن کروی کامل وجود نداشته باشد. انرژی برهم کنش دوقطبی ها در چنین ماده ای به صورت زیر است:

$$\epsilon(\mathbf{S}, \mathbf{S}') = -J_x S_x S'_x - J_y S_y S'_y - J_z S_z S'_z, \quad (5)$$



شکل ۶: فازهای مختلف در یک ماده پادفرومغناطیس. پارامتر نظم در اینجا مغناطش متناوب است. سمت چپ فاز بی نظم را نشان می دهد. وسط فازي که در آن مغناطش متناوب برابر با یک و سمت راست فازي را نشان می دهد که در آن مغناطش متناوب منفی یک است. در اینجا برای سادگی فرض کرده ایم که دوقطبی مغناطیسی یک بردار نیست بلکه یک کمیت عددی است که مقدار آن یک یا منهای یک است. در بعضی از مواد یک نوع ناهمسانگري قوی وجود دارد به طوری که دو قطبی ها فقط یک جهت مثبت یا منفی در یک راستای مرجع دارند. این راستای مرجع توسط ساختار کریستالی ماده تعیین شده است .

که در آن J_x, J_y, J_z شدت برهم کنش ها برای سه مولفه مختلف هستند. در بعضی از این دسته مواد شرط زیر برقرار می شود

$$J_z \gg J_x, J_y$$

که در این صورت می توان با تقریب خیلی خوبی از دو مولفه دیگر به کلی صرف نظر کرد و S را به جای یک کمیت برداری، کمیتی اسکالر در نظر گرفت که اندازه آن یک است (اندازه آن را می توان در ضریب برهم کنش J_z جذب کرد.) در این صورت انرژی بین دو تا دوقطبی با تقریب خیلی خوب به صورت زیر در می آید:

$$\epsilon(S, S') = -JSS', \quad S, S' = \pm 1. \quad (6)$$

این مدل نه تنها نشان دهنده رفتار بسیاری از مواد است بلکه ساده ترین مدل و فراگیرترین مدلی است که برای توصیف پیدایش نظم خود به خود مطالعه شده است. نام این مدل، مدل آیزینگ^۹ است. هامیلتونی این مدل به این صورت است:

Ising Model^۹

$$H = - \sum_{i,j} J_{i,j} S_i S_j - B \sum_i S_i, \quad (7)$$

و پارامتر نظم این سیستم نیز یک پارامتر عددی است و بنابراین با

$$M := \sum_i \langle S_i \rangle. \quad (8)$$

در غیاب میدان مغناطیسی این سیستم دارای تقارن Z_2 است به این معنا

$$H(S_1, S_2, \dots, S_N) = H(-S_1, -S_2, \dots, -S_N), \quad (9)$$

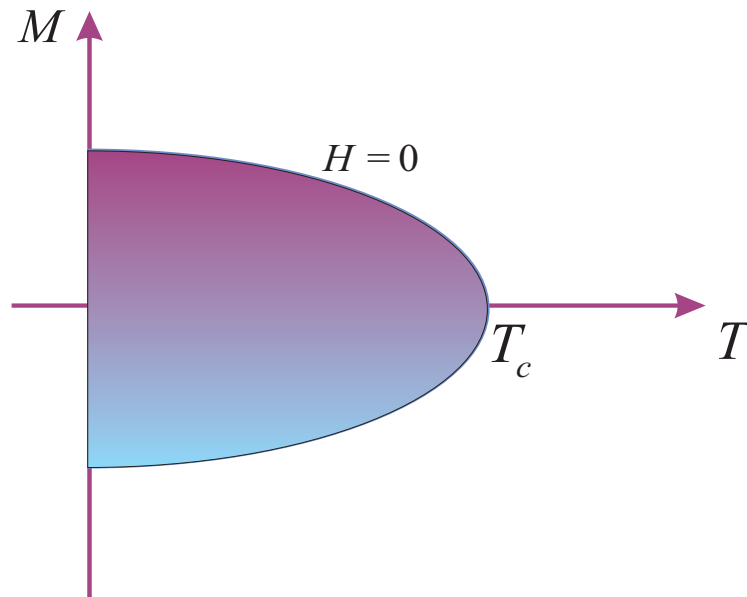
که در نتیجه آن می بایست M برابر با صفر باشد. غیر صفر شدن این پارامتر نظم به معنای شکسته شدن آن تقارن یعنی تقارن گروه Z_2 است. شکل (۴۴) نشان دهنده دیاگرام فاز در مدل آیزینگ است. در این جا با توجه به اینکه پارامتر نظم دیگر یک بردار نیست می توانیم خود M را و نه اندازه آن را رسم کنیم. به همین جهت دیاگرام دو قسمت مثبت و منفی برای M دارد. در میدان صفر با کاهش دما به زیر دمای بحرانی شکست تقارن رخ می دهد و یکی از شاخه های مثبت یا منفی M طی می شود.

مدل آیزینگ علیرغم ظاهر ساده اش مهم ترین مدلی است که برای گذار فاز مورد مطالعه قرار گرفته است چرا که این مدل به سادگی به طیف متنوعی از مدل های دیگر هم در حوزه علوم طبیعی و هم در حوزه های دیگر تبدیل می شود.

۵.۲ گذار فاز آلیاژ دوگانه

آلیاژ دوگانه ^{۱۰} آلیاژی است که از دو نوع فلز که آن ها را در اینجا A و B می نامیم تشکیل شده است. در این جا برای سادگی بحث فرض می کنیم که شبکه ای که این آلیاژ روی آن تشکیل شده است یک شبکه دوقسمتی ^{۱۱} است. ساختار چنین شبکه ای به این صورت است که می توان آن را به دو زیر شبکه مجزا که آنها را نوع ۱ و نوع ۲ می نامیم تقسیم کرد. هر نقطه از زیر شبکه ۱ با نقاط زیر شبکه ۲ همسایه است و بالعکس. به عنوان مثال شبکه مکعبی یک شبکه دوقسمتی است. در دماهای بالا اتم های A بین این دو زیر شبکه تقریباً به طور مساوی تقسیم می شوند. اتم های نوع B نیز به همین نحو تقسیم می شوند. یعنی اگر توجه خود را تنها به یکی از زیر شبکه ها معطوف کنیم به همان اندازه اتم های نوع A در آن می بینیم که اتم های نوع B . اما وقتی که دما را پایین می آوریم یک دمای بحرانی فرا می رسد که پایین تر از آن اتم های نوع A و B بتدریج شروع به جمع شدن در یکی از این زیر شبکه ها می کنند. این نحوه تجمع نیز کاملاً تصادفی است و مثل حالت فرومغناطیس به دو صورت ممکن

^{۱۰} Binary Alloy
^{۱۱} Bi-partite



شکل ۷: مغناطش بر حسب دما در میدان مغناطیسی صفر در مدل آیزینگ: ناحیه رنگ شده ناحیه ای است که دو فاز مغناطش مثبت و منفی با هم همزیستی دارند. نقطه بحرانی نقطه پایان این همزیستی است.

قابل حصول است. با این توصیف ها براحتی می توان حدس زد که پارامتر نظم را چگونه باید تعریف کرد که مقدار آن نشان دهنده مقدار نظم یا بی نظمی موجود در این سیستم باشد. برای این کار تعداد اتم های نوع A و نوع B را در یکی از این زیرشبکه ها مثلا زیر شبکه 1 را با N_A و N_B نشان می دهیم. در حالت بی نظم داریم

$$N_A - N_B = 0 \quad (10)$$

در حالت منظم این تعداد برابر است با

$$N_A - N_B = \pm N \quad (11)$$

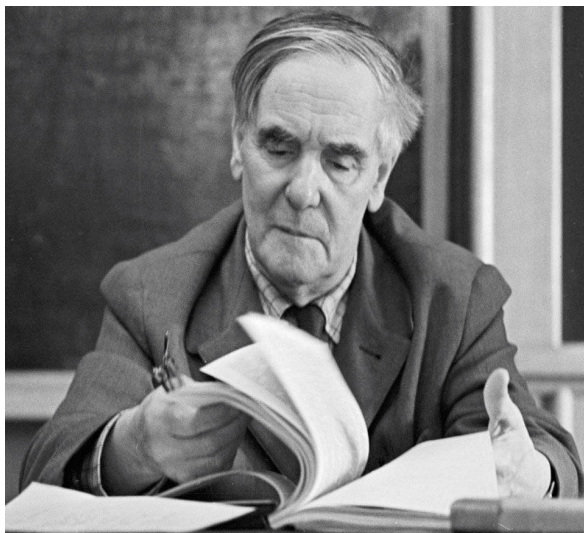
که در آن N تعداد نقاط زیر شبکه 1 است. می توانیم پارامتر نظم را طوری تعریف کنیم که درست شبیه فرومغناطیس باشد بنابراین قرار می دهیم:

$$m := \frac{N_A - N_B}{N} \quad (12)$$

که در نتیجه مقدار این پارامتر نظم در فاز بی نظم برابر با صفر و در فاز کاملاً منظم مقدار ± 1 خواهد بود. برای چنین سیستمی نماهای بحرانی درست مثل سیستم فرومغناطیسی تعریف می شوند با این تفاوت که نقش میدان مغناطیسی را در اینجا فشار ایفا می کند.

۶.۲ گذار فاز هلیوم

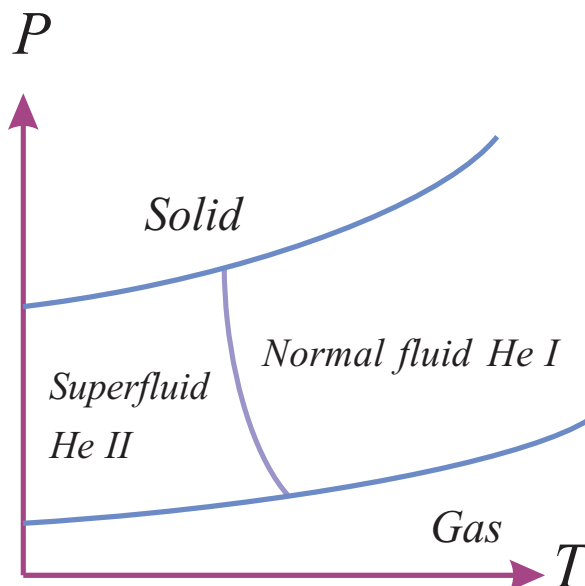
به طور طبیعی اتم های هلیوم در دو ایزوتوپ جداگانه ^3He و ^4He یافت می شوند. هسته ^4He دارای دو نوترون و دو پروتون و هسته ^3He دارای دو پروتون و یک نوترون است. در حالت پایه اتم های هلیوم - چهار بوزون و اتم های هلیوم - سه فرمیون هستند. در دماهای پایین این دو نوع هلیوم از خود گذار فاز نشان می دهند ولی گذار فاز آنها با هم اندکی متفاوت است. نخست گذار فاز هلیوم - چهار را توضیح می دهیم. سپس گذار فاز ابررسانایی را توضیح می دهیم و دست آخر به توضیح گذار فاز هلیوم - سه می پردازیم که توضیح آن متکی است بر آنچه که در مورد ابررسانایی خواهیم آموخت.



شکل ۸: پیوتر کاپیتزا، فیزیکدان روس و کاشف ابرشارگی

۷.۲ گذار فاز ^4He

در دماهای بالاتر از حدود ۲ درجه کلوین هلیوم چهار یک مایع معمولی است که مثل همه مایعات دیگر مقدار معینی ویسکوزیته یا گرانروی دارد. وقتی که دما به زیر این مقدار می رسد (که البته مقدار دقیق اش به فشار بستگی دارد) یک فاز دیگر از مایع هلیوم شروع به پیدایش می کند درست



شکل ۹: دیاگرام فاز در ابرشاره هلیوم

همانگونه که با پایین تر رفتن از دمای بحرانی در آب بخار شروع به پیدایش می کند. این فاز دیگر مایعی است که گرانی از صفر است. با کاهش بازهم بیشتر دما حجم این مایع که به آن ابرشاره می گوئیم نسبت به مایع معمولی افزایش یافته و سرانجام کل مایع ابرشاره می شود. در واقع این پدیده همان چیزی است که در مکانیک آماری به آن چگالش بوز-اینشتین^{۱۲} می گویند. وقتی که دما از یک دمای بحرانی پایین تر می آید کسر قابل توجهی از اتم ها همه به یک حالت پایه می روند. اتم های ابرشاره در این حالت نکانه خیلی کم و در نتیجه طول موج دو بروی خیلی زیادی دارند. این طول موج زیاد باعث حرکت هماهنگ همه اتم ها با هم و در نتیجه کاهش شدید گرانی و اصطکاک می شود. این گذار فاز یک گذار فاز پیوسته است. پارامتر نظم آن یک کمیت مختلط مثل $\psi(x)$ است که در واقع دامنه احتمال این است که ذره ای که در نقطه x قرار دارد در حالت پایه چگالیده شده باشد. مشابه با گذار فاز فرومغناطیسی که پارامتر نظم آن یعنی $m(x)$ می تواند یکنواخت باشد که در این صورت آن را با m نشان می دهیم، در این جا هم پارامتر موضعی نظم می تواند به صورت یکنواخت درآید که در آن صورت فقط یک عدد مختلط به صورت ψ خواهد بود. این عدد مختلط هم فاز و هم اندازه اش پارامتر نظم را مشخص می کنند. اما هامیلتونی این سیستم آنچنان است که تنها به اندازه $\psi(x)$ بستگی دارد به عبارت دیگر هامیلتونی این سیستم نسبت به تبدیل

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha}\psi(x) \quad (۱۳)$$

^{۱۲}Bose Einstein Condensation

تقارن دارد و مقدار متوسط پارامتر نظم در صورتی که تقارن شکسته نشود می بایست برابر با صفر باشد. به همین دلیل وقتی که ابرشارگی رخ می دهد اصطلاحاً می گوئیم که تقارن $U(1)$ شکسته شده است.

