

# درس پنجم : مکانیک آماری کوانتومی

وحید کریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۱۸ دی ۱۳۹۸

## ۱ مقدمه

همه بحث ما تا کنون منحصر به مکانیک آماری سیستم های کلاسیک بوده است و خصوصیات کوانتومی دنیای میکروسکوپی را تقریباً نادیده گرفته ایم. آیا این کار مجاز است؟ آیا می توان در مطالعه مکانیک آماری یک گاز، مولکول ها و اتم ها را مثل گوی های کوچکی در نظر گرفت که تابع قوانین حرکت نیوتن هستند؟ آیا می توان در مطالعه مکانیک آماری مجموعه ای از نوسانگرها، گسسته بودن سطوح انرژی را نادیده گرفت؟

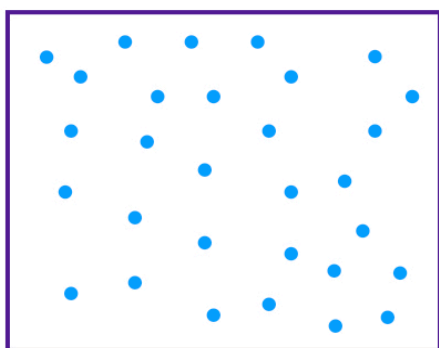
پاسخ این سوال هم آری است و هم نه؟ در واقع استفاده از مکانیک کوانتومی بسته به شرایط دما و فشار و نظایر آن دارد. ممکن است که شرایط میکروسکوپی نظیر چگالی ( یا فشار ) و دما به گونه ای باشد که تقریب کلاسیک برای توصیف رفتار ذرات میکروسکوپی تقریب بسیار خوبی باشد. به عنوان مثال برای یک مجموعه از نوسانگرهای هارمونیک که همگی فرکانس یکسان دارند، هرگاه دما چنان باشد که  $kT \gg \hbar\omega$  ، گسسته بودن سطوح انرژی نوسانگر دیده نمی شوند و مکانیک آماری کلاسیک در این حد از دما همان نتایجی را بدست می دهد که مکانیک آماری کوانتومی.

در مورد یک گاز یا مایع هم تنها تحت شرایط معینی است که مکانیک آماری کلاسیک کافی نیست و می بایست از مکانیک آماری کوانتومی استفاده کرد. اگر ذرات گاز دارای جرم  $m$  باشند، می دانیم که طول موج گرمایی آنها یعنی طول موج دوبروی آنها در دمای  $T$  برابر است با

هرگاه  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$  این طول موج از فاصله بین ذرات بسیار کمتر باشد، می توان از اثرات کوانتومی صرف نظر کرد، یعنی ذرات را مثل گوی های کوچک کلاسیک و جایگزیده در نظر گرفت که تابع موج فضایی آنها هیچ گونه گستردگی فضایی ندارد. بنابراین ملاکی که تعیین می کند آیا رفتار یک گاز کوانتومی است یا کلاسیکی نسبت فاصله متوسط بین ذرات یعنی  $l$  به طول موج گرمایی یعنی  $\lambda$  است. می دانیم که  $l = n^{1/3}$ ؛ که در آن  $n$  چگالی است. بنابراین به ملاک زیر می رسم:

$$\lambda n^3 \ll 1 \rightarrow \text{Classical Behaviour}$$

$$\lambda n^3 \gg 1 \rightarrow \text{Quantum Behaviour.} \quad (1)$$



$$n\lambda^3 \ll 1$$



$$n\lambda^3 \gtrsim 1$$

شکل ۱: شکل سمت چپ: گاز در دمای بالا و یا چگالی پایین، طول موج گرمایی در مقایسه با فاصله بین ذرات کوچک است. شکل سمت راست: گاز در دمای پایین یا چگالی بالا، طول موج گرمایی در مقایسه با فاصله بین ذرات بزرگ یا قابل مقایسه است. گاز اول کلاسیک و گاز دوم کوانتومی است.

## ۲ میکرو حالت های کوانتومی - ماتریس چگالی

وضعیت یک سیستم کلاسیک که از  $N$  ذره تشکیل شده است، در هر لحظه با یک نقطه در فضای فاز  $6N$  بعدی توصیف می شود. این نقطه با مختصات  $(r_1, r_2, \dots, r_N, p_1, p_2, \dots, p_N)$  مشخص می شود. در مکانیک آماری کلاسیک و در آزمایش کانونیک دیدیم که چگالی احتمال این که در حالت تعادل سیستم در این نقطه باشد برابر است با:

$$P(r, p) = \frac{1}{Z} \text{tr}(e^{-\beta H}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(r, p)} \quad (۲)$$

که در آن  $H$  هامیلتونی یک سیستم ایده آل است که در آن برهم کنش های بسیار جزئی بین ذرات در نظر گرفته نشده است. این برهم کنش های جزئی <sup>۱</sup> همان هایی هستند که باعث رفتار تصادفی سیستم و پخش شدن در تمام فضای فاز و ایجاد خاصیت ارگودیک می شوند. اگر این برهم کنش های جزئی (برخورد ذرات با یکدیگر با دیواره های ظرف) نبود، سیستمی که با هامیلتونی  $H = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}$  توصیف می شد؛ مسیرش در فضای فاز یک خط راست می شد. به طریق مشابه در یک سیستم کوانتومی میکرو حالت ها با ویژه انرژی های یک هامیلتونی ایده آل توصیف می شوند که مثل حالت کلاسیک برهم کنش های باقیمانده در آن در نظر گرفته نشده است. اگر این برهم کنش ها نباشند، سیستمی که با هامیلتونی ایده آل  $H$  توصیف می شود، هرگاه در یک ویژه حالت انرژی قرار بگیرد همواره در همان ویژه حالت باقی می ماند. اما برهم کنش های باقیمانده باعث می شوند که سیستم دائماً روی ویژه حالت های هامیلتونی جابجا شود و نهایتاً روی تمام ویژه حالت ها پخش شده و حالت معینی نداشته باشد. بنابراین اگر ویژه حالت های هامیلتونی را با  $|\psi_i\rangle$  نشان دهیم که در آن اندیس  $i$  نشان دهنده تمام اعداد کوانتومی لازم برای مشخص کردن ویژه حالت هاست، یعنی

$$H|\psi_i\rangle = E_i|\psi_i\rangle, \quad (۳)$$

آنگاه در حالت تعادل و در دمای ثابت  $T$  سیستم با احتمال  $P_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$  در حالت  $|\psi_i\rangle$  است. در چنین حالتی می گوئیم سیستم در یک حالت خالص <sup>۲</sup> نیست بلکه در یک حالت آمیخته <sup>۳</sup> ماست. هرگاه بخواهیم متوسط کمیتی مثل  $A$  را اندازه بگیریم به ترتیب زیر عمل می کنیم: قرار می دهیم:

$$\bar{A} = \sum_i P_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle, \quad (۴)$$

---

<sup>۱</sup> Residual Interactions

<sup>۲</sup> Pure State

<sup>۳</sup> Mixed State

که در آن  $\langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle$  یک متوسط کوانتومی است، زیرا حتی وقتی که سیستم در یک حالت معین  $|\psi_i\rangle$  باشد، باز هم مقدار مشاهده پذیر  $A$  معین نیست. در عبارت بالا بعد از متوسط کوانتومی متوسط روی آنزامل گرمایی گرفته شده است. می توان عبارت ۳ را به صورت بهتری نوشت. از آنجا که  $|\psi_i\rangle$  ها یک پایه متعامد تشکیل می دهند، می توانیم بنویسیم:

$$\bar{A} = \text{tr} \left( \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{A}) \quad (5)$$

که در آن

$$\hat{\rho} := \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (6)$$

ماتریس چگالی<sup>۴</sup> خوانده می شود. باید دقت کنیم که ماتریس چگالی برای هر تابع توزیع  $\{P_i\}$  و برای هر مجموعه بردارهای  $\{|\psi_i\rangle\}$  تعریف می شود. ( در صورتی که خواننده بخواهد دانش کامل تر و دقیق تری در باره ماتریس چگالی پیدا کند، می تواند به درسنامه « رایانش کوانتومی » مراجعه کند). برای آنزامل کانونیک داریم:  $P_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$ . بنابراین ماتریس چگالی برابر می شود با:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \sum_i e^{-\beta E_i} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (7)$$

و یا

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \quad (8)$$

که در آن

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} = \text{tr}(e^{-\beta \hat{H}}). \quad (9)$$

### ۳ فضای هیلبرت سیستم های بس ذره ای

در این بخش به اختصار فضای هیلبرت یک سیستم بس ذره ای را شرح می دهیم. شرح مفصل تری را خواننده می تواند در درس نامه مکانیک کوانتومی بیابد.

Density Matrix<sup>۴</sup>

فضای هیلبرت یک ذره را با  $V$  نشان می دهیم و فضای هیلبرت یک سیستم  $N$  ذره ای را که متشکل از  $N$  ذره تمیز پذیر است با  $V_N$  نشان می دهیم. در این صورت بنا بر مکانیک کوانتومی فضای هیلبرت  $V_N$  برابر است با:

$$V_N = V \otimes V \otimes V \dots V \equiv V^{\otimes N} \quad (10)$$

که در آن  $\otimes$  نشان دهنده ضرب تانسوری فضاهاست. هرگاه بردارهای پایه  $V$  را با  $|e_i\rangle$  نشان دهیم بردارهای پایه  $V^{\otimes N}$  به صورت  $|e_{i_1}\rangle \otimes |e_{i_2}\rangle \otimes \dots \otimes |e_{i_N}\rangle$  خواهد بود. هرگاه بعد  $V$  برابر با  $d$  باشد، بعد  $V^{\otimes N}$  برابر با  $d^N$  خواهد بود. هرگاه عملگری مثل  $\hat{A}$  را در فضای هیلبرت یک ذره تصور کنیم، عملگر  $A_i$  نشان دهنده اثر  $\hat{A}$  روی ذره  $i$  ام است و به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{A}_i = I \otimes I \otimes \dots \otimes \hat{A} \otimes \dots \otimes I, \quad (11)$$

از خواص ضرب تانسوری می دانیم که اگر  $i \neq j$  انگاه  $\hat{A}_i \hat{A}_j = \hat{A}_j \hat{A}_i$ .

■ مثال: فرض کنید که با سیستمی سرو کار داریم که در آن ذرات با یکدیگر برهم کنش ندارند. این ذرات البته می توانند هرکدام با محیط خارج برهم کنش کنند. در چنین شرایطی هامیلتونی به شکل زیر نوشته می شود:

$$H^{(N)} = \sum_{i=1}^N H_i \quad (12)$$

که در آن  $H$  در مکان  $i$  ام عمل می کند و بقیه عملگرهای  $I$  روی بقیه ذرات عمل می کنند. در این صورت تابع پارش برابر خواهد بود با:

$$Z_N = \text{tr}(e^{-\beta H^{(N)}}) = \text{tr}(e^{-\beta(H_1+H_2+\dots+H_N)}). \quad (13)$$

از آنجا که  $H_i$  ها باهم جابجا می شوند خواهیم داشت:

$$Z_N = \text{tr}(e^{-\beta H_1} e^{-\beta H_2} \dots e^{-\beta H_N}). \quad (14)$$

اما براحتی می توان دید که

$$e^{-\beta H_1} = e^{-\beta H} \otimes I \otimes I \dots \otimes I, \quad (15)$$

و با استفاده از خواص ضرب تانسوری :

$$e^{-\beta H_1} e^{-\beta H_2} \dots e^{-\beta H_N} = e^{-\beta H} \otimes e^{-\beta H} \otimes e^{-\beta H} \dots e^{-\beta H}. \quad (16)$$

در نتیجه

$$Z_N = \text{tr}(e^{-\beta H} \otimes e^{-\beta H} \otimes e^{-\beta H} \dots e^{-\beta H}) = \text{tr}(e^{-\beta H})^N. \quad (17)$$

بنابراین مثل حالت کلاسیک در این حالت هم تابع پارش  $N$  ذره ای توان  $N$  ام تابع پارش یک ذره ای است یعنی  $Z_N = Z_1^N$  که در آن

$$Z_1 = \text{tr}(e^{-\beta H})$$

■ مثال: ذرات آزاد تمیز پذیر: برای چنین سیستمی داریم:

$$Z_N = Z_1^N \quad (18)$$

که در آن

$$Z_1 = \text{tr}(e^{-\beta \frac{P^2}{2m}}) \quad (19)$$

بنابر رابطه بالا  $Z_1$  برابر است با:

$$Z_1 = \sum_i e^{-\beta E_i} \quad (20)$$

که در آن  $E_i$  ها ویژه مقادیرهای انرژی یک ذره آزاد است و  $i$  نشان دهنده اعداد کوانتومی یک ذره است. برای یک ذره که در یک چاه  $d$

