

توزیع ماکسول بولتزمن

وحید کریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

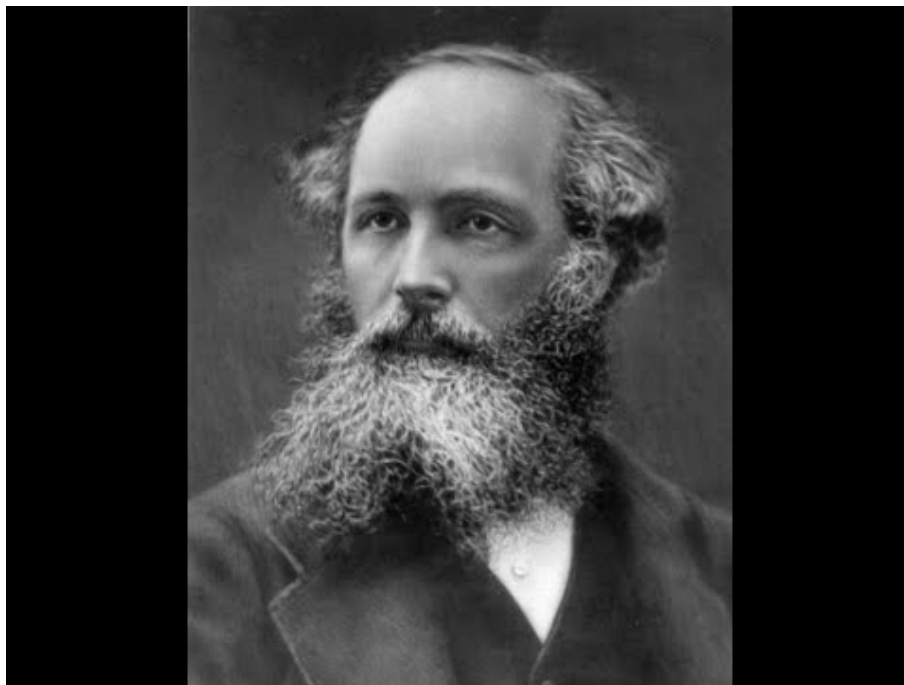
۲۷ آبان ۱۳۹۸

۱ مقدمه

اگر در یک گاز ایده آل یک مولکول را به طور تصادفی انتخاب کنیم، سرعت اش چقدر است؟ چه مدت از زمان آخرین برخورد این مولکول گذشته است؟ برخورد بعدی را در چه زمانی انجام می دهد؟ چه فاصله ای را طی می کند تا برخورد بعدی را انجام دهد؟ اگر یک سوراخ به مساحت مثلاً یک سانتی متر در دیواره اتافی که این گاز را نگهداشته است ایجاد کنیم، پس از چه مدت ظرف از گاز خالی می شود؟ اگر یک گاز متفاوت را به درون یک ظرف که محتوی یک گاز دیگر است تزریق کنیم، چه مدت طول می کشد تا این گاز دوم در فضای ظرف پخش شود؟ در این درس سعی می کنیم که پاسخی برای این سوال ها پیدا کنیم یا لاقلاً روشی برای پاسخ گویی به آنها پیدا کنیم.

۲ توزیع ماکسول-بولتزمن

در آزنابل کانونیک می توانیم به سوالات خیلی جزئی تری در باره احتمالات پاسخ دهیم. مثلاً از خود می پرسیم که احتمال این که یک ذره دارای مکان r_1 و تکانه p_1 باشد، چقدر است. این احتمال را با $f(r_1, p_1)$ نشان می دهیم. می دانیم که احتمال اینکه همه ذرات دارای تکانه ها و



شکل ۱: جیمز کلرک ماکسول (۱۸۳۱-۱۸۷۹)

مکان های خاص باشند از رابطه زیر تعیین می شود:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2; \dots \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}} \quad (۱)$$

احتمال $f(r_1, p_1)$ با انتگرال گیری روی بقیه مختصات و تکانه ها بدست می آید:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) = \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_N P(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N). \quad (۲)$$

واضح است که حاصل این محاسبه برابر است با:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) = C e^{-\beta \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m}} \quad (۳)$$

که در آن C یک ثابت است. این رابطه می گوید که احتمال وجود ذره در نقاط مختلف فضا یکسان است، زیرا طرف راست به $\mathbf{r}$ بستگی ندارد.