■ **تمرین:** فرض کنید که تابعی هامیلتونی دارای تقارن

$$H[\psi] = H[e^{i\alpha}\psi] \quad (۱۴)$$

باشد. نشان دهید که در این صورت $\langle \psi \rangle = 0$.

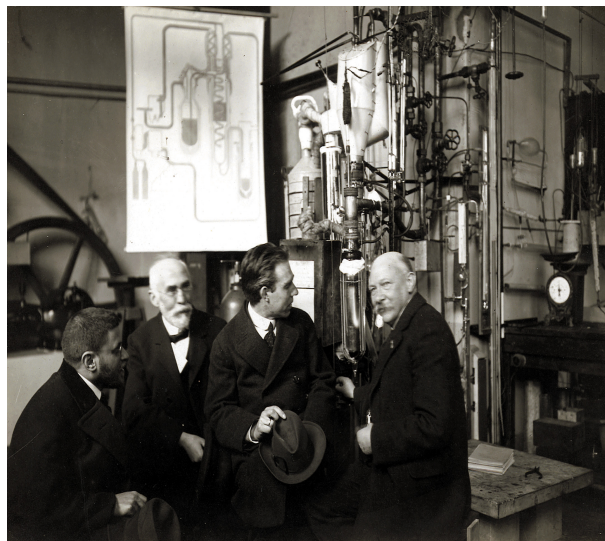
یک نکته در مورد نامگذاری: معمولاً مایع معمولی هلیوم را $Helium - I$ و مایع ابرشاره هلیوم را $Helium - II$ نیز می گویند. بنابراین گذار فازی را که بررسی کردیم می توان گذار فاز $Helium - I \rightarrow Helium - II$ نیز نامید.

۸.۲ گذار فاز 3He

اتم های 3He بر خلاف 4He بوزون نیستند بنابراین چگالش بوز-اینشتین برای تک - تک اتم ها رخ نمی دهد. اگر چنین است چگونه می توان ابرشارگی را در هلیوم -۳ توضیح داد؟ پاسخ این است که در اینجا نیز درست مثل ابرسانایی اتم های 3He باهم جفت شده و شبه ذراتی بوزن تولید می کنند. چگالش این شبه ذرات بوزونی است که باعث پیدایش ابرشارگی می شود. حال سوال این است که در غیاب شبکه جامد یا فونون ها چه چیزی باعث جفت شدن اتم های هلیوم -۳ می شود. پاسخ این است که نیروی واندروالس این کار را به عهده می گیرد. پتانسیل واندروالس سعی می کند که اتم ها را به هم نزدیک کند. چنانچه اتم ها دارای تکانه زاویه ای زیاد باشند اتم ها به هم نزدیک شده ولی روی هم نمی افتند بلکه به دور هم می چرخند. یک تفاوت با ابرشارگی این است که در این حالت اسپین اتم ها مجموع اش برابر با 1 است. هم چنین تکانه زاویه ای اوربیتالی هر دو اتم نیز برابر است با $l = 1$. در نتیجه تکانه زاویه ای کل که آن را با j نشان می دهیم می تواند مقادیر 0، 1 یا 2 را اختیار کند. وقتی که چگالش رخ می دهد حالت کل سیستم با همان اعداد کوانتومی حالت پایه که همه اتم ها در آن چگالیده شده اند توصیف می شود. این اعداد کوانتومی عبارتند از تکانه زاویه ای کل که مقدار $j = 0, 1, 2$ را اختیار می کند و عدد کوانتومی m که بسته به مقدار j ، $2j + 1$ مقدار را اختیار می کند. بنابراین یک حالت پایه با پارامترهای $|j, m\rangle$ مشخص می شود. به این ترتیب پارامتر نظم عبارت است از $\psi_{j,m}(x)$ که دامنه احتمال این است که ذرات حول و حوش نقطه x در حالت j, m چگالیده شده باشند. بازهم می توان نشان داد که هامیلتونی این سیستم تحت تبدیلات $\psi_{j,m} \rightarrow e^{i\alpha}\psi_{j,m}(x)$ دارای تقارن است و بنابراین وقتی که متوسط این پارامتر نظم مقدار غیر صفر اختیار می کند به این معناست که تقارن $U(1)$ شکسته شده است. پیچیدگی پارامتر نظم در این پدیده یک نتیجه دیگر هم در بر دارد و آن اینکه دیاگرام فاز هلیوم - سه می تواند خیلی پیچیده و شامل فازهای گوناگون باشد.

۹.۲ گذار فاز ابررسانایی

این گذار فاز نخستین بار توسط فیزیکدان هلندی *CamerlinOnnes* و در سال ۱۹۱۱ میلادی کشف شد.



شکل ۱۰: کامرلینگ اونس فیزیکدان هلندی که نخستین بار پدیده ابررسانایی را مشاهده کرد. در این عکس او در کنار نیلز بوهر، آنتوان لورنتز و پاوول اهرنفست دیده می شود.

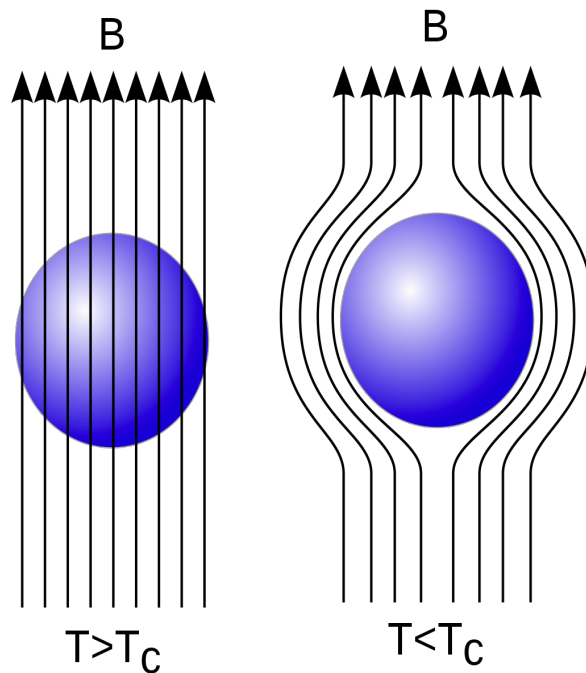
وی مشاهده کرد که مقاومت ویژه فلز جیوه وقتی که دما به زیر ۲.۴ کلوین می رسد، به ناگهان صفر می شود. اصطلاحاً گفته می شود که یک گذار فاز از حالت فلز به حالت ابررسانا رخ داده است. از آن موقع تا کنون این پدیده در بسیاری دیگر از فلزات نیز مشاهده شده است. امروزه فهرست بلندبالایی از این نوع گذار فاز ها وجود دارد که همگی تحت عنوان ابررسانایی دمای پایین مطالعه می شوند. مکانیزم این نوع ابررسانایی یک مکانیزم شناخته شده است که نخستین بار توسط باردین، کوپر و شریف^{۱۳} در ۱۹۵۴ ارائه شده و به مکانیزم *BCS* مشهور است. این مکانیزم بسیار شبیه مکانیزم ابرشارگی در هلیوم - چهار است. در یک فلز معمولی حتی اگر ناخالصی و نقص های شبکه ای نداشته باشد، الکترون ها در اثر برخورد با فونون ها (یعنی کوانتوم های ارتعاشات شبکه) مرتباً پراکنده می شوند و این پراکندگی ها باعث می شود که فلزات رسانندگی محدودی برای الکتریسته داشته باشند. طول پویس آزاد میانگین برای الکترون ها در چنین شرایطی از محدوده چند یا چند ده آنگستروم فراتر نمی رود. توضیح *BCS* برای پدیده ابررسانایی این است که الکترون ها در دماهای پایین مطابق با سازوکاری به صورت جفت هایی درمی آیند که باهم وابسته هستند و تشکی یک شبه ذره بوزونی می دهند. این وابستگی البته به این معنا نیست که یک جفت الکترون در یک مکان قرار می گیرند بلکه

^{۱۳} Bardeen, Cooper, Schriffer



شکل ۱۱: باردین، شریف و کوپر، فیزیکدانانی که اولین بار توانستند پدیده ابرسانایی را از لحاظ نظری توضیح دهند.

به این معناست که فونون ها واسطه می شوند و به کمک آنها یک جفت الکترون با اسپین بالا و پایین ولی با تکانه های متفاوت باهم هماهنگ می شوند. با پایین آمدن دما از یک حد بحرانی این شبه ذرات که به جفت های کوپر معروفند دچار چگالش بوز-اینشتین می شوند و طول موج دوبروی آنها بسیار بزرگ می شود. این بزرگ شدن طول موج دوبروی باعث مصونیت آنها از پراکندگی های بیشمار از فونون های شبکه می شوند و می توانند به سلامت از یک نقطه فلز به نقطه دیگر حرکت کرده و الکتریسته را هدایت کنند. پارامتر نظم در ابرسانا را نیز می توان با یک تابع مختلط به صورت $\phi(x)$ نشان داد. گذار فاز در پدیده ابرسانایی نیز مترادف با شکست تقارن $U(1)$ است.

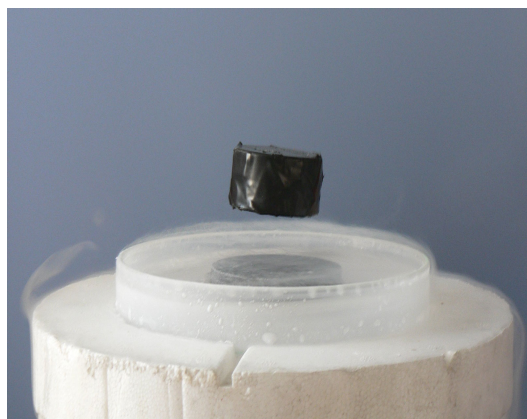


شکل ۱۲: اثر میزنر که بر مبنای آن وقتی ماده ای ابررسانا می شود خطوط میدان مغناطیسی را از خود دفع می کند.

۱۰.۲ تراوش

تراوش^{۱۴} یکی از رایج ترین پدیده های گذار فاز است که مطالعه آن نیز کاربردهای زیادی در طبیعت و فناوری دارد. مثال زیر را در نظر بگیرید. بین دو سطح مطابق شکل (۱۴) شبکه ای از سیم های رسانا را قرار داده ایم. جریان الکتریکی از سطح بالا به سطح پایین برقرار است. حال شروع به قطع قطعه سیم ها می کنیم به این صورت که با احتمال p یک سیم را قطع می کنیم و با احتمال $1 - p$ قطعه سیم را نگاه می داریم. سوال این است: به ازای چه مقداری از p جریان قطع می شود؟ این سوال به این معناست که به ازای چه مقداری از p دیگر یک مسیر بلند از سطح بالا به سطح پایین وجود ندارد؟ در واقع به ازای p های بزرگ شبکه سیم ها از جزیره های کوچک به هم پیوسته تشکیل می شود ولی با کوچک کردن p لحظه ای فرا می رسد که جزیره ای ماکروسکوپی (هرچند متخلخل) که سطح بالایی را به سطح پایینی متصل می کند تشکیل می شود. این لحظه ای است که جریان برقرار می شود. این آزمایش را می توان با شبکه هایی در ابعاد مختلف، و هم چنین با هندسه های متفاوت انجام داد.

^{۱۴}Percolation



شکل ۱۳: مهمترین نشانه ابرسانایی اثر میزرنر است که بر مبنای آن یک ابرسانا خطوط میدان مغناطیسی را از خود دفع می کند. همین پدیده باعث معلق شدن فلزات بر بالای یک ابرسانا می شود. این پدیده حتی در قطارهای سریع السیر برای از بین بردن اصطکاک بین قطار و ریل های راه آهن مورد استفاده واقع می شود.