بعدی با اضلاعی به طول  $L$  زندگی می کند،  $d$  تا عدد کوانتومی وجود دارد و انرژی برابر است با:

$$E_{\mathbf{n}} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_d^2). \quad (21)$$

در شرایط مرزی دیواره های بی نهایت سخت، تابع موج مربوط به چنین ویژه حالتی برابر است با:

$$\psi_{\mathbf{n}} = A \sin \frac{n_1 \pi}{L} x_1 \sin \frac{n_2 \pi}{L} x_2 \dots \sin \frac{n_d \pi}{L} x_d, \quad (22)$$

که در آن  $A$  یک ثابت بهنجارش است. بنابراین تابع پارش برابر می شود با:

$$Z_1 = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_d} e^{-\beta \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_d^2)} := Q^d \quad (23)$$

که در آن  $Q$  برابر است با:

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2}. \quad (24)$$

این جمع را با تقریب خوبی می توان به ی انتگرال گاوسی تبدیل و آن را محاسبه کرد. اگر متغیر  $k$  را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$k = \frac{\hbar\pi}{L}n, \quad (25)$$

متوجه می شویم که با توجه به بزرگ بودن  $L$  وقتی که  $n$  تغییر می کند، تغییر  $k$  بسیار اندک است. بنابراین مطابق زیر می توان جمع را به صورت زیر انجام داد:

$$Q = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Delta n}{\Delta k}\right) \Delta k e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}, \quad (26)$$

که در آن  $\frac{\Delta n}{\Delta k}$  تعداد نقاط درون یک بازه ی  $\Delta k$  است. این تعداد را می توان با استفاده از رابطه ی  $k = \frac{\pi}{L}n$  بدست آورد. بنابراین در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L}{\pi} \Delta k e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} = \frac{L}{\pi} \int_0^{\infty} dk e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\beta \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi m}{\hbar^2 \beta}} = \frac{L}{\lambda}, \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن  $\lambda$  طول موج گرمایی است که بنا بر تعریف برابر است با :

$$\lambda := \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}. \quad (28)$$

در نتیجه تابع پارش یک ذره یعنی  $Z_1$  برابر می شود با:

$$Z_1 = \frac{V}{\lambda^d} \quad (29)$$

و تابع پارش گاز  $N$  ذره ای برابر خواهد شد با:

$$Z_N = \left(\frac{V}{\lambda^d}\right)^N. \quad (30)$$

نکته قابل توجه در این جا این است که ضریب  $h$  که قبلا در بررسی آنرا بل کانونیک برای سیستم های کلاسیک و برای تبدیل حجم فضای فاز به تعداد وارد شده بود و در آنجا از استدلال های شهودی مربوط به اصل عدم قطعیت استفاده کرده بودیم در این جا به طور بدیهی و طبیعی در تابع پارش وارد می شود. اما نباید انتظار داشته باشیم که ضریب  $\frac{1}{N!}$  که در آنجا به خاطر تمیز ناپذیری ذرات وارد کرده بودیم در این جا نیز ظاهر شود زیرا در این جا از همان ابتدا فرض کرده ایم که ذرات تمیز پذیرند. بنابراین اگر بخواهیم تابع پارش بدست بیاوریم

که در چگالی های کم معتبر باشد و تمیز ناپذیری ذرات را نیز در بر داشته باشد، باید همچنان ضریب  $\frac{1}{N!}$  را در این جا اضافه کنیم و تابع پارش را به صورت زیر بنویسیم:

$$Z_N = \frac{1}{N!} \left( \frac{V}{\lambda^d} \right)^N. \quad (31)$$

پس از این مقدمات به مسئله مهم ذرات یکسان می پردازیم و آن را از دیدگاه دقیق کوانتومی بررسی می کنیم.

## ۴ ذرات یکسان در مکانیک کوانتومی

تابع موج یک سیستم دو ذره ای را به صورت  $\psi(r_1, r_2)$  می نویسیم که در آن  $r_1$  مکان ذره اول و  $r_2$  مکان ذره دوم است. این توصیف وقتی درست است که لااقل از نظر ذهنی ما بتوانیم هویت ذرات 1 و 2 را از هم تمیز بدهیم. این تشخیص اگر چه در مکانیک کلاسیک که ذرات مثل گوی های کوچک هستند امکان پذیر است، ولی در مکانیک کوانتومی که ذرات با بسته های موج توصیف می شوند همواره امکان پذیر نیست. حتی اگر در یک لحظه ذرات را از هم تمیز بدهیم و آن ها را به طور ذهنی شماره گذاری کنیم در اثر گذشت زمان تابع موج این ذرات پخش شده و در هم فرو می روند و بعد از جدا شدن بسته های موج دیگر نمی توانیم ذرات را شناسایی کنیم. این نکته به صورت شماتیک در شکل (۱) نشان داده شده است که برخورد دو ذره یکسان را نشان می دهد. بعد از برخورد دو ذره ما واقعاً نمی دانیم که کدام ذره ذره ی 1 و کدام ذره ذره ی 2 است. بنابراین توصیف درست از یک سیستم دو ذره ای می بایست توسط تابع موجی داده شود که این تمیز ناپذیری ذرات در آن در نظر گرفته شده باشد. بنابراین یک تابع موج دو ذره ای مثل  $\psi(r_1, r_2)$  می بایست تنها بتواند احتمال وجود یک ذره را در نقطه  $r_1$  و یک ذره را در نقطه  $r_2$  معین کند نه این که بگوید کدام ذره در کدام نقطه است. در نتیجه می بایست داشته باشیم:

$$|\psi(r_1, r_2)|^2 = |\psi(r_2, r_1)|^2 \quad (32)$$

که به معنای این است که

$$\psi(r_2, r_1) = e^{i\theta} \psi(r_1, r_2). \quad (33)$$



اگر جایگشت بالا را یک بار دیگر تکرار کنیم به این رابطه می‌رسیم که

$$\psi(r_1, r_2) = e^{2i\theta} \psi(r_1, r_2) \quad (34)$$

که نتیجه می‌دهد  $e^{i\theta} = \pm 1$  یعنی تابع موج دو ذره ای می‌بایست در شرایط زیر صدق کند:

$$\psi(r_2, r_1) = \pm \psi(r_1, r_2). \quad (35)$$

این که تابع موج می‌بایست متقارن یا پادمقارن باشد بستگی به نوع ذرات دارد. برای فرمیون‌ها (یعنی ذراتی که اسپین آنها نیمه صحیح است مثل الکترون، نوترون، ایزوتوپ هلیوم ۳) تابع موج می‌بایست پادمقارن و برای بوزون‌ها (یعنی ذراتی که اسپین آنها صحیح است مثل فوتونها و ایزوتوپ هلیوم ۴) تابع موج می‌بایست متقارن باشد. به یک نکته مهم می‌بایست توجه کرد و آن این که متقارن یا پادمقارن بودن خاصیت کل تابع موج است نه فقط قسمت فضایی تابع موج.

■ دو ذره یکسان در نظر می‌گیریم که با یکدیگر برهم کنش ندارند. هرگاه ویژه حالت‌های انرژی را برای یک ذره با  $u_n$  نشان دهیم یعنی

$$H^{(1)}|u_n\rangle = \epsilon_n|u_n\rangle \quad (36)$$

که در آن  $n$  اعداد کوانتومی مربوط به ویژه حالت‌های یک ذره است، آنگاه ویژه حالت‌های انرژی برای ۲ ذره را به طریق ساده ای می‌توان ساخت. می‌دانیم که با ضرب کردن این ویژه حالت‌ها در یکدیگر ویژه حالت‌های  $N$  ذره ای بدست می‌آید. یعنی

$$|\psi_{n_1, n_2}\rangle = |u_{n_1}\rangle \otimes |u_{n_2}\rangle \quad (37)$$

یک ویژه حالت انرژی است به این معنا که :

$$H^{(2)}|\psi_{n_1, n_2}\rangle = (\epsilon_{n_1} + \epsilon_{n_2})|\psi_{n_1, n_2}\rangle. \quad (38)$$

اما ویژه حالت (۳۸) برای ذرات یکسان فرمیونی می‌بایست کاملاً پادمقارن و برای ذرات یکسان بوزونی می‌بایست کاملاً متقارن باشد تا یک ویژه حالت درست برای این گونه سیستم‌ها بدست آید. بنابراین ویژه حالت‌های بوزونی و فرمیونی را به شکل زیر قرار می‌دهیم.

برای بوزون‌ها:

$$|\psi_{n_1, n_2}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u_{n_1}\rangle \otimes |u_{n_2}\rangle + |u_{n_2}\rangle \otimes |u_{n_1}\rangle), \quad (39)$$

برای فرمیون ها:

$$|\psi_{n_1, n_2}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u_{n_1}\rangle \otimes |u_{n_2}\rangle - |u_{n_2}\rangle \otimes |u_{n_1}\rangle). \quad (40)$$

رابطه (40) و (41) تنها بیان می کنند که یک ذره در تراز انرژی  $n_1$  و یک ذره در تراز انرژی  $n_2$  است و نمی گویند که کدام ذره در کدام تراز انرژی است. هرگاه بخواهیم تابع موج فضایی را بدست بیاوریم کافی است که طرفین رابطه های بالا را در  $\langle x_1, x_2 | := \langle x_1 | \otimes \langle x_2 |$  ضرب کنیم و بدست بیاوریم:

$$\psi_{n_1, n_2}^\pm(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_{n_1}(x_1)u_{n_2}(x_2) \pm u_{n_2}(x_1)u_{n_1}(x_2)). \quad (41)$$

تقارن یا پادتقارن تابع موج اثرات فیزیکی بسیار مهمی دارد. برای فهم این اثرات نخست تابع موج دو ذره ای را برای فرمیون ها در نظر می گیریم. از رابطه 42 بدست می آوریم:

$$\psi_{n_1, n_2}(x, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_{n_1}(x)u_{n_2}(x) - u_{n_2}(x)u_{n_1}(x)) = 0, \quad (42)$$

که به این معناست که دو فرمیون تمایل ندارند که در یک نقطه قرار بگیرند. در حقیقت می توان نشان داد که تابع موج  $\psi_{n_1, n_2}(x_1, x_2)$  با کم شدن  $|x_1 - x_2|$  کاهش می یابد. مثل این است که فرمیون ها تمایل به دفع یکدیگر دارند. بوزون ها برعکس رفتار کاملاً متفاوتی دارند. بازهم از همان رابطه 42 بدست می آوریم:

$$\psi_{n_1, n_2}(x, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} ((u_{n_1}(x)u_{n_2}(x) + u_{n_2}(x)u_{n_1}(x)) = \sqrt{2}u_{n_1}(x)u_{n_2}(x) \quad (43)$$

و در نتیجه

$$|\psi_{n_1, n_2}(x, x)|^2 = 2 |u_{n_1}(x)|^2 |u_{n_2}(x)|^2 \quad (44)$$

و ضریب ۲ نشان دهنده ی این است که احتمال وجود دو ذره بوزون در یک نقطه دو برابر وقتی است که این ذرات یکسان نبودند. بنابراین مثل این است که بوزون ها یکدیگر را جذب می کنند. این دو خاصیت یعنی دفع کردن فرمیون ها و جذب کردن بوزون ها در رفتار ماکروسکوپی سیستم های فرمیونی و بوزونی باعث پدیده های بسیار متفاوت با خواص خیلی جالب خواهد شد. در پایان این بخش بهتر است که تعمیم رابطه 42 را برای  $N$  ذره بنویسیم. برای  $N$  ذره فرمیونی خواهیم داشت:

$$\Psi_{\mathbf{n}}^- = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^{|P|} u_{n_1}(x_{P(1)}) u_{n_2}(x_{P(2)}) \cdots u_{n_N}(x_{P(N)}) \quad (45)$$

که در آن جمع روی تمام جایگشت های  $P$  از  $N$  شاخص  $1, 2, \dots, N$  است و  $|P|$  برای جایگشت های زوج برابر با 0 و برای جایگشت های فرد برابر با 1 است. عبارت بالا را به شکل یک دترمینان اسلیتر<sup>۵</sup> می گویند نیز می توان نوشت:

$$\Psi_{\vec{n}}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} u_{n_1}(x_1) & u_{n_1}(x_2) & \dots & u_{n_1}(x_N) \\ u_{n_2}(x_1) & u_{n_2}(x_2) & \dots & u_{n_2}(x_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n_N}(x_1) & u_{n_N}(x_2) & \dots & u_{n_N}(x_N) \end{vmatrix} \quad (46)$$

برای بوزون ها نیز می توان نوشت

$$\Psi_{\vec{n}}^+ = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P u_{n_1}(x_{P(1)}) u_{n_2}(x_{P(2)}) \dots u_{n_N}(x_{P(N)}) \quad (47)$$

مشابه با فرمیون ها این تابع را نیز می توان به صورت فشرده تر نوشت. حاصل آن چیزی است که در ریاضیات پرماننت<sup>۶</sup> خوانده می شود. ساختمان آن درست مثل دترمینان است با این تفاوت که در ترکیب درایه های ماتریس هیچ نوع علامت منفی به کار نمی رود.