احتمال آنکه این ذره تکانه $\mathbf{p}$ داشته باشد برابر می شود با:

$$f(\mathbf{p}) = C' e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}} \quad (۴)$$

و ثابت C' از شرط بهنجارش احتمالات بدست می آید:

$$f(\mathbf{p}) = \left(\frac{\beta}{2\pi m} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{\mathbf{p}^2}{2m}}. \quad (5)$$

برای آنکه تابع توزیع سرعت را بدست آوریم از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$f(\mathbf{v})d\mathbf{v} = P(\mathbf{p})d\mathbf{p} \quad (6)$$

و با توجه به این که $\vec{p} = m\vec{v}$ بدست می آوریم:

$$f(\mathbf{v}) = m^3 f(\mathbf{p}), \quad (7)$$

و یا

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2}. \quad (8)$$

این تابع توزیع می گوید که احتمال این که یک ذره سرعت $\mathbf{v}$ داشته باشد تنها به اندازه سرعت بستگی دارد و نه به جهت آن و این همان چیزی است که انتظار داریم (البته در غیاب نیروهای خارجی). اگر تنها به توزیع یکی از مولفه های سرعت علاقمند باشیم از همین رابطه بدست می آوریم:

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2}. \quad (9)$$

از این تابع توزیع بدست می آوریم:

$$\langle |v_x| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) |v_x| dv_x = 2 \int_0^{\infty} f(v_x) v_x dv_x = \sqrt{\frac{2k_B T}{\pi m}}. \quad (10)$$

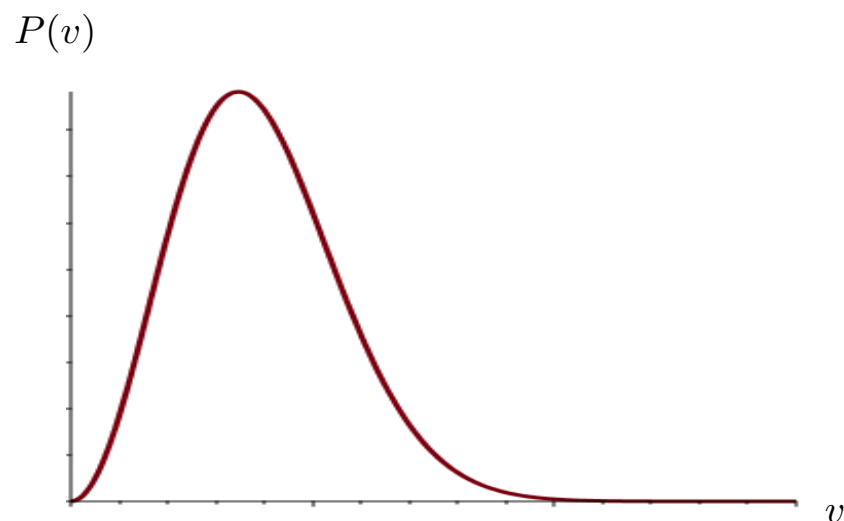
برای آنکه تابع توزیع اندازه سرعت ها را بدست آوریم می بایست روی زوایای مختلف انتگرال بگیریم. با توجه به همسانگرد بودن تابع توزیع

$f(\mathbf{v})$ را بدست می آوریم:

$$f(v)dv = 4\pi v^2 dv f(\mathbf{v}) \quad (11)$$

و یا

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{1}{2} m v^2}. \quad (12)$$



شکل ۲: تابع توزیع سرعت ذرات در یک گاز ایده آل.