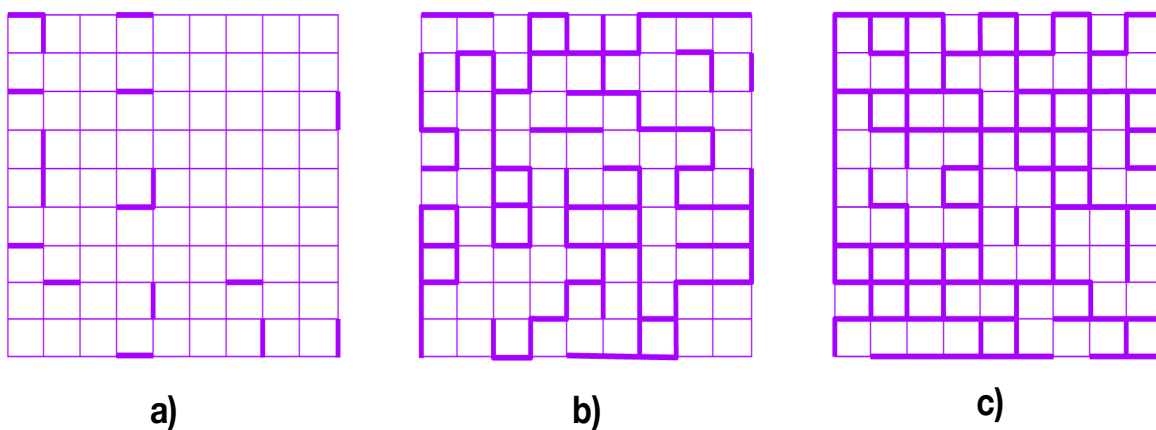
نمونه ای دیگر از این پدیده وقتی است که از خود می پرسیم یک بستر شنی یا خاکی تا چه اندازه می بایست متخلخل باشد تا آب باران بتواند از درون آن نفوذ کند و به مخزن های آب زیرزمینی برسد. نمونه دیگرش وقتی است که از گسترش یک اپیدمی و یا به گسترش یک خبر و شکل گیری یک ایده در جامعه نگاه می کنیم. این مثال ها نشان دهنده اهمیت پدیده تراوش در زمینه های گوناگون است. آنچه که در مثال بالا ذکر کردیم چیزی است که به آن تراوش اتصال ها^{۱۵} گفته می شود. در این جا با افت و خیز دمایی سروکار نداریم و به همین جهت به جای دمای بحرانی از احتمال بحرانی یا p_c برای توصیف گذار فاز استفاده می کنیم. برای وقتی که شبکه مربعی و دوبعدی است محاسبه تحلیلی نشان می دهد که $p_c = \frac{1}{2}$ است. محاسبه دقیق هم چنین برای شبکه بته^{۱۶} نیز ممکن است. شبکه بته یک شبکه درختی بی نهایت بزرگ است که در آن از هر نقطه تعداد z تا نقطه دیگر منشعب می شود. برای چنین شبکه ای نشان داده شده است که $p_c = \frac{1}{z-1}$. در موارد دیگر p_c به صورت عددی تعیین می شود.

نوع دیگری از تراوش وقتی رخ می دهد که به جای قطع کردن اضلاع شبکه هر راس شبکه و اضلاع متصل به آن را قطع می کنیم. این نوع تراوش،

^{۱۵}Bond Percolation

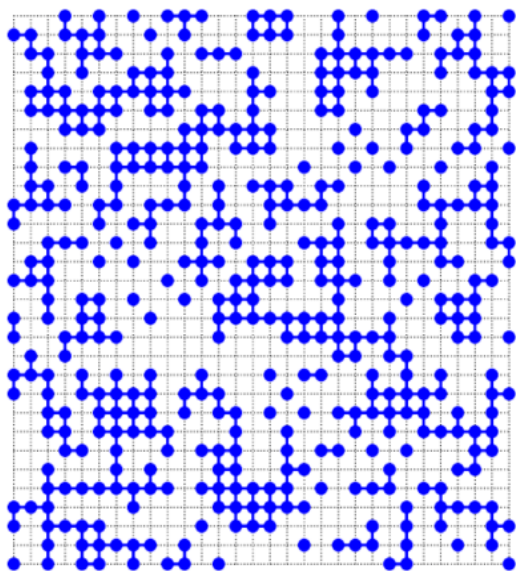
^{۱۶}Bethe Lattice

تراوش جایگاه^{۱۷} نامیده می شود و برای این نوع تراوش احتمال بحرانی متفاوت است.

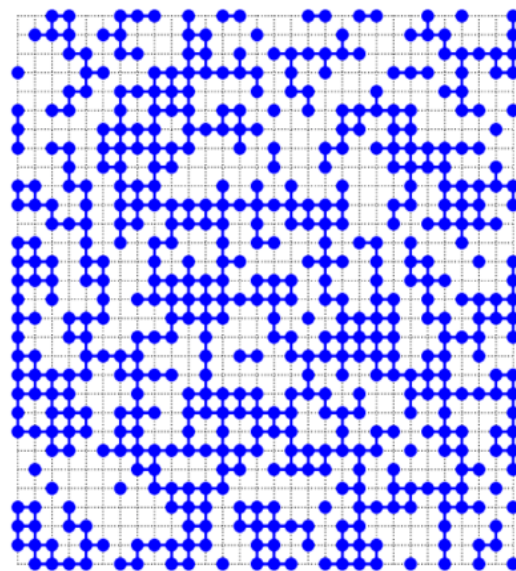


شکل ۱۴: تراوش اتصالات. هر اتصال با احتمال p می تواند برقرار و با احتمال $1 - p$ قطع باشد. با افزایش p به نقطه آستانه ای مثل p_c می رسیم که در آن یک جزیره ماکروسکوپی از اتصالات برقرار شده و جریان را بین دو صفحه بالایی و پایینی برقرار می کند.

Percolation Site^{۱۷}



a)



b)

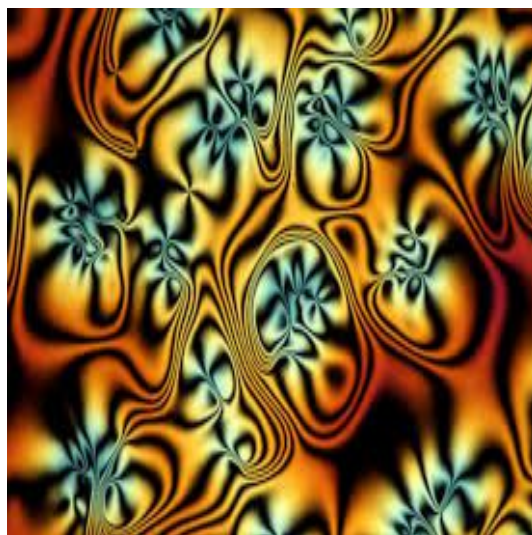
شکل ۱۵: تراوش جایگاه ها: هر جایگاه و اتصالاتش با احتمال p می تواند حضور داشته و با احتمال $1 - p$ غایب باشد. با افزایش p به نقطه آستانه ای مثل p_c می رسیم که در آن یک جزیره ماکروسکوپی از نقاط و اتصالات برقرار شده و جریان را بین دو صفحه بالایی و پایینی برقرار می کند.

۱۱.۲ بلورهای مایع

بلورهای مایع^{۱۸} حالتی از ماده هستند که خواصی بین مایع و جامد دارند. به عنوان مثال می توانند مثل مایعات جاری شوند اما مولکولهای آنها ساختاری بلوری مثل جامدات داشته باشند. بلورهای مایع هم در طبیعت یافت می شوند مثل بعضی از پروتئینها، ویروس ها و دیواره بعضی از سلولها و هم به وفور نیز در تکنولوژی های امروزه دیده می شوند. آنچه که کاربرد بلورهای مایع را در گستره وسیعی از فناوری های امروزه شایع

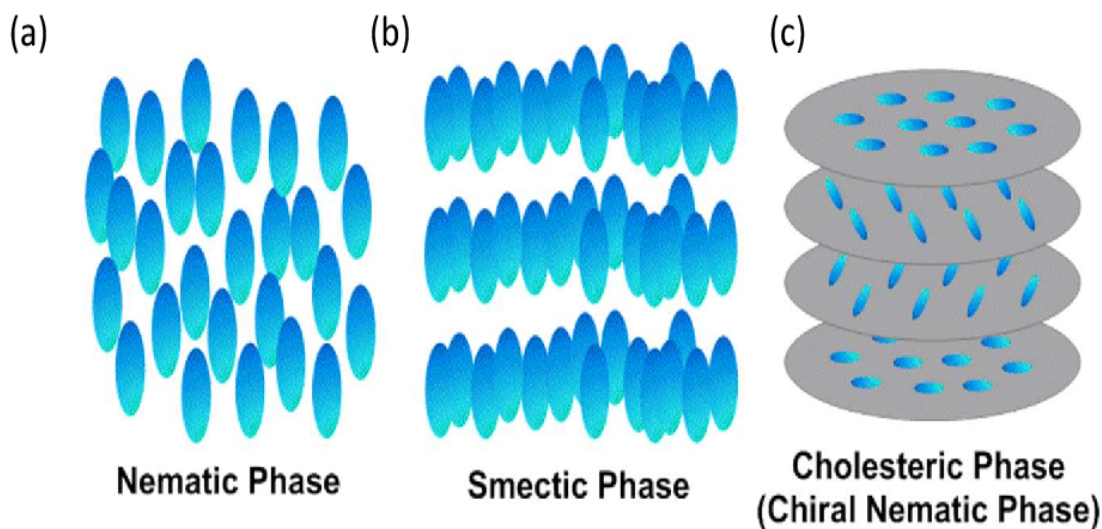
^{۱۸}Liquid Crystals

کرده طیف گسترده ای است از فازهایی که یک بلور مایع می تواند در آن قرار گیرد و بسته به نوع این فاز ها نیز خواص اپتیکی متفاوتی از خود بروز می دهند، شکل (۱۶).



شکل ۱۶: بلورمایع می تواند در گستره وسیعی از فازهای متفاوت قرار بگیرد که هر کدام خاصیت اپتیکی متفاوتی دارند.

این خواص اپتیکی متفاوت همان چیزی است که به کاربرد وسیع بلورهای مایع در فناوری به خصوص در صفحات نمایشگرها می انجامد. ما فقط به چند نوع خاص از این فازها اشاره می کنیم. خواننده علاقمند می بایست به کتاب های مختص این موضوع مراجعه کند تا مطالب بیشتری یاد بگیرد. اگر مجموعه ای از مولکولهای میله ای شکل در نظر بگیریم به طور طبیعی می توانیم تصور کنیم که این مجموعه مولکولها می توانند به شکل های گوناگونی کنار هم قرار بگیرند به گونه ای که هم خواصی شبیه مایعات داشته باشند و هم نوعی نظم بلورگونه به نمایش بگذارند. نمونه ای از این فازها در شکل (۱۷) نشان داده شده است. در شکل (a) فاز نماتیک نشان داده شده که در آن ها مولکول ها در امتداد محور خود مرتب شده اند ولی مرکز جرم آنها هیچ نظمی ندارد و مولکولها می توانند روی هم بلغزند و مثل مایع جاری شوند. شکل (b) فاز اسمکتیک را نشان می دهد که در آن علاوه بر اینکه مولکولها یک نظم بلوری از نظر راستای خود دارند در صفحاتی عمود بر این میله نیز مرتب شده اند. هم چنان در هر صفحه مولکولها می توانند بلغزند و مثل مایع رفتار کنند. می توان فاز دیگری را نیز تصور کرد که در این شکل نیامده و آن وقتی است که صفحات فوق عمود بر محور میله نیستند. شکل (c) حالتی را نشان می دهد که امتداد میله ها عمود بر صفحه ها نیست بلکه موازی با صفحه هاست و در هر صفحه نیز مولکولها در یک جهت خاص مرتب شده اند. هم چنان در هر صفحه مولکولها مثل مایع رفتار می کنند.



شکل ۱۷: چند نمونه از فازهای یک بلورمایع.

مسئله با توجه به پیچیدگی فازهای یک بلورمایع تعریف یک پارامتر نظم ساده که بتواند همه این فازها را از هم تمیز بدهد کار بسیار سخت و چه بسا غیرمفیدی باشد. اما می توان پارامتر نظم ساده ای تعریف کرد که بعضی از فازها را متمایز کند. به عنوان مثال برای اینکه تشخیص دهیم آیا مولکولها در راستای محور خود منظم شده اند یا خیر می توانیم پارامتر نظم زیر را تعریف کنیم:

$$S = \langle (\hat{n} \cdot \hat{m})^2 \rangle = \langle \cos^2 \theta \rangle, \quad (15)$$

که در آن $\hat{n}$ یک محور مشخص و $\hat{m}$ برداری که ای در راستای مولکول است. این پارامتر به وضوح با پارامتر نظم مغناطیسی متفاوت است و در آن از $\cos^2 \theta$ به جای $\cos \theta$ استفاده شده است چرا که تنها امتداد مولکول اهمیت دارد و نه جهت آن. با تغییر جهت $\hat{n}$ می توان تشخیص داد که آیا مولکولها واقعا در یک امتداد مرتب شده اند یا اینکه کاملاً نا مرتب اند.

۳ نکاتی کلی در باره گذار فاز

چند نکته مهم در باره گذارفازها را یادآوری می کنیم.