## ۵ میکرو حالت های مربوط به ذرات یکسان

دیدیم که اگر فضای هیلبرت یک ذره را با  $V$  نشان دهیم، فضای هیلبرت یک سیستم  $N$  ذره ای متشکل از بوزون ها یا فرمیون ها فضای ضرب تانسوری  $V \otimes V \otimes \dots \otimes V$  نیست بلکه برای بوزون ها تنها قسمت متقارن این فضا و برای فرمیون ها تنها قسمت پادمتقارن این فضا فضای هیلبرت فیزیکی است. هرگاه بردارهای پایه فضای  $V$  را با  $|\alpha\rangle$  نشان دهیم بردارهای پایه فضا برای فرمیون ها به صورت زیر است:

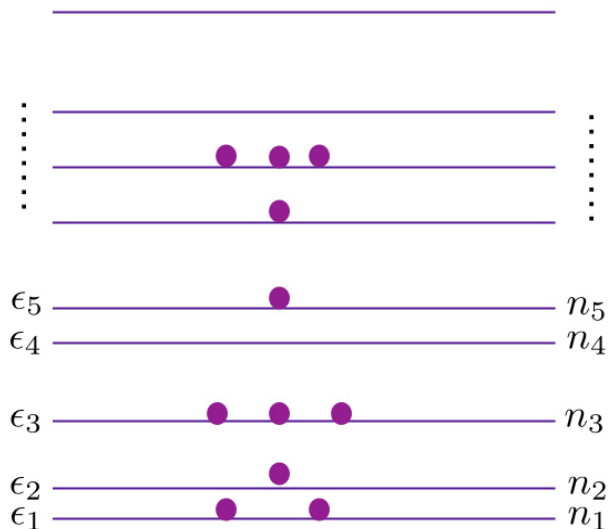
$$|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle_- := \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^{|P|} |\alpha_{P(1)}\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_{P(N)}\rangle \quad (48)$$

و بردارهای پایه ی فضای هیلبرت بوزون ها به صورت زیر است:

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_N\rangle_+ := \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P |\alpha_{P(1)}\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_{P(N)}\rangle. \quad (49)$$

<sup>۵</sup>Slater Determinant  
<sup>۶</sup>Permanent

برای این فضاها دیگر رابطه ی  $Z_N = Z_1^N$  صحیح نیست. یعنی محاسبه تابع پارش  $N$  ذره ای به تابع پارش یک ذره ای کاهش نمی یابد. بنابراین می بایست تابع پارش  $N$  ذره ای را با در نظر گرفتن توابع موج متقارن یا پادمتقارن محاسبه کرد. اما معلوم است که چنین توصیفی از میکروحوالت ها برای محاسبه تابع پارش دشوار و غیر مفید است. بنابراین بهتر است در جستجوی یک توصیف ساده تر باشیم. این توصیف ساده تر چیزی است که آن را نمایش عدد جمعیت یا نمایش عدد اشغال<sup>۷</sup> می نامند. در این نمایش نمی گوییم که کدام ذره در کدام تراز انرژی است بلکه می گوییم در هر تراز انرژی چند تا ذره وجود دارد. شکل (۲). بنابراین در این نمایش هر میکروحوالت با یک دنباله از اعداد



شکل ۲: روش صحیح تعیین میکروحوالت ها برای یک گاز کوانتومی: چه تعداد ذره در هر تراز انرژی قرار دارد.

$$(n_1, n_2, n_3, \dots, n_K) \quad (50)$$

مشخص می شود که در آن  $K$  تعداد حالت های انرژی یک ذره است. البته بسته به نوع طیف یک ذره مثلا برای ذره آزاد  $K$  می تواند متناهی یا نامتناهی باشد. آنچه که تفاوت فرمیون ها و بوزون ها را مشخص می کند آن است که برای بوزون ها تعداد ذرات درون هر لایه انرژی دارای هیچ

<sup>۷</sup>Occupation Number Representation

محدودیتی نیست یعنی  $n_i$  از صفر تا بی نهایت تغییر می کند ولی برای فرمیون ها هر عدد  $n_i$  تنها می تواند 0 یا 1 باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \text{for bosons} & \quad 0 \leq n_i < \infty \\ \text{for fermions} & \quad n_i = 0, 1. \end{aligned} \quad (51)$$

حال هر میکروحالت از نوع بالا انرژی اش برابر است با:

$$E = n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots + n_k \epsilon_k. \quad (52)$$

در نتیجه تابع پارش به صورت زیر خواهد بود:

$$Z_N = \sum'_{n_1, n_2, \dots, n_k} e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots + n_k \epsilon_k)} \quad (53)$$

که در آن  $\sum'$  به معنای این است که این جمع یک جمع مقید است به این معنا که جمع روی تمام مقادیری است که در شرط  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$  صدق می کنند. این قید محاسبه تابع پارش را با دشواری مواجه می کند. این جاست که توسل به آنزامل گراند کانونیک به کمک ما می آید و ما می توانیم تابع پارش گراند کانونیک را برای بوزون ها و فرمیون ها براحتی حساب کنیم. البته می بایست برای این سادگی بهایی پرداخت کنیم که بعداً به آن توجه خواهیم کرد. بنابراین می نویسیم:

$$\begin{aligned} Q(z) &= \sum_{N=0}^{\infty} Z_N \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum'_{n_1, n_2, \dots, n_k} z^{n_1 + n_2 + \dots + n_k} e^{-\beta(n_1 \epsilon_1 + n_2 \epsilon_2 + \dots + n_k \epsilon_k)} \end{aligned} \quad (54)$$

از آنجا که روی مقادیر  $N$  نیز جمع می زنیم، دیگر هیچ محدودیتی روی  $n_i$  ها وجود ندارد، یعنی  $Q$  برابر خواهد بود با:

$$Q(z) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_K} (ze^{-\beta \epsilon_1})^{n_1} (ze^{-\beta \epsilon_2})^{n_2} \dots (ze^{-\beta \epsilon_k})^{n_k} \quad (55)$$

و در نتیجه

$$Q(z) = \prod_{i=1}^K \sum_n (ze^{-\beta \epsilon_i})^n \quad (56)$$

و از آنجا با توجه به قیدی که روی اعداد  $n_i$  برای بوزون ها و فرمیون ها وجود دارد توابع پارش بوزنی و فرمیونی را به ترتیب زیر بدست می آوریم:

$$Q^+(z) = \prod_{i=1}^K \frac{1}{1 - ze^{-\beta \epsilon_i}} \quad \text{Bosons} \quad (57)$$

و

$$Q^-(z) = \prod_{i=1}^K 1 + ze^{-\beta\epsilon_i} \quad \text{Fermions.} \quad (58)$$

به این ترتیب تابع پارش گراندکانونیک برای فرمیون ها و بوزون ها براحتی محاسبه می شود. از آنجا که همه کمیت ها از لگاریتم این تابع پارش بدست می آید بهتر است که لگاریتم این توابع را بنویسیم:

■ برای فرمیون ها:

$$\ln Q(z) = \sum_{i=1}^K \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon_i}) \quad (59)$$

■ برای بوزون ها:

$$\ln Q(z) = - \sum_{i=1}^K \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_i}) \quad (60)$$

به نظر می رسد که تابع پارش بوزون ها و فرمیون ها تفاوت خیلی کمی با هم دارند ولی خواهیم دید که همین تفاوت خیلی کم باعث پدیده های کلی متفاوتی برای بوزون ها و فرمیون ها می شود. در دو بخش آینده به ترتیب خواص کلی گاز فرمیونی و گاز بوزونی را مطالعه می کنیم. البته مطالعه ما منحصر به خصوصیات کلی و خیلی کوتاه است. مطالعه تفصیلی این موضوع را به فصل های آینده موکول می کنیم. از این به بعد هم چون در دو بخش جداگانه فرمیون ها و بوزون ها را بررسی می کنیم، تابع پارش هر دوی آنها را با  $Q(z)$  نشان می دهیم. در هر بخش معلوم است که ما با کدام تابع پارش سروکار داریم و دیگر نیازی به نوشتن اندیس های مثبت و منفی نیست.

## ۶ فرمیون ها

نخستین چیزی که محاسبه می کنیم، تعداد ذرات است. البته به طور دقیق تر باید بگوییم متوسط تعداد ذرات چون که در آنزامل گراندکانونیک تعداد ذرات ثابت نیست و افت و خیز می کند، اما از آنجا که میزان افت و خیز کم است به جای متوسط ذرات یعنی  $\bar{N}$  همان نماد  $N$  را به کار می بریم. بدست می آوریم:

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln Q = \sum_i \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} + 1} = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \quad (61)$$

سپس انرژی را حساب می‌کنیم:

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q = \sum_i \frac{\epsilon_i}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \quad (62)$$

و بالاخره از روابط آنزامل گرانددکانونیک می‌دانیم که

$$\frac{PV}{kT} = \sum_i \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon_i}). \quad (63)$$

سه معادله فوق به طور ضمنی همه اطلاعات لازم در باره یک سیستم فرمیونی را بدست می‌دهند. تنها نکته مشکل این است که می‌بایست پارامتر  $z$  را بین این معادلات حذف کرد تا بتوان به روابط صریحی برای انرژی و معادله حالت بر حسب تعداد ذرات رسید. به عبارت بهتر می‌بایست از رابطه (۶۱) پارامتر  $z$  را بر حسب تعداد ذرات یعنی  $N$  بدست آورد و سپس این پارامتر را در دو معادله دیگر یعنی معادله انرژی و فشار قرار داد تا به معادله حالت و معادله انرژی رسید. با توجه به فرم این معادلات این کار به صورت صریح ممکن نیست. اما در دمای صفر می‌توان این محاسبات را به صورت دقیق انجام داد و این کاری است که در ادامه این درس انجام خواهیم داد. قبل از آن نیز می‌توانیم به فهم بعضی خواص و روابط کلی بسنده کنیم. مطالعه گاز فرمی در دمای غیر صفر را به درس‌های آینده موقوف می‌کنیم. از رابطه (۶۱) می‌توان نتیجه گرفت که متوسط تعداد ذرات در هر تراز انرژی برابر است با:

$$\bar{n}_i = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} + 1} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \quad (64)$$

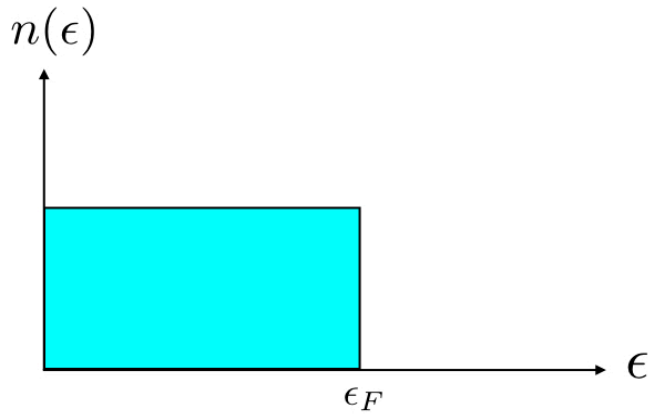
این تعبیر با رابطه (۶۲) نیز تایید می‌شود.

■ تمرین: با مشتق گرفتن از تابع پارش گرانددکانونیک نسبت به  $\beta\epsilon_i$  متوسط  $\langle n_i \rangle$  و سپس واریانس تعداد ذرات را در هر لایه بدست آورید.