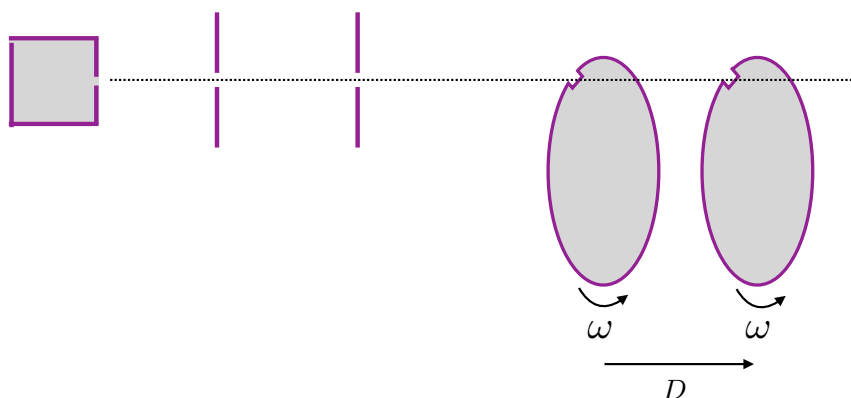
شکل (۲) تابع توزیع اندازه سرعت را نشان می دهد. محتمل ترین اندازه سرعت یا v_m جایی است که تابع توزیع بالا ماکزیمم شود. یک محاسبه ساده نشان می دهد که :

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (۱۳)$$

مقدار احتمال در این نقطه برابر است با: $f_m = f(v_m) = e^{-1} \sqrt{\frac{8\pi m}{kT}}$.

■ تمرین: مقدار متوسط سرعت یعنی $\bar{v}$ و واریانس آن را بدست آورید.

■ تمرین: محتمل ترین مقدار اندازه سرعت، متوسط $\langle v \rangle$ و هم چنین $\sqrt{\langle v^2 \rangle} := v_{rms}$ را بدست آورده و مقادیر آنها را با هم مقایسه کنید.



شکل ۳: مولکول های گاز از درون محفظه ای در دمای T به بیرون فرار می کنند. دو صفحه موازی به عنوان یک سو کننده عمل می کنند و باریکه از مولکولها به سمت چرخ های گردان حرکت می کنند. در چرخها یک شیار ایجاد شده. سرعت زاویه ای چرخها یکسان است ولی یک اختلاف زمانی Δt در شروع حرکت دارند. بنابراین مولکولی که از یک شیار چرخ اول حرکت کرده فقط در صورتی از شیار چرخ دوم نیز عبور می کند که به موقع به آن شیار برسد. یعنی رابطه زیر برقرار باشد: $D = v\Delta t$. از این رابطه می توان سرعت ذرات را بدست آورد. با تغییر Δt و ثبت تعداد ذرات برای سرعت های مختلف می توان تابع توزیع سرعت ذرات را بدست آورد.

۳ تحقیق تجربی توزیع ماکسول-بولتزمن

برای تحقیق درستی تابع توزیع سرعت ها راه های متفاوتی وجود دارد. یک روش ساده در شکل (۳) توضیح داده شده است. آزمایش هایی از این دست نشان می دهند که تابع توزیع ماکسول بولتزمن به خوبی نشان دهنده توزیع احتمالاتی سرعت ذرات در یک گاز ایده آل است.

۴ فشار و معادله حالت

مولکولهایی در ظرف گاز حرکت می کنند به دیواره ها برخورد می کنند و منعکس می شوند. در هر برخورد مقداری تکانه به دیواره ها منتقل می کنند که باعث فشار به دیواره ظرف می شود. این فشار همان فشار گاز است. چگونه می توان این فشار را حساب کرد. اولین کار و بهترین کار این است که یک حساب سرانگشتی انجام دهیم. همیشه این حساب های سرانگشتی مقدم بر هر نوع محاسبه پیچیده ای هستند چرا که بدون زحمت خیلی زیاد اغلب اوقات جوابی بدست می دهند که خصوصیات اصلی جواب دقیق نهایی را در خود دارند و فقط ممکن است از نظر ضرایب عددی کمی با جواب دقیق تفاوت داشته باشند. برای این محاسبه یک قسمت از دیواره را به مساحت A در راستای عمود با محور x در نظر می گیریم. فرض می کنیم که همه ذرات با سرعت متوسطی که آن را v می نامیم حرکت می کنند. به طور سرانگشتی فرض می کنیم که $1/6$ این ذرات در جهت مثبت x حرکت می کنند و بقیه هم در جهات دیگر. حال اگر زمان t صبر کنیم تمام مولکولهایی که در استوانه نشان داده شده در شکل (۴) قرار دارند و به سمت دیواره حرکت می کنند به این دیواره برخورد می کنند. تعداد این ذرات برابر است با:

$$\frac{1}{6}n \times vt \times A \quad (۱۴)$$

که در آن n چگالی تعداد ذرات است. میزان کل تکانه ای که این ذرات به دیواره وارد می کنند برابر است با:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{6}n \times vt \times A \times 2mv \quad (۱۵)$$

بنابراین فشار وارد شده به سطح را می توان حساب کرد. داریم:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\mathcal{P}}{tA} = \frac{1}{3}nmv^2 \quad (۱۶)$$

اما می دانیم که انرژی متوسط مولکولها برابر است با:

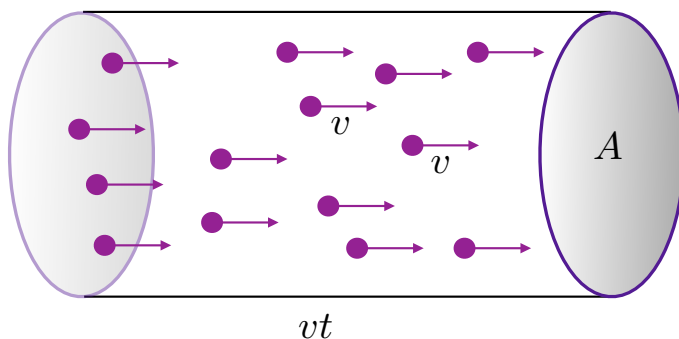
$$\epsilon = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT \quad (۱۷)$$

بنابراین بدست می آوریم:

$$P = \frac{2}{3}U \quad (۱۸)$$

که در آن $U = N\epsilon$ انرژی داخلی گاز است و یا

$$PV = NkT. \quad (۱۹)$$



شکل ۴: در یک زمان t تمام مولکولهای نشان داده شده در استوانه به دیواره برخورد می کنند و به آن فشار وارد می کنند. تعداد این مولکولها $1/6$ تعداد کل مولکولهای درون استوانه هستند. اندازه سرعت همه مولکولهای گاز مساوی است. به این ترتیب با حساب سرانگشتی ساده معادله حالت گاز را بدست آوردیم.

■ در محاسبه ای که انجام دادیم سرعت همه مولکولها را یکی گرفتیم. حال فرض کنید که بازهم یک ششم همه مولکول ها در جهت مثبت x حرکت می کنند. اما اندازه سرعت آنها مطابق با توزیع ماکسول بولتزمن است. با تعمیم استدلال فوق فشار را محاسبه کنید. آیا جوابی که به دست می آورید بهتر از جوابی است که با محاسبه سرانگشتی به دست آوردیم؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

چگونه باید محاسبه فشار را به صورت دقیق انجام دهیم، وقتی که مولکوها از همه طرف و با زاویه های گوناگون و با سرعت های گوناگون به دیواره برخورد می کنند و به آن تکانه های متفاوت وارد می کنند؟ بهترین کار استفاده از مفهوم شار است. می دانیم که اگر چگالی ذرات را در یک نقطه از فضا با ρ نشان دهیم و اگر همه ذرات سرعت مساوی v داشته باشند، آنگاه چگالی جریان این ذرات برابر است با:

$$\mathbf{J} := \rho \mathbf{v}. \quad (20)$$

این چگالی برابر است با تعداد ذراتی که در واحد زمان از واحد سطحی که عمود بر بردار سرعت است گذر می کنند. اگر سرعت ذرات متفاوت باشد، آنگاه چگالی جریان یا شار ذرات را وابسته به سرعت تعریف می کنیم:

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}) = \rho(\mathbf{v})\mathbf{v} = (nf(\mathbf{v}))\mathbf{v} \quad (21)$$