۱.۳ طبقه بندی گذارهای فاز

نخستین بار پاول اهرنفست^{۱۹} سعی کرده که گذار فازها را طبقه بندی کند. می دانیم که در هر گذار فازی یک یا چند کمیت ترمودینامیکی به طور ناپیوسته تغییر می کنند. از آنجا که کمیت های ترمودینامیکی همگی از مشتق تابع انرژی آزاد یعنی $F := -kT \ln Z$ نسبت به یکی از متغیرهایش پدید می آیند، پس این تغییرات ناپیوسته ناشی از مشتق ناپذیری تابع F یا یکی دیگر از پتانسیل های ترمودینامیکی نسبت به یکی از این متغیرهاست. به عنوان مثال در گذار فاز بخار به مایع ناپیوستگی در فشار یعنی $P = -(\frac{\partial F}{\partial V})_T$ به معنای مشتق ناپذیر بودن تابع انرژی آزاد نسبت به حجم است. یا در گذار فاز فرومغناطیسی ناپیوستگی در $M := -(\frac{\partial F}{\partial H})_T$ ناشی از این است که مشتق ناپذیری تابع انرژی آزاد بر حسب میدان مغناطیسی است. اما این مشتق ناپذیری از درجه یک نیست چرا که نفوذپذیری مغناطیسی یعنی $\chi = (\frac{\partial M}{\partial H})_T$ نیز رفتار ناپیوسته ای از خود نشان می دهد. بنابراین در طبقه بندی اهرنفست گذارفازها بسته به رفتار تابع انرژی آزاد به گذارفازهای مرتبه یک و دو و بالاتر تقسیم می شوند. گذار فاز مرتبه یک گذارفازی است که در آن مشتق اول تابع انرژی آزاد ناپیوسته است ولی مشتق های بالاتر پیوسته هستند. گذار فاز دوم به گذارفازی گفته می شود که مشتق اول و دوم تابع انرژی آزاد ناپیوسته هستند ولی مشتق های بالاتر پیوسته هستند و الی آخر. امروزه این تقسیم بندی گذارفازها دیگر معمول نیست، یکی از دلایل اش این است که گذارفازهای درجه سه و چهار و نظایر آن دیده نمی شود. در عوض گذارفازها به دو دسته کلی تقسیم می شوند. گذار فازهای نوع اول که همواره با مبادله گرمای نهان^{۲۰} همراه هستند (مثل جوشیدن آب یا یخ بستن آن) و گذارفازهای پیوسته^{۲۱} (که بعضی اوقات گذارفاز مرتبه بالاتر هم خوانده می شوند) که همراه با مبادله گرمای نهان نیستند (مثل گذار فاز فرومغناطیسی). در این درس سروکار ما با گذارفازهای پیوسته است. دلیل اش این است که گذارفاز مرتبه اول به جزییات سیستم و ماده مورد مطالعه بستگی تام و تمام دارد و به همین دلیل آنچه که از آن می آموزیم اهمیت کلی ندارد. اما گذارفاز دارای بعضی از جنبه های خیلی عمومی و کلی است که مستقل از نوع ماده و سیستم مورد مطالعه است. این عمومیت نشان دهنده این است که در گذار فاز پیوسته با پدیده ای عمیق در فیزیک مواجه هستیم که

^{۱۹}Paul Ehrenfest

^{۲۰}Latent Heat

^{۲۱}Continuous Phase Transitions

نیازمند فهمیدن آن هستیم.

۲.۳ گذارفاز کلاسیک و کوانتومی

به طور کلی می توان گفت هر گذارفازی صحنه مقابله دو عامل متضاد است، یک عامل بی نظم کننده که معمولاً افت و خیز گرمایی است و دیگری یک عامل نظم دهنده مثل میدان مغناطیسی یا همبستگی اتم ها با یک دیگر. تغییر این عوامل باعث پیروزی یکی از این عوامل و پیدایش یک فاز جدید از ماده می شود. در گذارفازهایی که در دمای غیرصفر رخ می دهد همواره عامل بی نظم کننده که همان افت و خیز حرارتی است اهمیت دارد. این نوع گذارفازها را گذارفازهای کلاسیک یا گذارفازهای حرارتی^{۲۲} می نامیم. اما در دمای صفر و یا خیلی نزدیک به صفر هم که دیگر افت و خیز حرارتی وجود ندارد نیز گذار فاز ممکن است رخ دهد. در اینجا افت و خیزهای کوانتومی^{۲۳} است که اهمیت دارد. به بیان دقیق تر در این جا هر کمیتی به صورت متوسط یک مشاهده پذیر ماکروسکوپی در حالت پایه سیستم محاسبه می شود. اگر این مشاهده پذیر را با A نشان دهیم آنگاه

$$A(g) := \langle \Psi(g) | \hat{A} | \Psi(g) \rangle \quad (۱۶)$$

که در آن $|\Psi(g)\rangle$ حالت پایه سیستم و g مجموعه پارامترهایی است که بر رفتار سیستم اثر می گذارند. این پارامترها می توانند میدان های خارجی، شدت برهم کنش های داخلی، چگالی ذرات و از این قبیل باشند. با تغییر این پارامترها ممکن است حالت پایه سیستم یعنی $|\Psi(g)\rangle$ به طور ناگهانی تغییر کند و همین تغییر ناگهانی باعث تغییر ناگهانی در مشاهده پذیرهای ماکروسکوپی ظاهر شود که ما آن را به عنوان گذار فاز می بینیم. این نوع گذارفازها، گذارفاز کوانتومی^{۲۴} خوانده می شوند. گذار فاز ابرسانی از این جمله است.

۴ خصوصیات کلی گذارفازهای پیوسته

در این قسمت به بررسی و یادآوری خصوصیات کلی گذارفازهای پیوسته می پردازیم. مهم ترین این خصوصیات عمومیت^{۲۵} است.

^{۲۲}Thermal Phase Transition

^{۲۳}Quantum Phase

^{۲۴}Quantum Phase Transition

^{۲۵}Universality

۱۰۴ عمومیت

آزمایشهای بسیار زیاد در طول چند دهه گذشته نشان داده است که نماهای بحرانی مربوط به گذار فاز فرومغناطیسی در مواد گوناگون باهم مساوی هستند. این مواد مختلف می توانند خواص مکانیکی، الکتریکی، حرارتی و اپتیکی بسیار متفاوتی از خود نشان دهند ولی رفتار بحرانی شان کاملاً مثل یک دیگر است. این مواد می توانند ساختارهای اتمی کاملاً متفاوتی باهم داشته باشند بااین وجود نماهای بحرانی یکسان دارند. این یکسانی منحصر به مواد فرومغناطیس نیست. هرگاه به نماهای بحرانی مربوط به گذار فاز مایع - بخار از یک سو و نماهای بحرانی گذار فاز فرومغناطیسی از سوی دیگر نگاه کنیم متوجه تساوی آنها می شویم. این تساوی با توجه به این که این دو پدیده کاملاً متفاوت و متمایز از یک دیگر هستند خارق العاده است. در نظر اول هیچ گونه نسبت و شباهتی بین تبخیر یک مایع و پیدایش مغناطش در یک جامد وجود ندارد. در واقع نشان داده می شود که نماهای بحرانی به تعداد اندکی از پارامترهای مثل بعد فضایی سیستم یا بعد پارامتر نظم بستگی دارند و از خصوصیات میکروسکوپی ماده مستقل هستند. این خصلت کلی پدیده های بحرانی یعنی یکی بودن نماهای بحرانی برای بسیاری از پدیده ها عمومیت یا Universality نامیده می شود.

گذار فاز بی نظمی به نظم در گستره وسیعی از پدیده های طبیعی و یا غیرطبیعی رخ می دهد. پیدایش خود بخود مغناطیس در یک ماده فرومغناطیس، یا پیدایش خود بخود مغناطش تعمیم یافته در یک ماده پادفرومغناطیس، جداسدن خود به خود اتم های یک الیاز^{۲۶} یا جداسدن مخلوط دو مایع از یکدیگر^{۲۷} پیدایش ابررسانایی^{۲۸} در یک رسانای معمولی یا حتی در یک نارسانا، و هم چنین پیدایش ابرشارگی^{۲۹} در یک مایع معمولی نمونه هایی از این گذار فاز ها هستند. این نوع گذار فازها (البته نه به این شکل و نه با این نام ها) در لحظات اولیه پس از انفجار بزرگ نیز رخ داده و باعث پیدایش دنیای کنونی ما به شکلی که می شناسیم شده است. امروزه می توان گذار فاز نظم به بی نظمی را در سیستم های پیچیده اجتماعی و اقتصادی نیز مشاهده کرد. به عنوان مثال گسترش و فراگیر شدن یک بیماری، یک عقیده یا خواست اجتماعی، و یا بروز یک بحران اقتصادی همگی نشان دهنده نمونه هایی از این دست هستند. بسیار از خصلت های این پدیده ها را می بایست با کاربرست مفاهیم، ابزارها و روش های خاص آن پدیده فهمید. مثلاً برای محاسبه مقدار دقیق مغناطش و دمایی که مغناطش خود بخود بوجود می آید می بایست به نوع اتم ها، اندازه دوقطبی مغناطیسی هر کدام از آنها و ساختار شبکه و کریستالی و نظایر آن توجه کرد. برای محاسبه مقدار دقیق رسانندگی الکتریکی یک ابررسانا نیز توجه به ساختار الکترونی ماده، باندهای انرژی و ساختار کریستالی ماده ضروری است. ما یاد گرفته ایم که همه خواص ماکروسکوپی

Binary Alloys^{۲۶}

Fluid mixtures^{۲۷}

Superconductivity^{۲۸}

Superfluidity^{۲۹}

ماده از این ساختارهای اتمی قابل استخراج هستند. یعنی اینکه دمای ذوب ماده، ضریب هدایت الکتریکی و گرمایی و ضریب شکست نور در آن و صدها خاصیت آن را می توان از ترکیب اتمی آن به دقت محاسبه کرد. این امر نشان می دهد که چقدر ساختمان میکروسکوپی یک ماده در تعیین خصوصیات میکروسکوپی ماده تعیین کننده است. این که یک ماده شعاع اتمی اش چقدر باشد و چند الکترون در لایه آخری اش داشته باشد در طیف انرژی جامدی که از آن تشکیل می شود و از آنجا در تمام خصوصیات میکروسکوپی ماده نقش اساسی خواهد داشت. کوچکترین تغییری در ساختمان اتمی باعث تغییر در خواص میکروسکوپی می شود. با این اوصاف این که خاصیتی میکروسکوپی وجود دارد که چندان ربطی به ساختمان میکروسکوپی ندارد می بایست خیلی شگفت انگیز باشد و نشانه این باشد که خواص بحرانی خواصی هستند بسیار کلی و عمومی.

این عدم وابستگی که از آن به عمومیت^{۳۰} نام برده می شود نشان دهنده این است که این ویژگی ها با بنیادی ترین و عمیق ترین خصلت گذار فاز از نظم به بی نظمی مرتبط هستند. به این ترتیب وقتی که چنین ویژگی هایی را مطالعه می کنیم و یک نظریه برای توصیف آنها می سازیم، در واقع نه یک پدیده خاص بلکه یک نظریه عمومی برای توصیف گذار از بی نظمی به نظم را در یک سیستم بس ذره ای دلخواه تدوین می کنیم. ممکن است که در ابتدا از یک پدیده خاص شروع کنیم ولی نهایتاً به نظریه ای کلی می رسیم که این گذار را در کلی ترین شکل خود مطالعه می کند. بنابراین در طول این درس بیش از آنکه به یک پدیده خاص و جزئیات آن توجه کنیم به خصلت های عمومی و کلی آن پدیده توجه می کنیم اگرچه عمدتاً توجه خود را به یک نوع گذار فاز یعنی گذار فاز فرومغناطیسی معطوف می کنیم چرا که تمامی مفاهیمی که برای درک نظریه پدیده های بحرانی لازم هستند را می توانیم با مطالعه این نوع پدیده بفهمیم.

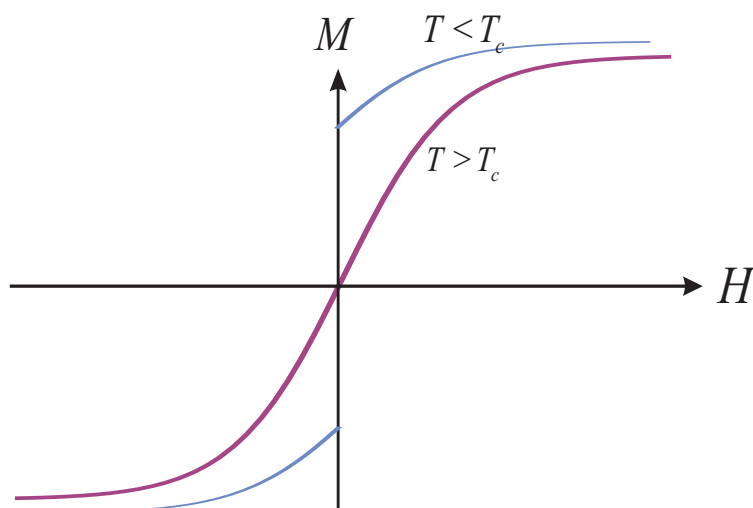
در طول نیم قرن گذشته این مطالعه که به طور کلی با نام پدیده های بحرانی^{۳۱} شناخته می شود نه تنها منجر به درک بهتر ما از گذار فاز شده بلکه یک دستاورد مهم و اساسی در فیزیک بنیادی نیز داشته است. در پرتو این نظریه است که اکنون درک عمیقی از نحوه مطالعه پدیده های مختلف فیزیکی در مقیاس های متفاوت داریم و می فهمیم که چگونه قوانین فیزیکی در مقیاس های مختلف تغییر می کنند و می توانیم نظریه های میدان کوانتومی^{۳۲} و بازبهنجارش^{۳۳} آنها را بهتر درک کنیم.