از آنجا که برای فرمیون‌ها  $0 \leq \bar{n}_i \leq 1$  نتیجه می‌گیریم که محدوده تغییرات  $z$  برای فرمیون‌ها ناحیه  $0 \leq z < \infty$  است. توزیع (۶۴) به توزیع فرمی-دیراک موسوم است. نخست شکل این تابع توزیع را در دمای صفر بدست می‌آوریم. از رابطه (۶۴) می‌فهمیم که

$$n_i = \begin{cases} 1, & \epsilon_i < \mu \\ 0, & \epsilon_i > \mu \end{cases} \quad (65)$$

بنابراین تمام ترازهای انرژی کمتر از  $\mu$  پر و همه ترازهای انرژی بالاتر از  $\mu$  پر هستند، شکل (۳). دقت کنید که پتانسیل شیمیایی با توجه به رابطه (۶۱) وابسته به چگالی و دماست. در دمای صفر پتانسیل شیمیایی را انرژی فرمی  $\epsilon_F$  می‌خوانیم و آن را با  $\epsilon_F$  نشان می‌دهیم.



شکل ۳: توزیع فرمی دیراک در دمای صفر: تمام ترازهای زیر سطح فرمی پر و بالای سطح فرمی خالی هستند.

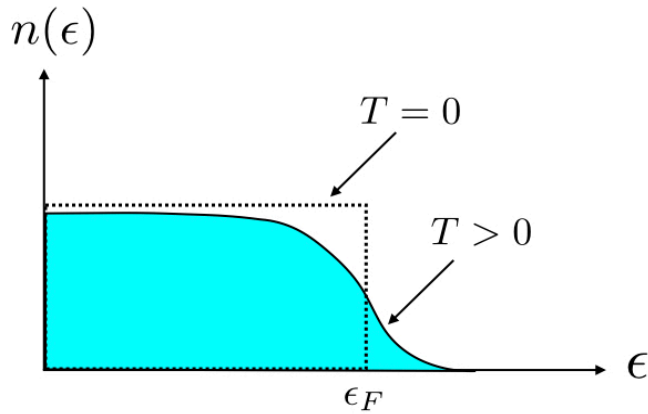
$$\epsilon_F := \mu(T = 0).$$

دما که زیاد می شود ذراتی که در لایه های نزدیک سطح فرمی هستند با گرفتن انرژی گرمایی به بالای سطح فرمی می روند و تابع توزیع به شکل (۶) در می آید. باید دقت کنید که در دمای بالاتر از صفر دیگر  $\mu$  برابر با  $\epsilon_F$  نیست، بلکه  $\mu$  و در نتیجه  $z$  کوچک تر می شود و جمله  $z^{-1}e^{\beta\epsilon_i}$  در مقایسه با ۱ در عبارت (۶۴) بزرگ تر می شود و در نتیجه توزیع ذرات به سمت تابع توزیع بولتزمان یعنی  $n_i \propto e^{-\beta\epsilon_i}$  میل می کند. می توان یک دما موسوم به دمای فرمی تعریف کرد که از رابطه

$$T_F := \frac{\epsilon_F}{k} \quad (۶۶)$$

بدست می آید. هرگاه که  $T \leq T_F$  باشد، معنی اش این است که افت و خیزهای حرارتی قادر نیستند که ترازهای پایین انرژی را خالی کنند و به بالای سطح فرمی ببرند. بنا براین در این دما تنها جمعیت لایه های نزدیک سطح فرمی تغییر می کند. اما وقتی که  $T \approx T_F$  یا  $T \gtrsim T_F$  است، انرژی حرارتی آنقدر بزرگ می شود که حتی ذرات موجود در لایه های پایین انرژی تحریک شده و به بالای سطح فرمی می روند. هرچه که  $T$  بزرگتر از  $T_F$  باشد، توزیع ذرات به توزیع کلاسیکی بولتزمان نزدیک و اثرات کوانتومی کمتر می شود.





شکل ۴: توزیع فرمی دیراک در دمای کمی بالاتر از صفر: ذرات لایه های نزدیک و زیر سطح فرمی را ترک کرده و به لایه های بالای سطح فرمی می روند.

## ۱.۶ گاز فرمی در دمای صفر

حال که اصول کلی را یاد گرفته ایم می توانیم گاز فرمی ایده آل را در دمای صفر کمی بیشتر مطالعه کنیم. منظور از گاز فرمی ایده آل گازی از اتم ها یا مولکولهای بدون برهم کنش است که تنها تحت تاثیر اصل طرد پائولی قرار دارند. این اتم ها فرمیون هستند (مثل گاز الکترونی درون فلز یا یک گاز هلیوم ۳ یا گاز نوترونی درون یک ستاره نوترونی). اگرچه این اتم ها اسپین دارند ولی برای سادگی درجه آزادی اسپینی آنها را نادیده می گیریم. به عبارت دیگر فرض می کنیم که این درجه آزادی افت و خیز گرمایی ندارد. در آخر می توانیم جمعیت همه ترازهای انرژی را در عدد  $2j + 1$  ضرب کنیم تا جمعیت همه ذرات را با در نظر گرفتن درجه آزادی اسپین ها بدست آوریم. اکنون مسئله ما این است که در روابط (۶۱) تا (۶۳) انرژی های یک ذره آزاد را قرار دهیم و جمع ها را تبدیل به انتگرال کرده و آنها را محاسبه کنیم. نخست توجه می کنیم که ترازهای انرژی یک ذره برابر است با:

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \quad (۶۷)$$

که در آن

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = \frac{\pi}{L} (n_x, n_y, n_z)$$

بنابراین می توانیم برای هر تابع همواری بنویسیم:

$$\sum_i f(\epsilon_i) = \sum_{n_x, n_y, n_z} f(\epsilon_{n_x, n_y, n_z}) = \frac{1}{8} \int d^3k f(\epsilon_{\mathbf{k}}) \frac{L^3}{\pi^3} \quad (68)$$

که در آن ضریب  $\frac{1}{8}$  برای این ضرب شده که می بایست فقط روی تکانه های مثبت انتگرال بگیریم. بنابراین با توجه به این که  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  فقط تابع اندازه  $\mathbf{k}$  است، خواهیم داشت:

$$\sum_i f(\epsilon_i) = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk f(\epsilon_{\mathbf{k}}) \quad (69)$$

بنابراین روابط (61) تا (63) به صورت انتگرال های زیر در می آیند:

$$\begin{aligned} N &= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_{\mathbf{k}}} + 1} \\ U &= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_{\mathbf{k}}} + 1} \\ \frac{PV}{kT} &= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \ln(ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}} + 1). \end{aligned} \quad (70)$$

اگر توجه خود را به انتگرال سوم معطوف کنیم می توانیم با انتگرال گیری جزء به جزء کاری کنیم که یک نتیجه کلی و زیبا بدست آوریم. برای این کار توجه می کنیم که:

$$\int_0^\infty k^2 dk \ln(ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}} + 1) = \frac{1}{3}(k^3) \ln(ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}} + 1) \Big|_{k=0}^\infty - \frac{1}{3} \int k^3 dk \frac{d}{dk} \ln(ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}} + 1) \quad (71)$$

با کمی دقت به حدود بالا و پایین انتگرال می توانیم طرف راست را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k^2 dk \ln(ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}} + 1) &= 0 - \frac{1}{3} \int k^3 dk \frac{d}{dk} \ln(ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}} + 1) \\ &= \frac{2}{3} \int_0^\infty k^2 dk \frac{\epsilon_{\mathbf{k}} z \beta e^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}}}{ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}} + 1} \\ &= \frac{2}{3kT} \int_0^\infty k^2 dk \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_{\mathbf{k}}} + 1}. \end{aligned} \quad (72)$$

به این ترتیب با مقایسه این رابطه با رابطه سوم از (70) به این نتیجه می رسیم که:

$$PV = \frac{2}{3}U. \quad (73)$$

یعنی همواره بین انرژی داخلی و فشار و حجم این رابطه مستقل از چگالی ذرات و در هر دمایی برقرار است.

■ تمرین: مشابه این روابط را برای گاز فرمی ایده آل در دو بعد بدست آورید.

در بخش بعدی یاد خواهیم گرفت که از این روابط استفاده کنیم و در دمای دلخواه روابط ترمودینامیکی گاز فرمی را بدست آوریم. این کار نیاز به محاسبات نسبتاً مفصلی دارد. بنابراین در این بخش توجه خود را به دمای صفر معطوف کنیم. که محاسبات مربوط به آن ساده است. با توجه به توزیع فرمی دیراک در دمای صفر یعنی رابطه (۶۵) و توجه به اینکه در دمای صفر  $\mu \equiv \epsilon_F$ ، روابط مربوط به تعداد ذرات و انرژی به صورت انتگرال های زیر در می آیند:

$$\begin{aligned} N &= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{\epsilon_F} k^2 dk \\ U(T=0) &= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon_{\mathbf{k}} k^2 dk. \end{aligned} \quad (74)$$

می توانیم تکانه فرمی را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$

در نتیجه

$$N = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{V}{6\pi^2} k_F^3 = \frac{V}{6\pi^2} \left( \frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (75)$$

و

$$U = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \epsilon_{\mathbf{k}} k^2 dk = \frac{V}{10\pi^2} \left( \frac{\hbar^2}{2m} \right) k_F^5 = \frac{V}{10\pi^2} \left( \frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2} \right)^{\frac{5}{2}} \epsilon_F. \quad (76)$$

رابطه اول انرژی فرمی را بر حسب چگالی گاز تعیین می کند. با تقسیم این دو رابطه بر هم بدست می آوریم:

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F. \quad (77)$$

این که برخلاف گاز کلاسیک، گاز فرمی در دمای صفر نیز دارای انرژی است و از اصل هم پاری انرژی تبعیت نمی کند، ناشی از کوانتومی بودن آن و اصل طرد پاولی است که اجازه نمی دهد همه ذرات به حالت پایه بروند. برای بدست آوردن فشار در دمای صفر رابطه (۶۳) را در نظر می گیریم: در دمای صفر از این رابطه حدی استفاده می کنیم که

$$\ln(ze^{-\beta\epsilon_{\mathbf{k}}} + 1) = \begin{cases} \frac{\epsilon_F - \epsilon}{kT}, & \epsilon < \epsilon_F \\ 0, & \epsilon > \epsilon_F \end{cases} \quad (78)$$

در نتیجه

$$\frac{PV}{k_B T} = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{\epsilon_F} k^2 dk \frac{\epsilon_F - \epsilon}{k_B T} = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^{k_F} k^2 dk \frac{k_F^2 - k^2}{k_B T} \quad (79)$$

■ تمرین: با محاسبه انتگرال و ساده کردن نتیجه نهایی نشان دهید که فشار گاز فرمی برابر خواهد بود با:

$$P = \frac{1}{15\pi^2} \left( \frac{2m\epsilon_F}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \epsilon_F \quad (80)$$

هم چنین نشان دهید که رابطه ساده زیر بین فشار و انرژی داخلی گاز برقرار است:

$$PV = \frac{2}{3} U. \quad (81)$$

در درسهای آینده خواهیم دید که این رابطه (که در این درس برای دمای صفر بدست آوردیم) در واقع در همه دماها برقرار است.

■ تمرین: انرژی فرمی را برای گاز الکترونی درون یک فلز تخمین بزنید. دمای فرمی را برای همین گاز تخمین بزنید و آن را با دمای اتاق مقایسه کنید. فشار گاز الکترونی را در دمای صفر تخمین بزنید.

■ تمرین: انرژی فرمی را برای گاز نوترونی درون یک ستاره نوترونی تخمین بزنید. دمای فرمی را برای همین گاز تخمین بزنید و آن را با دمای اتاق مقایسه کنید. فشار گاز نوترونی را برای این ستاره تخمین بزنید.

■ تمرین: با تکرار محاسباتی مشابه با محاسبات بالا، انرژی فرمی، انرژی کل و هم چنین فشار را برای یک گاز فرمیونی در دو بعد و در دمای صفر بدست آورید.

■ تمرین: اگر نگران ضرایب دقیق عددی نباشیم، می توانیم روابط چگالی، انرژی و فشار را بر حسب انرژی فرمی تنها با استدلال ابعادی بدست آوریم. یک گاز فرمیونی ایده آل را در بعد  $d$  در نظر بگیرید که جرم اتم های آن  $m$  است و در حجم  $V$  قرار دارد. با استفاده از این که این گاز کوانتومی است و ثابت پلانک در روابط آن وارد می شود با استدلال ابعادی، انرژی فرمی این گاز را بر حسب تعداد ذرات بدست آورید. سپس انرژی و فشار این گاز را نیز در دمای صفر تعیین کنید.