Universality^{۳۰}

Critical Phenomena^{۳۱}

Quantum Field Theories^{۳۲}

Renormalization^{۳۳}



شکل ۱۸: مغناطش برحسب میدان مغناطیسی در دماهای مختلف

۲.۴ نماهای بحرانی

در نزدیکی نقطه بحرانی ناحیه ای کوچک وجود دارد که آن را ناحیه بحرانی^{۳۴} می نامیم. در این ناحیه است که همه رفتارهای جالب (از قبیل عمومیت و تقارن مقیاس) مشاهده می شوند. این که این ناحیه چقدر کوچک یا بزرگ است و چگونه می بایست آن را تعیین کرد، مسأله ای است که به آن خواهیم پرداخت. فعلا یک متغیر کاهش یافته را که در واقع میزان نزدیکی به نقطه بحرانی است به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$t := \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (17)$$

این کمیت را که یک کمیت بدون دیمانسیون است دمای کاهش یافته^{۳۵} می نامیم.

فرض کنید که میدان مغناطیسی خارجی صفر و دما کمتر از دمای بحرانی است. در نتیجه سیستم دارای یک مغناطش خودبخودی است. همانطور که از شکل ۷ پیداست با نزدیک شدن به دمای بحرانی مقدار مغناطش به تدریج کم شده و نهایتا در نقطه بحرانی به صفر می رسد. از خود سوال می کنیم که این بستگی چگونه است. آزمایش های گوناگون نشان می دهند که این رفتار به صورت زیر است:

$$M(t, H = 0) \sim t^\beta, \quad (18)$$

^{۳۴}Critical Region
^{۳۵}Reduced Temperature

که در آن β یک نمای بحرانی خوانده می شود. علامت $\sim$ به این معناست که ما به ضریب تناسبی که در این رابطه توانی وجود دارد علاقمند نیستیم. در واقع آنچه که مهم است نمای بحرانی β است چرا که این کمیت است که بین دسته وسیعی از سیستم ها مشترک است و حال آنکه ضریب تناسب چنین خاصیتی ندارد. به این ترتیب به تعریف اولین نمای بحرانی رسیده ایم که یک خاصیت عمومی را بیان می کند. این نما در واقع بیان می کند که با نزدیک شدن به دمای بحرانی (یا هر پارامتر دیگری که مثل دما عامل بی نظمی است و نقطه بحرانی را تعیین می کند) و در غیاب میدان نظم دهنده (در این جا میدان مغناطیسی) پارامتر نظم چگونه از بین می رود.

حال از یک زاویه دیگر به این موضوع نگاه می کنیم و آن اینکه دمای کاهش یافته را درست برابر با صفر قرار می دهیم و به کم شدن پارامتر نظم در اثر کاهش عامل نظم دهنده یعنی میدان مغناطیسی توجه می کنیم. آزمایشها نشان می دهند که این رابطه نیز یک رابطه توانی است:

$$M(t=0, H) \sim H^{\frac{1}{\delta}} \quad (19)$$

که در آن δ یک نمای بحرانی دیگر است. این نما نیز خاصیت عمومیت دارد و در بسیاری از پدیده ها و گذار فاز ها مقدار یکسانی دارد.

می دانیم که بنابر تعریف ضریب نفوذ پذیری مغناطیسی^{۳۶} به صورت زیر تعریف می شود:

$$\chi(T, H) := \frac{\partial M}{\partial H}(T, H). \quad (20)$$

حال از خود می پرسیم که ضریب نفوذ پذیری مغناطیسی چگونه رفتار می کند. برخلاف دو نمای پیشین این نما را می توان هم برای دمای بالاتر از دمای بحرانی و هم برای دمای پایین تر از آن تعریف کرد. ما علاقمند به نحوه رفتار این کمیت در غیاب میدان مغناطیسی هستیم. می خواهیم ببینیم که نظم بوجود آمده (در این جا مغناطش) چه مقدار نسبت به تغییرات عامل نظم دهنده (در این جا میدان مغناطیسی) حساس است و چقدر نسبت به آن واکنش نشان می دهد. مطابق با رابطه بالا هر چقدر که χ بزرگ تر باشد به این معناست که نظم بوجود آمده حساسیت بیشتری نسبت به میدان مغناطیسی دارد و با تغییرات کوچک در میدان مغناطیسی می توان تغییرات بزرگی در مغناطش ایجاد کرد. این امر در واقع نشان دهنده این است که همه دوقطبی ها باهم هماهنگ شده و از میدان مغناطیسی خارجی به صورت هماهنگ پیروی می کنند. اگر به اختصار قرار

دهیم

$$\chi := \chi(t, H=0), \quad (21)$$

Magnetic Susceptibility^{۳۶}

آزمایشهای بیشمار نشان می دهند که

$$\chi \sim t^{-\gamma}, \quad t > 0 \quad (22)$$

و

$$\chi \sim (-t)^{-\gamma'}, \quad t < 0 \quad (23)$$

که نشان می دهد برای نفوذپذیری مغناطیس دو نمای متفاوت یکی در دمای بالا و دیگری در دمای پایین تر از نقطه بحرانی وجود دارد. البته آزمایشهای متعدد نشان می دهند که این دو نما در حد خطای آزمایشی باهم مساوی هستند. به این ترتیب تا کنون سه نمای بحرانی تعریف کرده ایم. ولی هنوز فهرست نماهای بحرانی تمام نشده است.

یکی از کمیت های مهم ترمودینامیکی ظرفیت گرمایی ویژه است. این کمیت در واقع نشان می دهد که انرژی داخلی سیستم چگونه با تغییرات دما تغییر می کند. برای ظرفیت گرمایی ویژه نیز دو نمای بحرانی یکی در بالای نقطه بحرانی و دیگری در پایین دمای بحرانی تعریف می شود:

$$C \sim t^{-\alpha} \quad t > 0 \quad (24)$$

و

$$C \sim (-t)^{-\alpha'} \quad t < 0 \quad (25)$$

که در آن $C := C(T, H = 0)$ ظرفیت گرمایی ویژه در میدان مغناطیسی صفر است. بازهم نتایج آزمایشی نشان می دهند که این دو نما در حد خطای آزمایشی باهم مساوی هستند.

تا کنون چهار تا از نماهای بحرانی را برای سیستم های مغناطیسی تعریف کرده ایم. البته باید دقت کنیم که در یک گذار فاز معین همه این نوع نماها الزاما قابل تعریف یا اندازه گیری نیستند. دو نمای بحرانی مهم دیگر باقی مانده است که به نوعی اهمیت شان بیشتر از بقیه نماهاست. این دو نمای بحرانی به واگرایی طول همبستگی مربوط هستند و در واقع چنانکه در آینده خواهیم دید تمامی خصلت های مهم یک پدیده بحرانی ناشی از واگرایی طول همبستگی است. به همین دلیل می توان گفت که این دو نما از بقیه نماهای بحرانی مهم تر هستند. این دو نما به شکل زیر

تعریف می شوند. مغناطش موضعی را در نقطه x با $M(x)$ نشان می دهیم. این کمیت دارای افت و خیز گرمایی است و در یک نمونه همگن، یعنی نمونه ای که همه نقاطش با هم یکسان هستند، متوسط گرمایی این کمیت همان چیزی است که ما قبلا آن را با M نشان داده ایم یعنی

$$M := \langle M(x) \rangle. \quad (۲۶)$$

طبیعی است که $\langle M(x) - M \rangle = 0$.

کمیتی که به آن علاقمند هستیم همبستگی مغناطش موضعی بین دو نقطه است. این کمیت تعیین می کند که میزان افت و خیزها در نقاط مختلف چقدر با یکدیگر هم بستگی دارند. این کمیت به صورت زیر تعریف می شود:

$$G_c(x, y) := \langle (M(x) - M)(M(y) - M) \rangle = \langle M(x)M(y) \rangle - \langle M(x) \rangle \langle M(y) \rangle. \quad (۲۷)$$

دقت کنید که در دماهای خیلی بالا وقتی که بی نظمی حاکم است مقدار این کمیت صفر است زیرا دوقطبی های مغناطیسی در هر نقطه ای رفتار کاملا نامنظمی دارند. این کمیت هم چنین در دماهای خیلی پایین تر از نقطه بحرانی نیز به سمت صفر میل می کند زیرا در این دماها تمام دوقطبی ها در یک راستا منظم می شوند. در چنین شرایطی اگرچه مقدار $G(x, y) := \langle M(x)M(y) \rangle$ خیلی بزرگ می شود، تفاوت آن با $\langle M(x) \rangle \langle M(y) \rangle$ به سمت صفر میل می کند.

$G(x, y)$ تابع همبستگی دو نقطه ای و $G_c(x, y)$ تابع همبستگی دو نقطه ای متصل خوانده می شوند. رفتار کلی این تابع در فاصله های بزرگ به صورت زیر است:

$$G_c(x, y) \sim \frac{e^{-\frac{|x-y|}{\xi}}}{|x-y|^{d-2+\eta}}, \quad (۲۸)$$

که این رابطه یک نمای جدید یعنی η را معرفی می کند. در این رابطه ξ طول همبستگی نامیده می شود. این که چرا با قراردادن بعد سیستم یعنی d این نمای بحرانی خاص را به این شکل تعریف کرده ایم، تنها برای راحتی بعضی روابط دیگر است و اهمیت مفهومی ندارد. نکته مهم این است که در نزدیکی نقطه بحرانی طول همبستگی بسیار بزرگ می شود و در خود نقطه بحرانی به سمت بی نهایت میل می کند. نحوه واگرا شدن این طول همبستگی نسبت به دما آخرین نمای بحرانی را به صورت زیر تعریف می کند:

$$\xi \sim t^{-\nu}. \quad (۲۹)$$

به این ترتیب برای سیستم فرومغناطیسی تعداد شش نمای بحرانی تعریف می شوند که عبارت اند از:

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \nu. \quad (30)$$

■ روابط مقیاسی: ۳۷

مشاهدات بسیار در مورد سیستم های فرومغناطیسی نشان داده که این نماها همه مستقل نیستند و همه آنها را می توان از دو نمای بحرانی بدست آورد. در واقع در طول سالیان روابطی بین این نماها بدست آمده که هر کدام شان به دلیل اینکه حاصل آزمایشهای طولانی و دشوار است به افتخار یک فیزیکدان نامگذاری شده است. این روابط اینها هستند:

$$\beta = \frac{\nu}{2}(d-2+\eta) \quad \delta = \frac{d+2-\eta}{d-2+\eta}, \quad \alpha = \alpha' = 2 - \nu d \quad \gamma = \gamma' = \nu(2-d), \quad (31)$$

که در آن d بعد سیستم فرومغناطیسی است. روابط مقیاسی مشابهی ولی به شکل متفاوت در باره دیگر پدیده های گذارفاز نیز وجود دارد ولی به دلیل دشواری آزمایشها به اندازه روابط مربوط به گذارفاز مغناطیسی کامل نیستند.

بهراست که در این جا نمونه ای از مقادیر عددی و آزمایشی این نماها را ذکر کنیم. برای یک فرومغناطیس سه بعدی مثل آهن یا نیکل یا $YFeO_3$ مقادیر آزمایشی این نماها عبارتند از:

$$\alpha \approx -0.12, \beta \approx 0.34, \quad \gamma = \gamma' \approx 1.33, \quad \delta \approx 4.2, \quad \eta \approx 0.07, \quad \nu \approx 0.69. \quad (32)$$

یک بار دیگر باید تاکید کنیم که توصیف بالا فقط مربوط به یکی از پدیده های طبیعی است که در آن گذارفاز رخ می دهد. در بسیاری دیگر از پدیده های دیگر که حتی خارج از حوزه فیزیک و علوم طبیعی هستند نیز مثل اقتصاد و جامعه گذارفاز رخ می دهد و با همین روش ها نیز مورد مطالعه قرار می گیرد. شکست ناگهانی بازارهای بورس در دنیا، بحران های اقتصادی و اجتماعی، همه گیری بیماری های نیز با همین روشهای مکانیک آماری که در این درسی و درس های گذشته خوانده ایم یا در درسهای آینده خواهیم خواند قابل مطالعه اند.

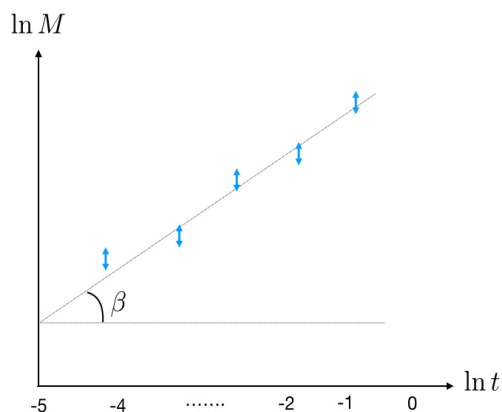
■ اندازه گیری نماهای بحرانی

اگر به مقادیر عددی نماهای بحرانی که از آزمایش ها بدست می آیند نگاه کنیم متوجه می شویم که این نماها را با دقت یک یا حد اکثر دو رقم اعشار می دانیم که به نظر می رسد در مقایسه با دیگر کمیت های فیزیکی که می شناسیم دقت خیلی کمتری دارد. خیلی از کمیت های بنیادی مثل

بار و جرم الکترون یا بار و جرم پروتون یا کمیت های غیر بنیادی مثل مقاومت الکتریکی مواد مختلف یا فاصله شبکه جامدات مختلف را می توان با دقتی بیشتر از ده یا دوازده رقم اعشار اندازه گیری کرد. دلیل این امر چیست؟ برای فهم این موضوع می بایست به یکی از رابطه های نمایی نگاه می کنیم مثلاً به رابطه $M \sim t^\beta$. برای تعیین β در آزمایشگاه این رابطه را به صورت

$$\log M = c + \beta \log t \quad (۳۳)$$

می نویسیم که در آن c یک ثابت است. این رابطه در یک گراف لگاریتم-لگاریتم به صورت یک خط راست نشان داده می شود و هدف ما پیدا کردن شیب این خط است، شکل (۲.۴). برای اینکه شیب خط را با دقت تعیین کنیم احتیاج به چند نقطه داریم. هرچه که تعداد این نقاط و فاصله آنها از هم زیادتر باشد می توان شیب خط را با دقت بیشتری تعیین کرد. اما نقاط بیشتر در مقیاس لگاریتمی به این معناست که می بایست به دمای بحرانی بسیار نزدیک شد. از آنجا که t کوچکتر از یک است، $\log t$ یک عدد منفی است و اگر این عدد مقادیر $-1, -2, -3, -4, -5, -6$ را اختیار کند به این معناست که M را در دماهای زیر اندازه گیری کرده ایم:

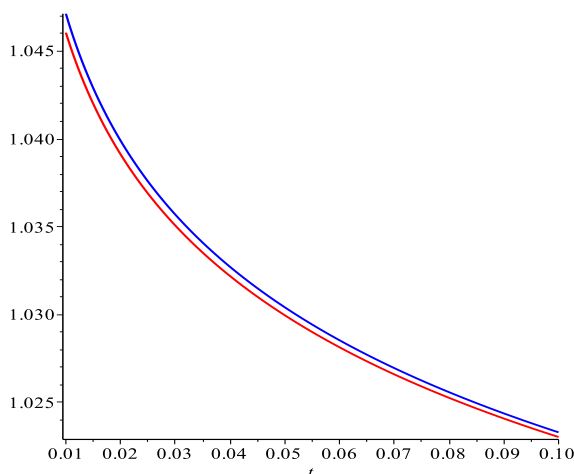


شکل ۱۹: دیاگرام لگاریتمی برای پیدا کردن نمای بحرانی β .

$$T = T_c(1.1), \quad T = T_c(1.01), \quad T = T_c(1.001), \quad T = T_c(1.0001), \quad T = T_c(1.00001), \quad T = T_c(1.000001). \quad (۳۴)$$

در آینده خواهیم دید که هر چه به دمای بحرانی نزدیک تر می شویم زمان پاسخ سیستم، یعنی زمانی که طول می کشد تا سیستم به تغییرات خارجی پاسخ دهد و خود را با پارامترهای خارجی تطبیق دهد طولانی تر می شود و در حقیقت با نزدیک شدن به دمای بحرانی این زمان به سمت بی نهایت میل می کند. به همین دلیل است که بدست آوردن نقاط بیشتر و رسم دقیق تر خط و تعیین شیب آن سخت تر و سخت تر می شود. این پدیده را «آهستگی بحرانی»^{۳۸} می نامند.

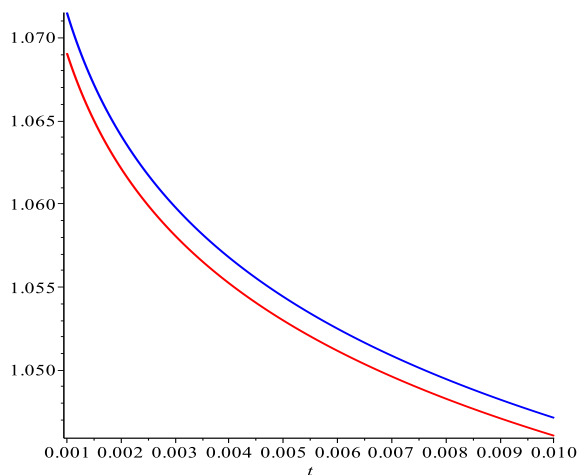
دشواری اندازه گیری نماهای بحرانی در بعضی از موارد باعث می شود که ما نتوانیم نحوه واگرا شدن یک کمیت مثل ظرفیت گرمایی ویژه را به خوبی تشخیص ندهیم. برای روشن تر شدن این موضوع به شکل (۲۰) نگاه می کنیم. وقتی که ظرفیت گرمایی واگرا می شود به دشواری می توان تشخیص داد که مطابق با کدام یک از منحنی های نشان داده شده رفتار می کند. برای چنین تشخیصی می بایست بسیار بسیار به نقطه بحرانی نزدیک شد و این به دلایلی که در بالا گفتیم سخت است. در این جا نشان می دهیم که هر سه نوع منحنی را می توان با بیان اینکه ظرفیت گرمایی ویژه با نمای صفر واگرا می شود باهم متحد کرد. برای فهم این موضوع به این اتحاد دقت می کنیم:



شکل ۲۰: منحنی آبی رنگ تابع $t^{-0.01}$ را نشان می دهد و منحنی قرمز رنگ تابع $1 - 0.01 \log(t)$ را نشان می دهد. وقتی به نقطه بحرانی نزدیک می شویم این دو منحنی شروع به تمایز از یکدیگر می کنند.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} t^{-\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 1 - \alpha \ln t \quad (۳۵)$$

Critical Slowing Down^{۳۸}



شکل ۲۱: منحنی آبی رنگ تابع $t^{-0.01}$ را نشان می دهد و منحنی قرمز رنگ تابع $1 - 0.01 \log(t)$ را نشان می دهد. این دو منحنی وقتی از هم قابل تشخیص می شوند که خیلی به نقطه بحرانی نزدیک شویم.

بنابراین وقتی t خیلی کوچک می شود معلوم نیست که آیا رفتار C به صورت یک تابع نمایی $t^{-\alpha}$ با α نمای خیلی کوچک است یا مثل یک تابع لگاریتی با ضریب α خیلی کوچک. این موضوع در شکل های (۲۰) تا (۲۱) نشان داده شده است.

۳.۴ تقارن مقیاس

در هر سیستم فیزیکی یک یا چند طول مشخصه وجود دارند که به طور طبیعی مقیاسی هستند برای مقایسه سایر طول ها. مثلاً در زندگی روزمره برای انسان ها، وجب (پهنای دست) یا ذرع (فاصله بین نوک انگشتان دو دست در حالت باز) مقیاس های طبیعی طولی هستند. در منظومه شمسی فاصله بین زمین و خورشید یک طول طبیعی است که به واحد نجومی ^{۳۹} معروف است. در مقیاس کیهانی طول طبیعی سال نوری است. هم چنین در دنیای اتمی مقیاس طبیعی طول آنگستروم یا شعاع بور ^{۴۰} است. مقیاس طبیعی در فیزیک هسته ای یک فرمی است که تقریباً یک صدهزارم آنگستروم است. هیچ کس فاصله سیارات را از یکدیگر یا از خورشید بر حسب متر یا میلی متر اندازه گیری نمی کند. هم چنین هیچ کس قد انسانها را بر حسب میلی متر یا کیلومتر نمی سنجد. وجود این مقیاس های مشخص طولی نشان می دهد که پدیده های مربوطه به آن حوزه دارای تقارن مقیاس نیستند. به عبارت دیگر سازوکار و قوانین فیزیکی اجازه نمی دهد که اشیایی با ابعاد کاملاً متفاوت در آن حوزه بوجود بیایند. قوانین

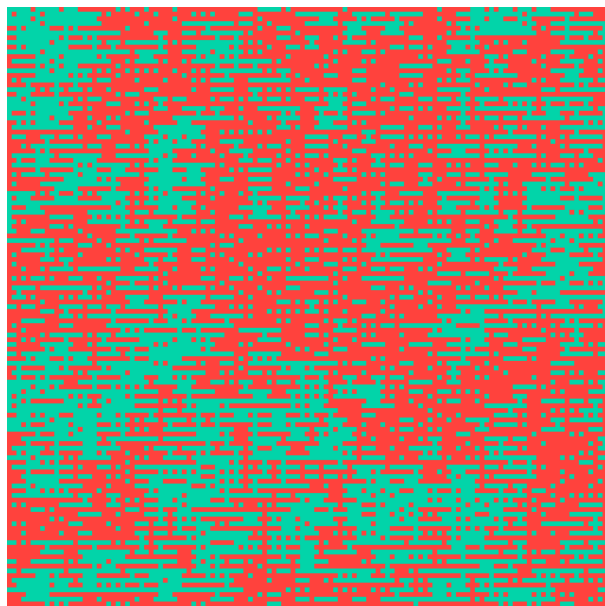
^{۳۹}Astronomical Unit (AU)

^{۴۰}Bohr Radius

زیست شناسی و فیزیک اجازه نمی دهند که انسانهایی با طول چند ده متر بوجود بیایند یا درختانی با طول هزار متر. دنیای اطراف ما به وضوح دارای تقارن مقیاس نیست. ما در اطراف خود درختانی با طول های از میلی متر تا هزاران متر نمی بینیم. اتم هایی با شعاع های از آنگستروم تا متر وجود ندارد. وجود مقیاس های طولی متفاوت مقیاس های متفاوت دیگری را نظیر جرم و انرژی به همراه می آورد. مقیاس انرژی برای انسانها ، اتم ها و هسته ها متفاوت است. این جدا شدن مقیاس ها یک نتیجه بسیار مهم و اساسی دارد و آن این که می توان این دنیا ها را مستقل از یک دیگر مطالعه کرد. هر حوزه قوانین مخصوص به خود را دارد. می توان حرکت یک پرتابه مثل یک سنگ را در سطح زمین با استفاده از قوانین نیوتن و رابطه $F = ma$ توصیف کرد و نیازی نیست که فکر کنیم سنگ از میلیون ها اتم تشکیل شده و برای توصیف حرکتش می بایست معادله شرودینگر بس ذره ای را حل کنیم. درست است که سنگ نهایتا از اتم ها تشکیل شده و احتمالا اگر یک رایانه خیلی خیلی قوی داشته باشیم با حل معادله شرودینگر نیز می توانیم حرکت سنگ را در سطح زمین توصیف کنیم ولی این کار نه مفید است و نه لازم. در حقیقت مکانیک کلاسیک برخاسته از یک دینامیک بنیادی تر یعنی دینامیک کوانتومی است که در یک مقیاس طولی بسیار کوچک تر حاکم بر حرکت اشیاء است. وقتی که مقیاس طولی مشاهده خود را از سطح اتمی (آنگستروم) بزرگ کرده و به سطح سنگ (میلی متر و سانتی متر) می رسانیم دینامیک کوانتومی نیز تغییر شکل داده و به دینامیک کلاسیک تبدیل می شود. این تغییر شکل به این معناییست که قوانین مکانیک کوانتومی نا معتبر می شوند. سنگ همچنان از میلیون ها اتم تشکیل شده است و قوانین اتمی در سطح تک تک اتم ها در کارند ولی در مقیاسی که ما سنگ را مشاهده می کنیم آن همه درجات آزادی را نمی بینیم. حرکات الکترون ها دور اتم ها، نوسانات یونها و هزاران حرکت دیگر همگی در این مقیاس مشاهده نادیدنی شده اند و بنابراین کافی است که فقط به درجات آزادی ای که در این مقیاس قابل مشاهده هستند توجه کنیم و قوانینی برای حرکت سنگ براساس این درجات آزادی معدود که همان مختصات مرکز جرم و نظایر آن است بیابیم. این قوانین همان قوانین نیوتن هستند. چنانچه که قانون حرکت سنگ را که بر مبنای مکانیک نیوتنی است بتوانیم از حل معادله شرودینگر بس ذره ای استخراج کنیم می توانیم بگوییم که مکانیک کلاسیک یک نظریه موثر^{۴۱} است که از یک نظریه بنیادی تر^{۴۲} استخراج شده است. این که آیا واقعا چنین چیزی ممکن است یا نه چندان واضح نیست چرا که کسی سعی در این کار نکرده است ولی می توان تصور کرد که این حرف درست است. از خوش شانسی ماست که پدیده های مختلف هرکدام قوانین موثر خود را دارند و لازم نیست برای حرکت یک سنگ یا چرخش زمین به دور خورشید از مکانیک کوانتومی استفاده کنیم. این خوش شانسی ناشی از این امر است که این دنیاها با مقیاس های طولی کاملا مختلف از هم جدا شده اند.

اما در نزدیک نقطه بحرانی ما با یک وضعیت استثنایی و متفاوت روبرو هستیم. درست در نزدیکی نقطه بحرانی هیچ مقیاس طولی مشخصی وجود ندارد. در نزدیکی نقطه بحرانی یک سیستم بحرانی با تقریب بسیار خوبی دارای تقارن مقیاس است به این معنا که آن را در هر مقیاسی که

Effective Theory^{۴۱}
Fundamental Theory^{۴۲}



شکل ۲۲: یک نمونه از شبیه سازی مدل آیزینگ در نزدیکی نقطه بحرانی. هر قسمتی از این سیستم را که در مشاهده کنیم از نظر آماری مثل سیستم بزرگ اولیه است.