آنچه که بدست آوردیم نشان می دهد که برخلاف گاز ایده آل کلاسیک که فشار متناسب با چگالی است، برای یک گاز فرمی در دمای صفر فشار متناسب با توان مربع چگالی است. هم چنین وجود ثابت پلانک در این رابطه مهم است که نشان می دهد این فشار ناشی از یک اثر کوانتومی

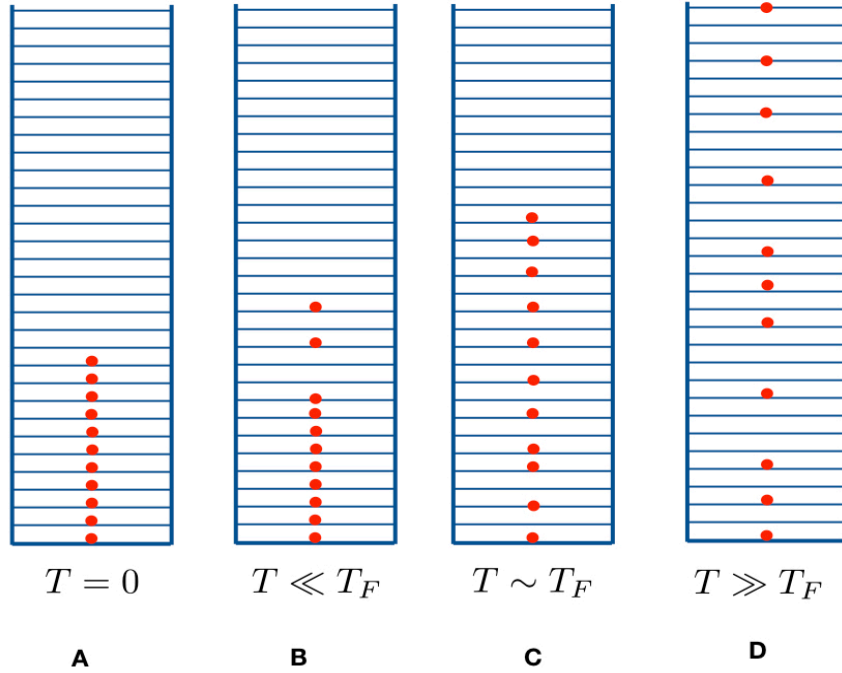
است و بالاخره مهم ترین معنای این رابطه تاکید بر وجود فشار حتی در دمای صفر است. این فشار همان فشار ناشی از اصل طرد پاولی است که باعث می شود الکترون ها به یکدیگر نزدیک نشوند. این فشار همان عاملی است که در ستاره ها وقتی که سوخت آنها تمام می شود و اتم ها در اثر گرانش در هم کوبیده می شوند مانع فشرده شدن بیشتر اتم ها و تشکیل ستاره نوترونی می شود. برای تشکیل یک ستاره نوترونی جرم ستاره می بایست از یک حد مشخص بیشتر باشد تا بتواند بر این فشار دافعه که آن را فشار واگنی الکترونی<sup>۹</sup> می نامیم غلبه کند. یک بار دیگر به صورت کیفی وضعیت یک گاز فرمی را بررسی می کنیم. در دمای  $T = 0$  همه لایه های زیر انرژی فرمی پر و لایه های بالاتر از آن خالی هستند. در دماهایی که از دمای فرمی خیلی پایین ترند، میزان انرژی گرمایی فقط آن اندازه است که بتواند ترازهای نزدیک سطح فرمی را خالی کرده و ذرات این تراز ها را به لایه های بالاتر بفرستد. وقتی که دما به حدود دمای فرمی نزدیک می شود، (که همان طور که می دانیم خودش دمای زیادی است) انرژی گرمایی آنقدر هست که تقریباً همه تراز های زیر سطح فرمی را تحت تاثیر قرار دهد و ذرات را از این تراز ها جابجا کند و به تراز های بالاتر برسد اما هر چه که هست بالاترین تراز که به این ترتیب ممکن است بر شود تراز است با انرژی نزدیک  $2E_F$ . اما وقتی که دما خیلی بزرگ تر از دمای فرمی است، نه تنها همه ذرات در زیر سطح فرمی جابجا شده اند بلکه این ذرات در تمام تراز های بالاتر پخش شده اند و چگالی تعداد ذرات در تراز ها خیلی پایین تر از یک است. این وضعیت ها در شکل (۵) نشان داده شده اند.

## ۲۰۶ گاز فرمیونی در دمای غیرصفر

چنانکه دیدیم آمار گاز فرمی در دمای صفر خیلی ساده است. این آمار ساده منجر به روابط خیلی ساده ای نیز برای ترمودینامیک گاز فرمی می شود. وقتی که دما کمی از دمای صفر بیشتر می شود، سطوح زیر انرژی فرمی خالی شده و اتم های گاز به سطوح بالاتر می روند. در دماهای کم انتظار داریم که روابطی که بدست آورده ایم تفاوت اندکی با روابط ترمودینامیکی در دمای صفر داشته باشند. به تدریج که دما را بیشتر می کنیم به مرحله ای می رسیم که طول موج دو بروی اتم ها در مقایسه با فاصله متوسط بین اتم ها آنقدر کوچک می شود که رفتار گاز خصلت کوانتومی خود را از دست می دهد و به یک گاز کلاسیک تبدیل می شود. در دماهای خیلی بالا روابط ترمودینامیکی گاز می بایست با روابط گاز ایده آل یکی شود. برای اینکه این توصیف های کیفی را به توصیف های دقیق کمی تبدیل کنیم می بایست به روابط اصلی گاز فرمی توجه کنیم. از روابط (۶۱) و (۶۲) داریم:

$$N = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{1 + z^{-1} e^{\beta \epsilon_k}}, \quad (82)$$

Electron Degeneracy Pressure<sup>۹</sup>



شکل ۵: توزیع ذرات در لایه های انرژی در دماهای مختلف.

و

$$U = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\epsilon_{\mathbf{k}} k^2 dk}{1 + z^{-1} e^{\beta \epsilon_{\mathbf{k}}}}, \quad (۸۳)$$

با تعریف  $x = \beta \epsilon = \frac{\beta \hbar^2 k^2}{2m}$  و توجه به تعریف طول موج گرمایی یعنی

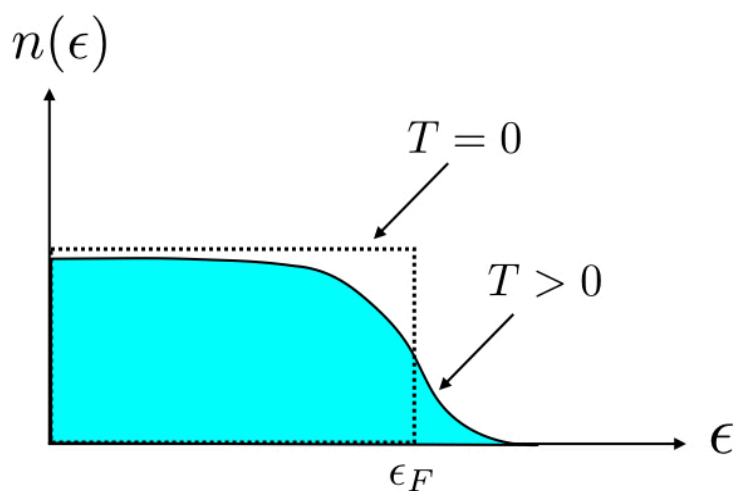
$$\lambda := \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \quad (۸۴)$$

و کمی ساده کردن می توانیم عبارت های بالا را به شکل زیر بنویسیم:

$$N = \frac{V}{\lambda^3} f_{\frac{3}{2}}(z), \quad (۸۵)$$

و

$$U = \frac{3}{2} kT \frac{V}{\lambda^3} f_{\frac{5}{2}}(z), \quad (۸۶)$$



شکل ۶: توزیع ذرات در لایه های انرژی در دماهای مختلف. منحنی بنفش تابع توزیع بولتزمان را نشان می دهد.

که در آن تابع  $f_n(z)$  به شکل زیر تعریف می شود:

$$f_n(z) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} dx}{1 + z^{-1} e^x} \quad (87)$$

از آنجا که رابطه  $PV = \frac{2}{3}U$  همواره برقرار است، پس با تجزیه تحلیل دو معادله (۸۵) و (۸۶) می توانیم ترمودینامیک یک گاز فرمی ایده آل را به طور کامل مطالعه کنیم. برای این کار دو محدوده دماهای خیلی زیاد و دماهای خیلی کم را جداگانه مطالعه می کنیم. برای این کار می بایست تابع های  $f_n(z)$  را به صورت مناسبی بسط دهیم.

### ۱.۲.۶ گاز فرمی در دماهای خیلی زیاد

منظور از دمای خیلی زیاد یعنی دماهای خیلی بیشتر از دمای فرمی. در واقع این ناحیه را می توان ناحیه کلاسیک نامید. همانطور که قبلا نیز گفته ایم کلاسیک یا کوانتومی بودن یک گاز تنها از روی دما یا چگالی مشخص نمی شود بلکه از ترکیب این دو تعیین می شود و دمای فرمی به زیبایی

این ترکیب را نشان می دهد. از رابطه (۸۵) می دانیم که

$$n\lambda^3 = f_{\frac{3}{2}}(z). \quad (88)$$

تابع  $f_{\frac{3}{2}}(z)$  یک تابع صعودی است که در صفر برابر با صفر است و در بی نهایت نیز به سوی بی نهایت میل می کند. بنابراین وقتی که گاز شبه کلاسیک است یعنی اینکه  $1 \ll z$  و وقتی که گاز تقریباً واکن است (یعنی کوانتومی است) به این معناست که  $1 \gg z$ .

■ تمرین: وقتی که گاز شبه کلاسیک است،  $z$  از یک کوچکتر است. با توجه به تعریف این پارامتر نتیجه می گیریم که پتانسیل شیمیایی منفی است. این نتیجه را چگونه توضیح می دهید؟

آنچه که انتظار داریم این است که همه خصوصیات ترمودینامیکی یک گاز در این ناحیه مثل یک گاز ایده آل کلاسیک باشد با این تفاوت که تصحیحات کوچکی به خاطر فرمیون بودن ذرات در آن ها وارد شود. این موضوع را به صورت کمی خواهیم دید. در این ناحیه پارامتر  $z$  کوچک است. بنابراین برای محاسبه تابع  $f_n(z)$  صورت و مخرج کسر را در  $ze^{-x}$  ضرب می کنیم و بدست می آوریم:

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^{n-1} \frac{ze^{-x}}{1+ze^{-x}} \quad (89)$$

حال عبارت  $ze^{-x}$  در همه محدوده زیر انتگرال از یک کوچک تر است و می توانیم مخرج را با استفاده از بسط دو جمله ای بسط دهیم:

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^{n-1} dx ze^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k e^{-kx} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} (-1)^k z^{k+1} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x(l+1)} dx. \end{aligned} \quad (90)$$

اما انتگرال بالا برابر است با  $\frac{1}{(k+1)^n} \Gamma(n)$ . در نتیجه خواهیم داشت:

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^l \frac{z^{k+1}}{(k+1)^n}. \quad (91)$$

چند جمله اول این بسط به صورت زیر است:

$$f_n(z) = z - \frac{z^2}{2^n} + \frac{z^3}{3^n} - \frac{z^4}{4^n} + \dots \quad (92)$$

به این ترتیب می توانیم بنویسیم:

$$n\lambda^3 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{PV}{kT} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k^{\frac{5}{2}}}. \quad (93)$$



با محاسبه سرراست و مستقیم می توان سری اول را وارونه کرد و  $z$  را بر حسب توان های  $(n\lambda^3)$  نوشت. تا مرتبه  $k$  ام این بسط به صورت زیر خواهد بود:

$$z = n\lambda^3 + \sum_{l=1}^k a_l (n\lambda^3)^l + \dots \quad (94)$$

یعنی ضریب جمله اول حتما یک خواهد بود و علامت  $\dots$  نیز به معنای جملات مرتبه بالاتر است. با قرار دادن این بسط در تابع  $f_{\frac{5}{2}}(z)$  بدست می آوریم:

$$f_{\frac{5}{2}}(z) = n\lambda^3 + \sum_{l=2}^k b_l (n\lambda^3)^l + \dots \quad (95)$$