مشاهده کنیم خصوصیات آماری اش یکسان است. این امر هم نتیجه آزمایش است و هم نتیجه شبیه سازی های متعدد. به عنوان مثال شکل ۳.۴ را اگر نگاه کنیم متوجه این خصوصیت تقارن مقیاس می شویم. این شکل یک شبیه سازی از مدل آیزینگ را نشان می دهد که اسپین های بالا و پایین با رنگ های متفاوت نشان داده شده اند. اگر کسی این شکل یا قسمتی از این شکل را به ما نشان دهد نمی توانیم آنها را از هم تمیز دهیم. بنابراین درست در نقطه بحرانی می بایست توصیفی از این سیستم ارائه دهیم که نسبت به تغییر مقیاس ناوردا باشد. از این تقارن مقیاس در نقطه بحرانی نیز باید بتوانیم استفاده کنیم و رفتار سیستم را در نزدیکی نقطه بحرانی جایی که تقارن مقیاس تنها به صورت تقریبی و نه کامل برقرار است توصیف و پیش بینی کنیم.

۵ توضیح پدیده های بحرانی

برای توضیح پدیده های بحرانی، مثل هر پدیده فیزیکی دیگری یک راه این است که از فیزیک میکروسکوپی و از قوانین بنیادی شروع کنیم، نقطه گذار فاز را در صورت وجود پیدا کنیم، و خصوصیات را که در بخش های پیشین ذکر کرده ایم از جمله وجود خود تقارن مقیاس را اثبات کنیم. به عبارت دیگر می توانیم به عنوان مثال از هامیلتونی مدل آیزینگ که به صورت

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j \quad (۳۶)$$

نوشته می شود شروع کنیم و پس از محاسبه تابع پارش و محاسبه خصوصیات ترمودینامیکی و آماری این سیستم نشان دهیم که در دمای مشخصی مثل T_c این سیستم اولاً از خود تقارن مقیاس نشان می دهد و ثانیاً در نزدیکی نقطه بحرانی T_c نیز رفتارهای مشخصی را از خود نشان می دهد. با چنین کاری می توانیم نماهای بحرانی را نیز حساب کنیم. متأسفانه این کار دشوار است. علاوه بر این، با این روش نمی توانیم چیزی از عمومیت بفهمیم چرا که از یک مدل خاص شروع کرده ایم. در این فصل و فصل بعد ما سعی می کنیم به هر دو روش عمل کنیم. یعنی هم سعی می کنیم یک مدل خاص مثل مدل آیزینگ را تا جایکه می توانیم تجزیه و تحلیل کنیم و هم سعی می کنیم روش هایی را برای مطالعه عمومی پدیده های بحرانی یاد بگیریم که کلی باشند و به کمک آنها بتوانیم عمومیت را بفهمیم.

در طول چندین دهه بعد از شناسایی این پدیده ها در آزمایشگاه روش های متعددی برای مطالعه این پدیده ها به کار رفته و شناخت ما را بتدریج از این پدیده ها غنی کرده است. ما در این درس با مهمترین این روش ها آشنا خواهیم شد. در این فصل با یک روش پدیده شناختی آشنا می شویم. این روش متکی بر یک فرض موسوم به فرض مقیاس پذیری ویدام^{۴۳} است که خود آن فرض را در حال حاضر نمی توانیم ثابت کنیم. ولی بعدها مبنای این فرض را نیز خواهیم فهمید. فعلاً توجه خود را به معنای این فرض و نتایج آن معطوف می کنیم. این فرض به ما امکان می دهد که به چند سوال اساسی پاسخی مناسب بدهیم. در درس اول دیدم که در نزدیکی نقطه بحرانی بعضی کمیت های فیزیکی:

الف: از خود رفتار توانی نشان می دهند،

ب: نماهای بحرانی مربوط به این کمیت ها عام هستند،

^{۴۳}Widom Scaling Hypothesis

ج : بین این نماها روابط ساده ای وجود دارد که باعث می شود همه آنها را بتوان برحسب یکی دو تا از آنها نوشت .

در این درس می خواهیم نخستین و ابتدایی ترین کوششی را که برای فهم این سه خصلت پدیده های بحرانی انجام شده است، بازهم با مثال گذار فاز مغناطیسی، بررسی کنیم.

۱.۵ فرض مقیاس پذیری ویدام

برای یک سیستم مغناطیسی قانون اول ترمودینامیک به شکل زیر نوشته می شود:

$$dU = TdS + MdB \quad (۳۷)$$

زیراکاری که بزرگ ماده مغناطیسی انجام می شود برابر است با BdM (برای فهم این نکته و اینکه چرا کار انجام شده مطابق با تصور ابتدایی ما برابر با $-BdM$ نیست رجوع کنید به کتاب ترمودینامیک زیمانسکی). در نتیجه برای انرژی آزاد هلمهولتز یعنی F خواهیم داشت :

$$dF = -SdT + MdB \quad (۳۸)$$

از رابطه بالا داریم :

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad M = \frac{\partial F}{\partial B} \quad (۳۹)$$

که از دو رابطه اخیر بدست می آوریم :

$$C_B \equiv \frac{TdS}{dT} = T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad \chi_B \equiv \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{\partial^2 F}{\partial B^2} \quad (۴۰)$$

می دانیم که در نزدیکی نقطه بحرانی کمیت های فیزیکی از خود ناپیوستگی نشان می دهند که به معنای آن است که مشتق های تابع گیس در دو طرف نقطه بحرانی بایکدیگر برابر نیستند زیرا مطابق روابط بالا این کمیت ها از مشتقات تابع گیس هستند.

بر مبنای فرض مقیاس بندی ویدام *Widom Scaling Hypothesis* تابع گیس در نزدیکی نقطه بحرانی یک تابع همگن است به این معنا که دارای خاصیت زیر است:

$$F(\lambda^a t, \lambda^b B) = \lambda F(t, B) \quad (۴۱)$$

که در آن a و b دو نما هستند که مقدار آنها فعلا معلوم نیست. خواهیم دید که نماهای بحرانی مشاهده پذیر برحسب این دو نما محاسبه می شوند.

در این مرحله معلوم نیست که چه چیز مبنای این فرض ساده است و این خاصیت چه مبنای فیزیکی ای دارد. تنها ملاک اعتبار این فرض نتایجی است که از آن ناشی می شود. هرچه که هست خواهیم دید که این فرض ساده خاصیت توانی کمیت های فیزیکی را در نزدیکی نقطه بحرانی و هم چنین روابط بین نماهای بحرانی را بدست می دهد و این روابط همانهایی هستند که در آزمایش مشاهده می شوند. برای دیدن این موضوع از طرفین رابطه (41) نسبت به B مشتق می گیریم تا مطابق با رابطه (39) مغناطش بدست آید. خواهیم داشت :

$$\lambda^b M(\lambda^a t, \lambda^b B) = \lambda M(t, B) \quad (42)$$

بنابراین مغناطش نیز دارای رفتار مقیاسی است. از آنجا که λ یک مقدار دلخواه است می توان در طرفین این رابطه B را مساوی صفر و λ را مساوی $t^{-\frac{1}{a}}$ است. بدست می آوریم :

$$t^{-\frac{b}{a}} M(1, 0) = t^{-\frac{1}{a}} M(t, 0) \quad (43)$$

و یا

$$M(t, 0) = t^{\frac{1-b}{a}} M(1, 0) \sim t^{\frac{1-b}{a}} \quad (44)$$

این رابطه نشان می دهد که نمای بحرانی β را می توان برحسب دو نمای a و b بدست آورد:

$$\beta = \frac{1-b}{a} \quad (45)$$

برای بدست آوردن نمای δ در همان رابطه (42) در طرفین قرار می دهیم $t = 0$ و $\lambda = B^{-\frac{1}{b}}$. نتیجه آن خواهد بود که :

$$B^{-1} M(0, 1) = B^{-\frac{1}{b}} M(t, B) \quad (46)$$

و یا

$$M(t, B) = M(0, 1) B^{\frac{1-b}{b}} \sim B^{\frac{1-b}{b}} \quad (47)$$

بنابراین نمای بحرانی δ نیز برحسب دو نمای a و b بدست می آید: یعنی:

$$\delta = \frac{b}{1-b} \quad (48)$$

حال به سراغ ضریب نفوذ پذیری مغناطیسی یعنی χ می رویم. از رابطه (42) نسبت به B مشتق می گیریم و بدست می آوریم:

$$\lambda^{2b} \chi(\lambda^a t, \lambda^b B) = \lambda \chi(t, B) \quad (49)$$

حال در دو طرف رابطه قرار می دهیم $B = 0$ و $\lambda = t^{-\frac{1}{a}}$ و بدست می آوریم:

$$t^{\frac{-2b}{a}} \chi(1, 0) = t^{-\frac{1}{a}} \chi(t, B) \quad (50)$$

و یا

$$\chi(t, B) = t^{\frac{1-2b}{a}} \chi(1, 0) \sim t^{\frac{1-2b}{a}} \quad (51)$$

بنابراین نمای بحرانی γ نیز برحسب دو نمای a و b بدست می آید. یعنی

$$\gamma = \frac{1-2b}{a}. \quad (52)$$

توجه به این مسئله لازم است که رابطه (51) مستقل از اینکه در کدام طرف نقطه بحرانی هستیم برقرار است. بنابراین نمای بحرانی γ' نیز همان رابطه

(52) را با نماهای a و b دارد. آخرین نمای بحرانی ای که به محاسبه آن می پردازیم نمای α است که به ظرفیت گرمایی ویژه مربوط است. با توجه

به رابطه (39) و استفاده از رابطه (41) بدست می آوریم:

$$\lambda^{2a} C_B(\lambda^a t, \lambda^b B) = \lambda C_B(t, B) \quad (53)$$

حال در دو طرف رابطه قرار می دهیم $B = 0$ و $\lambda = t^{-\frac{1}{a}}$ و بدست می آوریم:

$$t^{-2} C_B(1, 0) = t^{-\frac{1}{a}} C_B(t, 0) \quad (54)$$

و یا

$$C_B(t, 0) \sim t^{\frac{1}{a}-2} \quad (55)$$

بنابراین نمای بحرانی γ نیز برحسب دو نمای a و b بدست می آید. یعنی

$$\alpha = 2 - \frac{1}{a}. \quad (56)$$

توجه به این مسئله لازم است که رابطه (56) مستقل از اینکه در کدام طرف نقطه بحرانی هستیم برقرار است. بنابراین نمای بحرانی α نیز همان رابطه (56) را با نماهای a و b دارد.

به طور خلاصه زوانستیم که چهارتا از نماهای بحرانی را برحسب نماهای ویدام یعنی a و b بدست آوریم. این روابط عبارت بودند از:

$$\beta = \frac{1-b}{a} \quad \delta = \frac{b}{1-b} \quad \gamma = \gamma' = \frac{2b-1}{a} \quad \alpha = \alpha' = 2 - \frac{1}{a} \quad (57)$$

با حذف a و b بین این روابط می توان دو رابطه بین نماهای بحرانی پیدا کرد:

$$\gamma = \gamma' = \beta(\delta - 1) \quad \alpha + \beta(\delta + 1) = 2 \quad (58)$$

این روابط مستقل از اینکه پدیده بحرانی مغناطیسی در چه بعدی روی می دهد معتبر هستند و صحت آنها از نظر تجربی تایید شده است. در این مرحله نمی توانیم چیز جدیدی در باره دو نمای بحرانی ν و η بدست آوریم، زیرا این دو نما مربوط به همبستگی اسپین ها در نقاط مختلف هستند که فرض مقیاس پذیری ویدام در باره آنها ساکت است. موفقیت فرضیه مقیاس پذیری ویدام آن است که تنها با پیشنهاد یک فرض یعنی رابطه (41) توانستیم نشان دهیم که

اولاً کمیت های ترمودینامیکی مثل مغناطش، ضریب نفوذپذیری مغناطیسی و ظرفیت گرمایی ویژه در نزدیکی نقطه بحرانی رفتار توانی دارند.

ثانیاً نماهای بحرانی لااقل آنهایی که به همبستگی فضایی کمیت ها مربوط نیستند همگی از یک جفت نما یعنی نماهای a و b بدست می آیند.

ثالثاً با حذف نماهای a و b توانستیم روابطی بین نماهای بحرانی مشاهده پذیر بدست بیاوریم که همگی از نظر تجربی معتبر هستند.

این که در استخراج این روابط از جزئیات ساختاری دستگاه بحرانی هیچ استفاده ای نشده است (مگر در مقدار عددی نماهای a و b) خود نشانه کمرنگی از عمومیت است که در پدیده های بحرانی به چشم می خورد. با توجه به مطالب فوق بخوبی می توان دریافت که چرا فرضیه مقیاس پذیری ویدام را می توان نقطه شروع بسیار پرباری برای فهم پدیده های بحرانی شمرد که نهایتاً پله پله منجر به ابداع روش گروه بازبهنجارش شده است.