و در نتیجه

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^3} \left( n\lambda^3 + \sum_{l=2}^k b_l (n\lambda^3)^l + \dots \right) \quad (96)$$

و یا پس از کمی ساده کردن:

$$\frac{PV}{kT} = N \left( 1 + \sum_{l=2}^k b_l (n\lambda^3)^{l-1} + \dots \right) \quad (97)$$

این رابطه تصحیحات اعمال شده به معادله ی حالت گاز ایده آل را بر حسب قوای متوالی  $n\lambda^3$  بدست می دهد. هر چقدر که  $n\lambda^3$  کوچک تر باشد، توان های کمتری را نگاه می داریم و گاز رفتاری نزدیک به گاز کلاسیک خواهد داشت. اما با بزرگ تر شدن  $n\lambda^3$  می بایست جملات بیشتری را نگاه داشت که در این صورت رفتار گاز از یک گاز کلاسیک دور و دورتر می شود. می خواهیم بسط ویریاال معادله حالت را تا رتبه ۱ از  $n\lambda^3$  بدست بیاوریم. داریم:

$$y = n\lambda^3 = z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \dots$$

قرار می دهیم:

$$z = y + ay^2 + \dots$$

با جایگذاری در رابطه دو دوم و اول بدست می آوریم:

$$y = (y + ay^2 + \dots) - \frac{1}{3^{3/2}} (y + \dots)^2 + \dots$$

و با مقایسه طرفین مقدار  $a$  مشخص می شود:  $a = \frac{1}{2^{3/2}}$ . بنابراین

$$z = y + \frac{1}{2^{3/2}}y^2 + \dots$$

حال می توانیم مقدار  $z$  را برحسب  $y$  یا همان  $(n\lambda^3)$  در بسط  $f_{5/2}(z)$  قرار دهیم:

$$\begin{aligned} f_{5/2}(z) &= z - \frac{z^2}{2^{5/2}} + \dots \\ &= y + \frac{1}{2^{3/2}}y^2 + \dots - \frac{1}{2^{5/2}}y^2 + \dots = y + \frac{1}{2^{5/2}}y^2 + \dots \end{aligned}$$

که در آن جملات  $\dots$  از مرتبه  $y^3$  به بالا هستند. بنابراین  $b_2 = \frac{1}{2^{5/2}}$  و در نتیجه

$$\frac{PV}{kT} = N\left(1 + \frac{1}{2^{5/2}}(n\lambda^3) + \dots\right) \quad (98)$$

دیده می شود که فشار گاز از حالت کلاسیک بیشتر است و این فشار به خاطر دافعه فرمیون هاست که همین انتظار را هم داریم. اگر مقدار  $n\lambda^3$  کم باشد یعنی ما به خوبی درون رژیم کلاسیک باشیم، این فشار اضافه کمتر است اما هرچقدر که مقدار  $n\lambda^3$  بیشتر شود و ما به منطقه کوانتومی نزدیک تر شویم این فشار اضافی بیشتر شده تا جاییکه آثار بقیه جملات آنقدر مهم می شود که به کلی شکل معادله حالت را عوض می کند.

## ۲.۲.۶ گاز فرمی در دماهای نزدیک به صفر

در دماهای نزدیک به صفر ذرات گاز از سطوح نزدیک به سطح فرمی تبخیر شده و به سطوح بالاتر می روند. هر چه دما بالاتر باشد این تبخیر بیشتر صورت می گیرد و به لایه های انرژی خیلی پایین تر از سطح فرمی نیز می رسد و رفتار گاز کلاسیک تر می شود. این همان ناحیه ای بود که در بخش قبلی بررسی کردیم. در این بخش خود را به دماهای واقعا نزدیک به صفر محدود می کنیم. یادآوری می کنیم که دمای پایین در این جا در مقایسه با دمای فرمی معنا دارد و چون دمای فرمی ممکن است به چند هزار درجه برسد، بنابراین دمای پایین یا نزدیک به صفر در اینجا ممکن است دمای بالایی در مقیاس زندگی روزمره باشد. برای این کار می بایست بازهم توابع  $f_n(z)$  را بسط دهیم اما مسئله این است که پارامتر  $z$  بسیار بزرگ است. در نگاه اول به نظر می رسد که چون  $z^{-1} < 1$  است، پس می توان مخرج کسر را با استفاده از بسط  $(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$  بسط داد. ولی اشکال کار این است که  $z^{-1}e^x$  در تمام محدوده زیر انتگرال کوچک تر از یک نیست و نمی توان از بسط فوق استفاده کرد.

## ۷ گاز فرمیونی در دماهای خیلی کم

منظور از دماهای خیلی کم یعنی دماهایی که نسبت به دمای فرمی خیلی کوچکند،  $T \ll T_F$ . از آنجا که دمای فرمی خودش خیلی زیاد است این دماها لزوماً دماهای خیلی پایین نیستند. می دانیم که وقتی که  $T$  صفر است، گاز فرمی کاملاً واگن خوانده می شود. در این دما  $n\lambda^3$  بیشترین مقدار خود را دارد و در واقع بی نهایت است. تمام ترازهای انرژی زیر سطح فرمی کاملاً پر و تمام ترازهای بالای سطح فرمی کاملاً خالی هستند. با افزایش دما طول موج دوپرووی ذرات و در نتیجه  $n\lambda^3$  کوچک تر شده ولی هنوز مقدار بزرگ ولی متناهی ای را اختیار می کند. در این حد که  $z$  خیلی از ۱ بزرگتر است، دیگر نمی توانیم از بسط توانی توابع  $f_n(z)$  برحسب قوای  $z$  استفاده کنیم ولی می توانیم آن را بر حسب  $\ln(z)$  بسط دهیم. در واقع برای این کار می بایست بازهم توابع  $f_n(z)$  را بسط دهیم اما مسئله این است که پارامتر  $z$  بسیار بزرگ است. در نگاه اول به نظر می رسد که چون  $1 < z^{-1}$  است، پس می توان مخرج کسر را با استفاده از بسط  $(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$  بسط داد. ولی اشکال کار این است که  $z^{-1}e^x$  در تمام محدوده زیر انتگرال کوچک تر از یک نیست و نمی توان از بسط فوق استفاده کرد. در ضمیمه این درس نحوه بدست آوردن این بسط شرح داده شده است. چند جمله اول تابع توزیع  $f_n(z)$  به صورت زیر است:

$$f_n(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \zeta^n \left[ 1 + n(n-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\zeta^2} + \dots \right] \quad (99)$$

که در آن  $\zeta = \ln(z)$ . با استفاده از این بسط می توانیم خواص ترمودینامیکی گاز فرمیونی را در دماهای پایین مطالعه کنیم. مثلاً اگر توابع  $f_n$  را تا جمله دوم بسط دهیم داریم:

$$n\lambda^3 = \frac{1}{\Gamma(5/2)} \zeta^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\zeta^2} + \dots \right] \quad (100)$$

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^3} \frac{1}{\Gamma(7/2)} \zeta^{5/2} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{8} \frac{1}{\zeta^2} + \dots \right] \quad (101)$$

رابطه

$$U = \frac{3}{2} PV, \quad (102)$$

نیز همیشه برقرار است. برای بدست آوردن معادله حالت و انرژی و دیگر توابع ترمودینامیکی می بایست  $\zeta = \ln z$  را بین این روابط حذف کرد. این کار را می توان رتبه به رتبه انجام داد. در این جا تفصیل این محاسبات را نمی آوریم. این کار به تمرین ها واگذار شده است. قط اشاره می کنیم که در نخستین تقریب ها می توان روابط زیر را بدست آورد. (در  $d=3$ ) داریم:

$$\mu = \epsilon_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right)$$

$$\frac{PV}{kT} = g \frac{V}{\lambda^3} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \zeta_0^{\frac{5}{2}} \left( 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 \right)$$

که در آن  $\epsilon_F = \ln \zeta_0$ .

■ تمرین: روابط بالا را بدست آورید. راهنمایی: انتظار داریم که  $\mu = kT \ln z$  بسطی به صورت زیر داشته باشد:

$$\mu = \epsilon_F \left( 1 + a_1 \frac{T}{T_F} + a_2 \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right) \equiv \epsilon_F \left( 1 + a_1 \frac{kT}{\epsilon_F} + a_2 \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right) \quad (103)$$

با قرار دادن این بسط در طرف راست رابطه (۱۰۰) ضریب  $a_1$  را بدست آورید. سپس با قرار دادن آن در رابطه (۱۰۱) معادله حالت را بدست آورید.

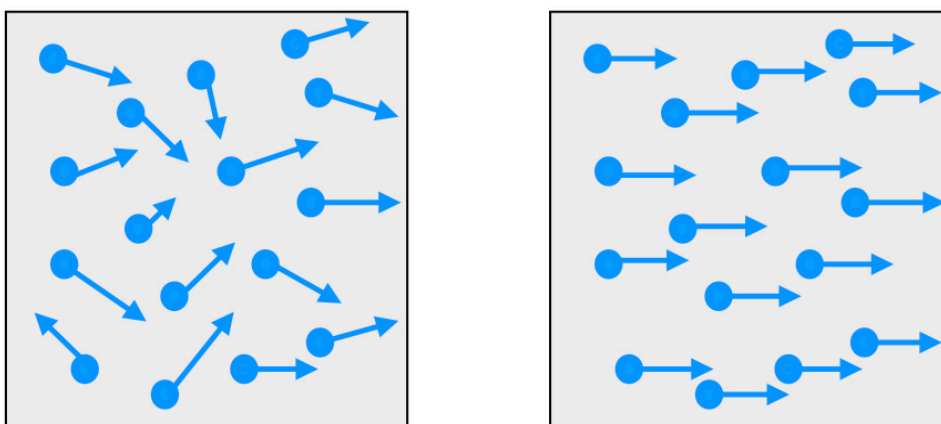
■ تمرین: معادله حالت یک گاز فرمی ایده آل دوعدی را برای وقتی که دما خیلی کمتر از دمای فرمی است بدست آورید.

## ۸ بوزون ها

تا کنون گاز فرمیونی ایده آل را بررسی کردیم. در این درس گاز بوزونی ایده آل را مطالعه می کنیم. برای بوزون ها نیز خواهیم دید که خاصیت کوانتومی آنها منجر به پدیده های عمیق و شگفت انگیز ماکروسکوپی خواهد شد. مهم ترین این پدیده ها چگالش بوز- اینشتین<sup>۱۰</sup> است که طی آن کسر قابل توجهی از کل ذرات یعنی تعداد ماکروسکوپی از ذرات در حالت پایه جمع یا به اصطلاح چگالیده می شوند. این پدیده در دماهای بسیار کم یا چگالی های بسیار زیاد آنها فقط برای بوزون ها رخ می دهد و منشاء پدیده هایی مثل ابرشارگی و ابرسانایی است. از نظر کیفی، به صورت خیلی ابتدایی می توان این پدیده را به این شکل توضیح داد که قبل از چگالش پخش شدن ذرات در تراز های مختلف که هرکدام تکانه و انرژی مخصوص به خود دارند باعث برخوردها و پراکنندگی ذرات از یک دیگر و در نتیجه باعث بروز مزاحمت و ویسکوزیته در مایعات و یا مقاومت الکتریکی در رساناهای معمولی می شود. ولی بعد از چگالش، جمع شدن انبوهی از ذرات در یک حالت پایه با انرژی و تکانه معین باعث رفتار جمعی و یکسان ذرات و در نتیجه از بین رفتن ویسکوزیته در مایعات یا مقاومت الکتریکی در ابرساناها می شود. شکل (۷). باید دقت کرد که در یک ابرسانا، الکترون ها دو به دو تشکیل جفت هایی موسوم به جفت های کوپر<sup>۱۱</sup> می دهند و این جفت های کوپر هستند که نهایتاً

<sup>۱۰</sup>Bose-Einstein Condensation  
<sup>۱۱</sup>Cooper Pairs

چگالیده شده و باعث ابرسانایی می شوند. به طور کیفی می توان گفت که رفتار انبوه ذرات قبل از چگالش مثل یک گاز و بعد از چگالش مثل یک مایع است. این تفاوت در تمام کیفیات این دستگاه بس ذره ای نظیر تراکم پذیری، ظرفیت گرمایی ویژه و نظایر آن دیده می شود.



قبل از چگالش بوزونی

بعد از چگالش بوزونی

شکل ۷: چگالش بوزون ها در حالت پایه باعث می شود که همه ذرات یک سیستم اعداد کوانتومی و حالت یکسان داشته باشند. در چنین شرایطی هر نوع تراحم بین حرکت ذرات از بین می رود. این خاصیت باعث بروز پدیده هایی مثل ابرشارگی و ابرسانایی می شود.

از ابتدای این درس روابط کلی مربوط به بوزون ها را یادآوری می کنیم. داریم:

$$\ln Q = - \sum_i \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_i}) \quad (104)$$

$$N = \sum_i \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} - 1} \quad (105)$$

$$U = \sum_i \frac{\epsilon_i}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} - 1} \quad (106)$$

برای گاز ایده آل،  $\epsilon_i$  ها عبارتند از سطوح انرژی یک ذره درون یک چاه پتانسیل که ابعاد آن را  $L$  می گیریم. هرگاه حجمی را که ذره در آن قرار دارد یک مکعب  $d$  بعدی بگیریم و شرایط مرزی را نیز طوری بگیریم که تابع موج روی دیواره ها صفر باشد، خواهیم داشت:

$$\epsilon_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} (n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_d^2). \quad (107)$$

در درس قبلی دیدیم که چگونه با داشتن این انرژی می توان جمع های بالا را به انتگرال تبدیل کرد. با طی کردن همان مراحل به رابطه زیر می رسیم:

$$\ln Q = -\frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - ze^{-x}) dx. \quad (108)$$

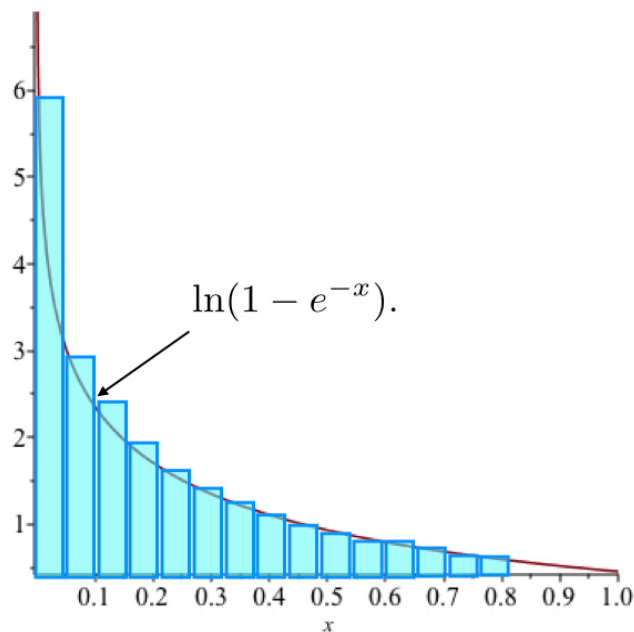
اما این رابطه یک اشکال اساسی دارد که اینک آن را توضیح داده و رفع می کنیم. در عبارت (105) سهم جمله حالت پایه به صورت

$$-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}) \quad (109)$$

است. انرژی حالت پایه را  $\epsilon_0 = 0$  گرفته ایم. وقتی که  $z$  به سمت  $1 = e^{\beta\epsilon_0}$  میل می کند، این جمله به سمت بی نهایت میل می کند. ببینیم آیا این سهم در انتگرال (108) در نظر گرفته شده است یا خیر؟ اگر به عبارت  $x^{\frac{d}{2}-1}$  که در واقع نشان دهنده چگالی حالت ها در واحد انرژی است، نگاه کنیم متوجه می شویم که برای  $d > 2$  این چگالی به سمت صفر و در نتیجه جمله  $x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - e^{-x})$  نیز به سمت صفر میل می کند و در نتیجه روشن است که عبارت واقعی (104) با انتگرال (108) در این نقطه تفاوت فاحشی دارد. دلیل این امر هم روشن است. اگر به شکل های (8) و (9) نگاه کنیم متوجه نکته اصلی می شویم.

قرار است سطح زیر منحنی که همان انتگرال (108) است جایگزین جمع (104) شود که همان مجموع مساحت میله های عمودی آبی است. در شکل (8) که مربوط به بعد  $d = 2$  است، هر دو مساحت با تقریب خیلی خوبی یکسان هستند. اما در شکل (9) که مربوط به بعد  $d = 3$  است، می بینیم که منحنی در  $x$  های کوچک به سمت صفر میل می کند و حال آنکه ارتفاع میله روی آن سر به فلک می کشد. در واقع مساحت سطح زیر منحنی در اینجا یک مقدار محدود است. در واقع هر چه تفاوت هست توسط همان میله اول یعنی سهم حالت پایه ایجاد می شود. دلیل این تفاوت آن است که تبدیل یک جمع به یک انتگرال فقط وقتی صحیح است که جملات متوالی جمع نسبت به هم تفاوت شان اندک باش به طوری که بتوان آنها را با یک تابع هموار تقریب زد. در این جا سهم حالت پایه با بقیه حالت ها تفاوت بسیار زیادی دارد.

سوال مهمی که در این جا پیش می آید این است که آیا تنها سهم حالت پایه است که در انتگرال (108) نادیده گرفته شده یا این که مثلا سهم اولین و دومین و سومین حالت برانگیخته نیز از قلم افتاده است؟ برای پاسخ به این سوال بهتر است که سهم اولین حالت برانگیخته را با سهم حالت



شکل ۸: در بعد دو وقتی که  $z$  به ۱ نزدیک می شود، تفاوتی بین جمع گسسته روی حالت های انرژی و انتگرال پیوسته این مقادیر وجود ندارد.

پایه مقایسه کنیم. انرژی حالت پایه را با  $\epsilon_0$  و انرژی حالت پایه اول را با  $\epsilon_1$  نشان می دهیم. از رابطه (۱۰۷) روشن است که

$$\epsilon_1 - \epsilon_0 \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}. \quad (110)$$

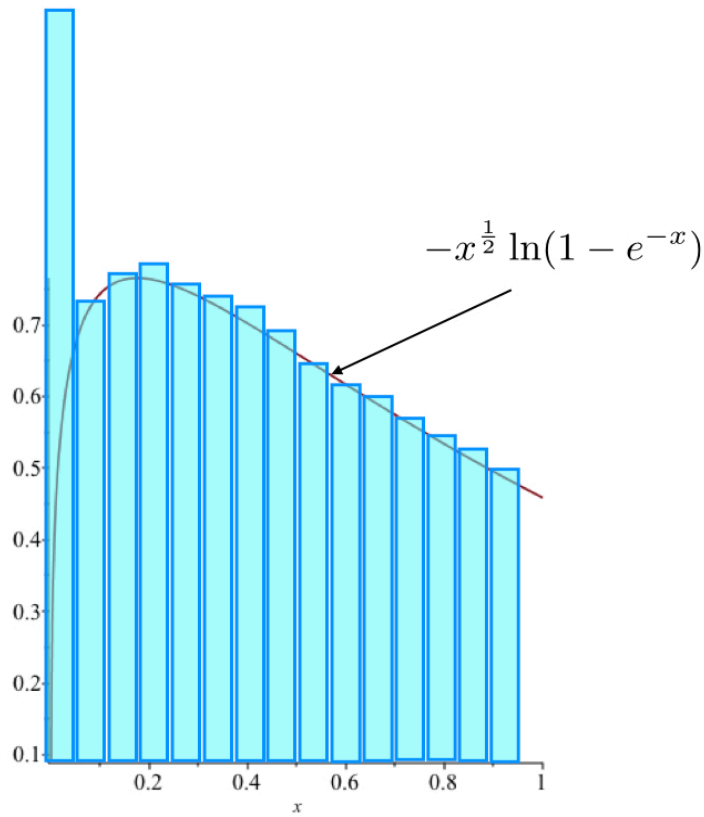
حال سهم این دو جمله در  $Q$  برابر است با:

$$-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}) - \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_1}). \quad (111)$$

از درس های قبلی دیده ایم که محدوده مجاز  $z$  برابر است با  $[0, e^{\beta\epsilon_0}]$  یعنی  $0 \leq z \leq e^{\beta\epsilon_0}$ . بنا بر این بیشترین مقداری که سهم اولین حالت برانگیخته یعنی جمله دوم می تواند اختیار کند برابر است با:

$$-\ln(1 - e^{\beta(\epsilon_0 - \epsilon_1)}) \approx -\ln(\beta(\epsilon_1 - \epsilon_0)) \approx \ln\left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \beta\right). \quad (112)$$

حتی اگر عدد داخل پرانتز به کوچکی  $10^{-100}$  یا  $10^{-200}$  باشد، باز لگاریتم آن عددی در حدود ۱۰۰ یا ۲۰۰ است و این در حالی است که جمله اول در حد  $e^{\beta\epsilon_0} \rightarrow z$  به سمت بی نهایت میل می کند. بنابر این تصویری که در صفحه قبل نشان داده ایم درس است و تنها سهم حالت



شکل ۹: در بعد سه وقتی که  $z$  به یک نزدیک می شود، جمع گسسته روی حالت ها بی نهایت می شود ولی انتگرال پیوسته مقدار محدودی دارد. تفاوت عمده هم فقط در سهم حالت پایه است که می بایست جدا نوشته شود.

پایه است که می بایست جداگانه در نظر گرفته شود. با این استدلال اکنون روشن است که چگونه می بایست روابط (۱۰۴) تا (۱۰۶) را رای بوزون ها بنویسیم. ( برای سادگی و با قرارداد خود، انرژی حالت پایه را برابر با صفر می گیریم). بنابراین روابط این روابط به شکل زیر در می آیند:

$$\ln Q = -\ln(1 - z) - \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - ze^{-x}) dx. \quad (113)$$



$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}-1} dx}{z^{-1}e^x - 1}. \quad (114)$$

$$\frac{U}{kT} = \frac{V}{\lambda^d} \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{d}{2}} dx}{z^{-1}e^x - 1}. \quad (115)$$

دقت کنید که  $\frac{z}{1-z}$  تعداد متوسط ذرات در حالت پایه است که آن را با  $N_0$  نشان می دهیم:

$$N_0 = \frac{z}{1-z}. \quad (116)$$

این عدد یعنی تعداد ذرات در حالت پایه، با نزدیک شدن  $z$  به 1 می تواند بدون هیچ حدی بزرگ شود، شکل (10).

البته این جمله سهمی در انرژی یعنی در عبارت (114) ندارد، زیرا انرژی حالت پایه را برابر با صفر گرفته ایم. برای ادامه به رابطه (113)

توجه می کنیم. می توانیم انتگرال را به صورت جزء به جزء محاسبه کنیم. در نتیجه بدست می آوریم:

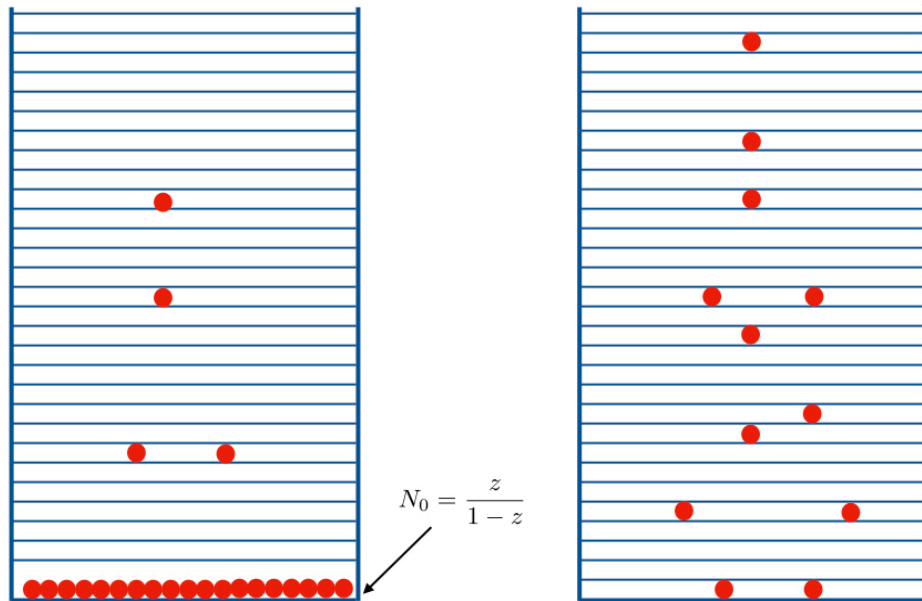
$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}-1} \ln(1 - ze^{-x}) dx &= \frac{1}{\frac{d}{2}} x^{\frac{d}{2}} \ln(1 - ze^{-x}) \Big|_0^\infty \\ &+ \frac{1}{\frac{d}{2}} \int_0^\infty x^{\frac{d}{2}} \frac{1}{z^{-1}e^x - 1} dx. \end{aligned} \quad (117)$$

با توجه به اینکه عبارت اول برابر با صفر است و با تعریف تابع زیر

$$g_n(z) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1}e^x - 1}. \quad (118)$$

بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{PV}{kT} &= -\ln(1-z) + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z) \\ \frac{PV}{kT} &= -\frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z) \\ \frac{U}{kT} &= -\frac{d}{2} \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}+1}(z). \end{aligned} \quad (119)$$



$$T < T_c$$

$$T > T_c$$

شکل ۱۰: در سه بعد، وقتی که دما پایین می آید و از یک دمای بحرانی عبور می کند، مجموع ظرفیت لایه های بالا تر از حالت پایه، برای جای دادن ذرات محدود می شود. بعد از آن یک کسر قابل توجهی از ذرات به حالت پایه می روند. این پدیده همان چیزی است که به آن چگالش بوز-اینشتین گفته می شود.