۲.۵ شکست تقارن و خاصیت ارگودیک

چرا شکست تقارن از لحاظ نظری عجیب است؟ چرا این موضوع احتیاج به توجیه و توصیف زیربنایی دارد؟ برای فهم این موضوع به یک مثال ساده یعنی پدیده فرومغناطیس توجه می کنیم. برهم کنش اتم های یک ماده جامد که باعث ایجاد پدیده فرومغناطیس می شود را می توان به خوبی با هامیلتونی زیر توصیف کرد:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (۵۹)$$

که در آن $\mathbf{S}_i$ دوقطبی دائمی اتمی است که در نقطه i از شبکه قرار دارد و J ثابت برهم کنش است. دوقطبی دائمی اتم ها با اسپین آنها متناسب است. همانطور که دیده می شود این هامیلتونی تحت دوران همه اسپین ها تغییر نمی کند. یعنی اینکه

$$H(\{\mathbf{S}_i\}) = H(\{\mathbf{S}'_i\}), \quad (۶۰)$$

که در آن $\mathbf{S}'_i = R\mathbf{S}_i$ و R یک عملگر دوران است. می دانیم که بنابر مکانیک آماری وقتی که سیستمی در دمای T قرار دارد همه هیئت های ممکن با احتمال بولتزمن اشغال می شوند یعنی اینکه

$$P(\{\mathbf{S}_i\}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\{\mathbf{S}_i\})} \quad (۶۱)$$

تقارن ۶۴ نتیجه اش این است که

$$P(\{\mathbf{S}_i\}) = P(\{\mathbf{S}'_i\}) \quad (۶۲)$$

یعنی همه حالت هایی که با دوران اسپین ها از یک دیگر بدست می آیند هم احتمال هستند. از جمله یک نتیجه این تقارن این است که

$$P(\{\mathbf{S}_i\}) = P(\{-\mathbf{S}_i\}) \quad (۶۳)$$

زیرا با یک دوران به اندازه ۱۸۰ درجه حول یک محور می توان همه اسپین ها را به منهای خود آنها تبدیل کرد. چنین تقارنی معنایش این است که متوسط اسپین ها در حالت تعادل می بایست صفر باشد. از طرفی می بینیم که در دمای پایین تر از گذار فاز متوسط اسپین ها یا متوسط مغناطش غیر صفر می شود و به اصطلاح شکست تقارن رخ می دهد. سوالی که پیش روی ماست این است که چگونه می بایست این شکست تقارن را با توجه به اصول مسلم مکانیک آماری توضیح دهیم؟ برای توضیح این پدیده می بایست به اصل موضوع مکانیک آماری برگردیم و مبنای رابطه ۶۵ را خوب بفهمیم.

می دانیم که رابطه (۶۵) برای سیستم هایی است که در دمای ثابت قرار دارند. این رابطه از یک اصل کلی تر در مکانیک آماری استخراج می شود که بر مبنای آن یک سیستم بسته که در حال تعادل است همه میکرو حالت هایش را با احتمال یکسان اشغال می کند. بنابراین اگر بخواهیم مبنای شکست تقارن را بفهمیم می بایست مبنای این اصل را بفهمیم. هامیلتونی یک سیستم چه در مکانیک کوانتومی و چه در مکانیک کلاسیک تابعی است که باعث تحول آن سیستم در فضای فاز می شود. فضای فاز با توجه به درجات آزادی یک سیستم تعیین می شود. به عنوان مثال برای یک گاز که شامل N اتم است هر نقطه از فضای فاز با $6N$ متغیر مشخص می شود. در هر لحظه وضعیت کل سیستم (در اینجا کل اتم های گاز) با یک نقطه در این فضای بزرگ تعیین می شود. هامیلتونی سیستم باعث حرکت این نقطه در فضای فاز می شود. به دلیل شرایط مرزی (دیواره ها) ، و هم چنین وجود نقص ها و ناخالصی ها و برهم کنش های کوچکی که الزاما در هامیلتونی ایده آل سیستم نوشته نشده اند نقطه نماینده این سیستم یک مسیر بسیار کاتوره ای را در فضای فاز طی می کند، شکل (۲.۵). به عنوان مثال در مورد یک گاز ایده آل برخورد بین ذرات و بین ذرات و دیواره ها باعث می شود که مسیر نقطه نماینده سیستم از یک خط راست به یک مسیر زیگزاکی و کاتوره ای همراه با شکستگی های خیلی زیاد تبدیل شود. فاصله زمانی بین این زیگزاک ها چیزی در حدود زمان پویش آزاد میانگین اتم ها و فاصله مکانی بین آنها در حدود فاصله پویش آزاد اتم ها است. این مسیر به تدریج و با یک مقیاس زمانی که بستگی به سیستم مورد بحث دارد فضای فاز را پر می کند. در چنین حالتی می توان گفت که وقتی که سیستم به حالت تعادل می رسد این نقطه نماینده تمام فضای فاز را کم و بیش پر می کند و در فاصله زمانی ای که ما یک کمیت ماکروسکوپی از سیستم را مشاهده می کنیم نقطه نماینده سیستم تقریبا تمام فضای فاز را طی می کند. بیایید مختصات نقطه نماینده سیستم را به اختصار با x نشان دهیم با قبول این نکته که x نشان دهنده مجموعی از مختصات است. تحت این شرایط هرگاه بخواهیم متوسط یک کمیت مثل $A(x)$ را حساب کنیم باید بنویسیم:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T} \int A(x(t)) dt \quad (۶۴)$$

که در آن T زمانی است که طول کشیده است که کمیت A اندازه گیری شود. دقت کنید که ممکن است که این زمان در مقیاس ماکروسکوپی

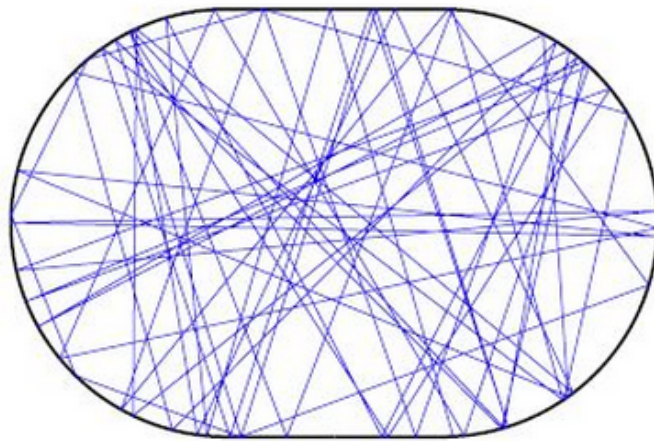
خیلی کوتاه باشد ولی در مقیاس میکروسکوپی بی اندازه بزرگ باشد. در چنین شرایطی می نویسیم:

$$\langle A \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int A(x(t)) dt. \quad (65)$$

این محاسبه به این معناست که تحول کمیت A را همراه با حرکت نقطه نماینده سیستم در تمام طول مسیر دنبال کرده و سپس متوسط کمیت A را محاسبه می کنیم. حال اگر T واقعا نسبت به زمان مشخصه تحول سیستم بزرگ باشد می توانیم این متوسط را بجای اینکه روی مسیر حرکت دنبال کنیم با اتکا به این که مسیر حرکت تمام فضای فاز را پر کرده است به صورت زیر حساب کنیم:

$$\langle A \rangle = \int dx A(x) \rho(x), \quad (66)$$

که در آن $\rho(x)$ چگالی احتمال این است که نقطه نماینده سیستم در نقطه x و در ناحیه ای به حجم dx باشد. این که این دو نوع متوسط باهم مساوی هستند در واقع یک فرض است که به آن فرض ارگودیک^{۴۴} می گوئیم. این فرض را برای سیستم های خیلی ساده مثلا سیستمی که دارای یک ذره است می توان به طور دقیق ثابت کرد ولی برای سیستم های بزرگ تر اثباتی برای آن وجود ندارد.



شکل ۲۳: نمایشی از اصل ارگودیک. در زمان های به اندازه کافی طولانی مسیر یک سیستم بسته در فضای فاز تقریبا تمام فضای فاز را می پوشاند و با احتمال یکسان می توان نقطه نماینده سیستم را در هر جایی از فضای فاز پیدا کرد.

^{۴۴}Hypothesis Ergodic

در مکانیک آماری یاد می گیریم که برای سیستمی که در دمای ثابت قرار دارد، $\rho(x)$ برابر است با

$$\rho(x) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(x)}. \quad (67)$$

حال می توانیم بفهمیم که چرا شکست تقارن رخ می دهد. فرض کنید که $H(x) = H(-x)$ باشد. این یک تقارن هامیلتونی است. بنابراین از بحث بالا به دست می آوریم که $\langle x \rangle = 0$ اما اگر در عمل ببینیم که $\langle x \rangle \neq 0$ است به این معناست که خاصیت ارگودیک برقرار نیست یا به عبارت دیگر شکسته شده است.^{۴۵} معنای این حرف این است که نقطه نماینده سیستم در طول مسیر حرکت خود به ناحیه ای رفته که در آنجا مثلاً x مقادیر مثبت دارد و در آنجا گیر افتاده است یعنی روند دینامیک در آن ناحیه آنقدر کند بوده است (در مقایسه با زمان مشاهده ما) که این نقطه نتوانسته است به ناحیه های منفی نیز برسد. به این دلیل است که متوسط مقدار غیر صفر اختیار کرده است و تقارن شکسته شده است.

۶ مسئله ها:

■ مسئله یک: (موعد تحویل: ۲۰ اردیبهشت ماه ۹۹) معمولاً در هر پدیده ای خواه در حوزه فیزیک یا خارج از آن کمیت های مختلفی با بعدهای متفاوت وجود دارند. این کمیت ها را با

$$g_1, \quad g_2, \dots, g_n \quad (68)$$

نشان می دهیم. از این کمیت ها می توان کمیت های بدون بعدی مثل

$$R_1, \quad R_2, \dots, R_k \quad (69)$$

ساخت. در این صورت قضیه اساسی آنالیز ابعادی بیان می کند که هر قانونی که رابطه بین کمیت های اولیه دارای بعد را تعیین می کند می بایست به صورت زیر نوشته شود:

$$f(R_1, R_2, \dots, R_N) = 1 \quad (70)$$

^{۴۵}Ergodicity Breaking

که در آن f یک تابع است که شکل آن را نمی توان توسط آنالیز ابعادی بدست آورد. در صورتی که تنها یک کمیت بدون بعد در این پدیده وجود داشته باشد (که در بعضی موارد این چنین است) رابطه بالا تبدیل می شود به

$$f(R) = 1, \quad (71)$$

و یا

$$R = \text{constant}. \quad (72)$$

مقدار این ثابت معمولاً از مرتبه یک است و خیلی غیر طبیعی است که اندازه آن مثلاً از مرتبه 10^3 یا 10^{-3} باشد.

الف: با استفاده از آنالیز ابعادی پریود نوسانات کوچک یک آونگ به طول l را در روی کره زمین بدست آورید. اگر دامنه نوسانات آونگ بلند باشد با استفاده از آنالیز ابعادی چه نتایجی می توانید بدست آورید.

ب: با استفاده از آنالیز ابعادی قضیه فیثاغورث را ثابت کنید.

پ: با استفاده از آنالیز ابعادی قانون سوم کپلر در منظومه شمسی را ثابت کنید.

د: از کمیت های بنیادی اتمی شامل m ، c ، e ، $\hbar$ که در آن e و m به ترتیب بار الکتریکی و جرم الکترون هستند کمیت هایی بسازید که دارای بعد طول، بعد سرعت و بعد زمان باشند.

■ مسئله دو: (موعد تحویل: ۲۰ اردیبهشت ماه ۹۹) در سال ۱۹۴۷ مجموعه ای از عکس ها در مجله لایف منتشر شد. این عکس ها شعاع یک موج شوکی کروی شکل را که در اثر یک انفجار اتمی منتشر می شود در زمان های متوالی به فاصله یک میلی ثانیه نشان می داد. جدول زیر شعاع این موج شوکی را در زمان های مختلف نشان می دهد:

با فرض اینکه سطح زمین در انتشار این موج کروی تاثیر چندانی ندارد و هم چنین با فرض اینکه سرعت انتشار فقط به میزان انرژی انفجار E و چگالی هوای بیرون از موج یعنی ρ بستگی دارد، با استفاده از آنالیز ابعادی رابطه ای برای سرعت انتشار موج بدست آورید. با استفاده

جدول ۱: شعاع قارچ اتمی بر حسب زمان

$R(m)$	$Time(ms)$	$R(m)$	$Time(ms)$
46.9	1.79	11.1	0.10
48.7	1.93	19.9	0.24
59.0	3.26	25.4	0.38
62.9	3.80	28.8	0.52
64.3	4.07	61.1	3.53
65.6	4.34	31.9	0.66
67.3	4.61	34.2	0.80
106.5	15.0	36.3	0.94
130.0	24.0	38.9	1.08
145.0	35.0	41.0	1.22
175.0	50.0	42.8	1.36
185.0	62.0	44.4	1.50
		46.0	1.65

از جدول فوق مقدار انرژی آزاد شده در انفجار را تخمین بزنید. اگر چه این عکس ها در سال ۱۹۴۷ از حالت سری درآمدند ولی با این تجزیه تحلیل ابعادی فیزیکدان های کشور رقیب امریکا (شوروی آن زمان) توانستند تخمینی از انرژی بمب اتمی منفجر شده بدست آورند. مقدار واقعی انرژی انفجار سالها بعد از حالت سری خارج شد.