■ تمرین: با توجه به این که متوسط تعداد ذرات در هر لایه انرژی می بایست عددی مثبت باشد، ثابت کنید که برای بوزون ها شرط زیر برقرار است:

$$0 \leq z \leq e^{\beta \epsilon_0} \equiv 1, \quad (120)$$

در تساوی سمت راست فرض کرده ایم که همواره می توانیم سطح انرژی پایه را به دلخواه خود تعریف کنیم.

■ تمرین: نشان دهید که توابع  $g_n(z)$  نیز مثل توابع فرمیونی دارای خاصیت زیر هستند:

$$z g'_n(z) = g_{n+1}(z). \quad (121)$$

هم چنین نشان دهید که تابع های  $g_n(z)$  مثبت هستند و  $g_n(0) = 0$ .

■ تمرین: نشان دهید که

$$g_n(1) = \zeta(n), \quad (122)$$

که در آن  $\zeta$  تابع زتای ریمان است یعنی

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \dots \quad (123)$$

می دانیم که  $\zeta(1) = \infty$  و  $\zeta(\frac{3}{2}) = 2.612$  اگر به رابطه (۱۱۹) نگاه کنیم متوجه می شویم که  $\frac{z}{1-z}$  تعداد متوسط ذرات موجود در حالت پایه

$$\frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z)$$

تعداد ذرات موجود در تمامی حالت های برانگیخته است. این دو را به ترتیب با  $N_0$  و  $N_e$  نمایش می دهیم، یعنی

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{V}{\lambda^d} g_{\frac{d}{2}}(z) \equiv N_0 + N_e. \quad (124)$$

با توجه به خواصی که در مورد تابع  $g_n(z)$  گفتیم، معلوم می شود که ظرفیت حالات برانگیخته برای جا دادن ذرات محدود است. این ظرفیت

برابر است با

$$(N_e)_{max} = \frac{V}{\lambda^d} \zeta\left(\frac{d}{2}\right). \quad (125)$$

دقت کنید که این ظرفیت به دما بستگی دارد. حال اگر تعداد کل ذرات موجود در گاز بیش از این مقدار باشد، بقیه ذرات می بایست حتما به

حالت پایه بروند. در این حالت می گوئیم که ذرات شروع به چگالش در حالت پایه یا به سادگی شروع به چگالش کرده اند. بنابراین شرط چگالش

آن است که

$$N \geq \frac{V}{\lambda^d} \zeta\left(\frac{d}{2}\right), \quad (126)$$

و یا

$$n \lambda^d \geq \zeta\left(\frac{d}{2}\right). \quad (127)$$

این شرط، شرطی ترکیبی از دما و چگالی است که با توجه به رابطه  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$  می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$n \left( \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}} \right)^d \geq \zeta\left(\frac{d}{2}\right). \quad (128)$$

از این رابطه چند درس مهم می‌گیریم:

■ یک:

برای یک گاز دوبعدی بوزونی ( $d = 2$ ) چگالش رخ نمی‌دهد، زیرا  $\zeta(1) = \infty$  و شرط چگالش هرگز محقق نمی‌شود، مگر در دمای صفر مطلق.

■ دو:

ناحیه‌ای که در آن چگالش رخ می‌دهد در شکل زیر نشان داده شده است. بنابر این به ازای هر چگالی محدود هر وقت که دما را از یک حد بحرانی  $T_c$  کمتر کنیم، چگالش اتفاق می‌افتد و به ازای هر دمای محدود هر گاه چگالی را از یک مقدار بحرانی  $n_c$  زیاد تر کنیم چگالش آغاز خواهد شد. این دما و این چگالی بحرانی را با استفاده از رابطه چگالش می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} n_c &= \zeta\left(\frac{d}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2\pi mkT}}{h}\right)^d, \\ T_c &= \frac{h^2}{2\pi mk} \left(\frac{n}{\zeta\left(\frac{d}{2}\right)}\right)^{\frac{2}{d}}. \end{aligned} \quad (129)$$

■ سه:

رابطه (۱۲۸) نشان می‌دهد که هر چقدر که جرم ذره کمتر باشد، چگالش زودتر اتفاق می‌افتد. هم چنین وجود  $h$  در این رابطه نشان از این دارد که این پدیده یک پدیده کوانتومی است.

---

## ۹ مسئله‌ها

■ یک ذره اسپین یک دوم در میدان مغناطیسی  $\mathbf{B} = B\hat{n}$  قرار دارد. هامیلتونی برهم کنش این ذره برابر است با:

$$H = -\gamma\sigma \cdot \mathbf{B} \quad (130)$$

ذره در دمای  $T$  به تعادل رسیده است.

الف- ماتریس چگالی این ذره را تعیین کنید.

ب- تابع پارش ذره را بدست آورید.

پ- متوسط انرژی ذره و هم چنین انتروپی آن را مشخص کنید.

■ دو ذره اسپین یک دوم در میدان مغناطیسی  $\mathbf{B} = B\hat{n}$  قرار دارند. هامیلتونی برهم کنش این ذرات برابر است با:

$$H = -\gamma(\sigma_1 \cdot \mathbf{B} + \sigma_2 \cdot \mathbf{B}) \quad (131)$$

این دو ذره در دمای  $T$  به تعادل رسیده اند.

الف- ماتریس چگالی این سیستم دو ذره ای را تعیین کنید.

ب- تابع پارش این سیستم را بدست آورید.

پ- متوسط انرژی سیستم و هم چنین انتروپی آن را مشخص کنید.

■ دو ذره اسپین یک دوم در میدان مغناطیسی  $\mathbf{B} = B\hat{x}$  قرار دارند. هامیلتونی برهم کنش این ذرات برابر است با:

$$H = -\gamma(\sigma_1 \cdot \mathbf{B} + \sigma_2 \cdot \mathbf{B}) - J\sigma_{z,1}\sigma_{z,2} \quad (132)$$

این دو ذره در دمای  $T$  به تعادل رسیده اند.

الف- ماتریس چگالی این سیستم دو ذره ای را تعیین کنید.

ب- تابع پارش این سیستم را بدست آورید.

پ- متوسط انرژی سیستم و هم چنین انتروپی آن را مشخص کنید.

■ دو ذره اسپین یک دوم در میدان مغناطیسی  $\mathbf{B} = B\hat{n}$  قرار دارند. هامیلتونی برهم کنش این ذرات برابر است با:

$$H = -\gamma (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{B} + \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{B}) - J\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \quad (133)$$

این دو ذره در دمای  $T$  به تعادل رسیده اند.

الف- ماتریس چگالی این سیستم دو ذره ای را تعیین کنید.

ب- تابع پارش این سیستم را بدست آورید.

پ- متوسط انرژی سیستم و هم چنین انتروپی آن را مشخص کنید.

■ یک مسئله خیالی ولی آموزنده: برای سادگی سیستمی متشکل از ۳ ذره در نظر بگیرید که در یک چاه پتانسیل قرار دارند. این چاه دارای

سه تراز انرژی

$$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$$

با انرژی های

$$E_0 = 0, \quad E_1 = \epsilon, \quad E_2 = 2\epsilon$$

است که در آن  $\epsilon$  یک پارامتر انرژی است. ذرات با هم برهم کنش نمی کنند.

الف- اگر این ذرات را ذرات کلاسیک بگیریم، انرژی متوسط این سیستم سه ذره ای در دمای  $T$  چقدر است؟

ب- گر این ذرات را ذرات کوانتومی بگیریم، انرژی متوسط این سیستم سه ذره ای در دمای  $T$  چقدر است؟

■ برای سادگی سیستمی متشکل از  $N$  ذره در نظر بگیرید که در یک چاه پتانسیل قرار دارند. این چاه دارای دو تراز انرژی

$$|0\rangle, |1\rangle$$

با انرژی های

$$E_0 = 0, \quad E_1 = \epsilon,$$

است که در آن  $\epsilon$  یک پارامتر انرژی است. این ذرات باهم برهم کنش نمی کنند.

الف- اگر این ذرات را ذرات کلاسیک بگیریم، انرژی متوسط این سیستم بس ذره ای در دمای  $T$  چقدر است؟

ب- گر این ذرات را ذرات کوانتومی و بوزونی در نظر بگیریم، انرژی متوسط این سیستم بس ذره ای در دمای  $T$  چقدر است؟

■ برای سادگی سیستمی متشکل از 3 ذره فرمیون بدون اسپین در نظر بگیرید که در یک چاه پتانسیل قرار دارند. این چاه دارای 4 تراز انرژی

$$|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots, |4\rangle$$

با انرژی های

$$E_1 = \epsilon, \quad E_2 = 2\epsilon, \quad \dots, \quad E_3 = 3\epsilon, \quad E_4 = 4\epsilon$$

است که در آن  $\epsilon$  یک پارامتر انرژی است. این ذرات باهم برهم کنش نمی کنند.

الف- اگر این ذرات را ذرات کلاسیک بگیریم، انرژی متوسط این سیستم بس ذره ای در دمای  $T$  چقدر است؟

ب- گر این ذرات را ذرات کوانتومی بگیریم، انرژی متوسط این سیستم بس ذره ای در دمای  $T$  را حساب کنید.

پ- در دمای صفر و در دماهای بسیار زیاد مقدار انرژی متوسط را بدست آورید.

■ برای یک گاز بوزونی ایده آل نشان دهید که:

$$\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \Big|_P = - \frac{5}{2T} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}. \quad (134)$$

با استفاده از این رابطه نشان دهید که:

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V} = \frac{(\partial z / \partial T)_P}{(\partial z / \partial T)_V} = \frac{5}{3} \frac{g_{5/2}(z) g_{1/2}(z)}{(g_{3/2}(z))^2} \quad (135)$$

■ نشان دهید که ضریب تراکم پذیری همدمما و ضریب تراکم پذیری بی در رو برای یک گاز ایده آل بوزونی توسط روابط زیر داده می شوند:

$$\kappa_T = \frac{1}{nkT} \frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)} \quad \kappa_S = \frac{3}{5nkT} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{5/2}(z)}, \quad (136)$$

که در آن  $n = \frac{N}{V}$  چگالی گاز است. نشان دهید که وقتی  $z \rightarrow 0$  و  $\kappa_S$  و  $\kappa_T$  به سمت مقادیر مربوط به گاز کلاسیک میل می کنند یعنی

$$\kappa_T \rightarrow \frac{1}{P} \quad \kappa_S \rightarrow \frac{1}{\gamma P}.$$

رفتار این کمیت ها را در حدی که گاز خیلی واگن است یعنی حد  $z \rightarrow 1$  بدست آورید.

■ سیستمی متشکل از  $N$  نوسانگر هارمونیک یکسان با فرکانس  $\omega_0$  در نظر بگیرید. تابع پارش گراند کانونیک را برای دو حالت زیر حساب کنید:



الف: وقتی که نوسانگرها از آمار بولتزمن تبعیت می کنند.

ب: وقتی که نوسانگرها از آمار بوز-اینشتین تبعیت می کنند.

■ متوسط تعداد ذرات را در هر لایه انرژی  $\epsilon_k$  با  $\langle n_k \rangle$  نشان می دهیم. میزان افت و خیز این کمیت را برای یک سیستم دلخواه حساب کنید.

منظور کمیت زیر است:

$$\langle n_k^2 \rangle - \langle n_k \rangle^2.$$

به طور مشخص میزان این افت و خیز را برای یک گاز بوزونی بدست آورید.