که در آن $\rho(\mathbf{v}) = nf(\mathbf{v})$ چگالی ذرات با سرعت $\mathbf{v}$ است. هم چنین فرض کرده ایم چگالی تعداد ذرات در فضا ثابت و برابر با n است. $\mathbf{J}(\mathbf{v})$ تعداد ذراتی با سرعت $\mathbf{v}$ است که در واحد زمان از واحد سطح عمود بر بردار سرعت $\mathbf{v}$ عبور می کنند. بنابراین اگر یک المان سطح A در نظر بگیریم می توانیم بنویسیم: چگالی ذراتی که با سرعت $\mathbf{v}$ در زمان t به سطح A برخورد می کنند. اگر تعریف (21) را در نظر بگیریم و هم چنین سطح را عمود بر محور x تصور کنیم خواهیم داشت:

$$\mathcal{N}(\mathbf{v}) = \mathbf{J}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A} \times t = nf(\mathbf{v})v_x \times A \times t \quad (22)$$

و هم چنین تکانه وارد شده به این سطح

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}) = nf(\mathbf{v})v_x \times A \times t \times 2mv_x = 2nmv_x^2 At \quad (23)$$

بنابراین کل تکانه وارد شده در واحد سطح در واحد زمان یعنی همان فشار برابر است با:

$$P = \int_{v_x \geq 0} d\mathbf{v} 2nf(\mathbf{v})v_x^2 = \int d\mathbf{v} nf(\mathbf{v})v_x^2 = nm\langle v_x^2 \rangle \quad (24)$$

اما با توجه به این که

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \quad (25)$$

خواهیم داشت:

$$P = \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n\epsilon \quad (26)$$

و در نتیجه

$$PV = \frac{2}{3} U = Nk_B T. \quad (27)$$

این مثال یکی از بهترین مثالهایی است که نشان می دهد محاسبه سرانگشتی و فیزیکی اولیه حتی می تواند جواب دقیق را در همان مرحله اول بدست دهد.

۵ فرار مولکول ها

همان محاسبه ای که برای تعیین فشار یک گاز انجام دادیم با کمی تغییر برای محاسبه یک کمیت مهم دیگر نیز به کار می رود، البته با اندکی تغییر. این پدیده مربوط به فرار یا نشت^۱ یک گاز است. فرض کنید که در دیواره ظرف یک سوراخ کوچک به مساحت A ایجاد شده باشد. سوال این است که نرخ فرار مولکولهای گاز از این ظرف چقدر است؟ برای این کار کافی است از همان رابطه (۲۲) استفاده کنیم، بدون اینکه تکانه وارد شده به سطح را وارد کنیم. در نتیجه تعداد ذراتی که در زمان t از سوراخ به مساحت A می گریزند عبارت است از:

$$\mathcal{N} = \int \mathcal{N}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = A n t \int_{v_x \geq 0} f(\mathbf{v}) v_x. \quad (28)$$

در نتیجه تعداد مولکولهایی که از واحد سطح در واحد زمان عبور می کنند برابر است با:

$$\varepsilon = n \int_{v_x \geq 0} f(\mathbf{v}) v_x = n \frac{1}{2} \langle |v_x| \rangle. \quad (29)$$

با جایگذاری $\langle |v_x| \rangle$ از رابطه (۱۰) بدست می آوریم:

$$\varepsilon = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}. \quad (30)$$

اگر تمرین های این درس را تا اینجا حل کرده باشید متوجه شده اید که

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

با در نظر گرفتن این رابطه می توان نرخ گریز مولکولها را به شکل ساده زیر نوشت:

$$\varepsilon = \frac{1}{4} n \langle v \rangle. \quad (31)$$

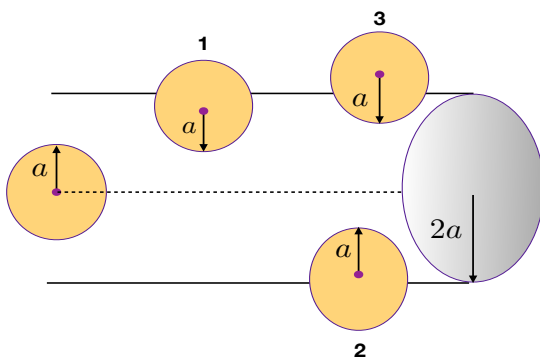
^۱Efusion

۶ پوش آزاد میانگین

در این بخش می خواهیم به این سوال ها پاسخ دهیم که متوسط زمان بین دو برخورد برای یک ذره چقدر است؟ در این فاصله زمانی یک ذره چه مسافتی را طی می کند؟ برای پاسخ به این سوالات نخست احتیاج به مفهوم سطح مقطع پراکندگی^۲ داریم.

۱۰۶ سطح مقطع پراکندگی

گازی را در نظر بگیرید که مولکولهای آن کره هایی سخت^۳ با شعاع a هستند. مولکول های دیگری که بر سر راه این مولکول قرار می گیرند آن را به شکل یک دایره به شعاع πa^2 می بینند. سطح مقطع این مولکول بنابراین πa^2 است. اما سطح مقطع پراکندگی از این بزرگتر است چرا که خود مولکولهایی که بر سر راه این مولکول قرار گرفته اند نیز حجم و سطح دارند. در واقع همانطور که شکل (۵) نشان می دهد سطح مقطع پراکندگی برای این مولکول ها برابر است با $\sigma = \pi(2a)^2$. اگر دقیق تر بخواهیم سطح مقطع پراکندگی کمی از این مقدار هم بزرگ تر است زیرا مولکول ها نیازی به تماس فیزیکی با یکدیگر ندارند تا بتوانند بر هم نیرو وارد کنند و یک دیگر را از مسیر راست منحرف کنند. محاسبه دقیق سطح مقطع پراکندگی می بایست با توجه به پتانسیل بین دو مولکول و با استفاده از مکانیک کوانتومی صورت پذیرد ولی هر چه هست همواره عبارت نهایی ضربی از πa^2 است که در آن a شعاع موثر یک مولکول است.



شکل ۵: برای مولکوهایی که شعاع آنها برابر با a است، سطح مقطع پراکندگی برابر است با $\sigma = \pi(2a)^2 = 4\pi a^2$.

^۲ Scattering Cross Section

^۳ Hard Spheres

۲.۶ زمان پوش میانگین

۴ مولکول های گاز دایما با هم برخورد می کنند و مسیرشان عوض می شود. بین برخوردها هر مولکولی یک مسیر راست را طی می کند. می خواهیم ببینیم زمان متوسط بین برخوردها چقدر است؟ مسافتی که هر مولکول بین دو برخورد طی می کند چقدر است؟ این کمیت ها چه ربطی به دما و چگالی دارند. این ها سوالاتی هستند که در این بخش در جستجوی پاسخ آنها هستیم. سطح مقطع پراکندگی یک مولکول را با σ نشان می دهیم. در این صورت در فاصله زمانی dt این مولکول یک حجم $\sigma v dt$ را جاروب می کند. احتمال اینکه در این فاصله زمانی مولکول یک برخورد انجام دهد برابر است با احتمال اینکه یک مولکول بر سر راهش قرار گیرد یعنی احتمال اینکه یک مولکول در این حجم جاروب شده قرار بگیرد. این احتمال برابر است با: $N \times \frac{\sigma v dt}{V}$ یعنی نسبت حجم جاروب شده به حجم کل فضا ضرب در تعداد کل مولکولها که مستقل از هم می توانند در این حجم قرار بگیرند. بنابراین احتمال برخورد در این فاصله زمانی برابر است با $\sigma n v dt$ و احتمال برخورد نکردن نیز برابر است با $1 - \sigma n v dt$.

حال اینکه از زمان آخرین برخورد یک مولکول زمان t گذشته باشد را با $P(t)$ نشان می دهیم. مثل هر تابع دیگری این تابع نیز در بسط زیر صدق می کند:

$$P(t + dt) = P(t) + \frac{dP}{dt} dt \quad (۳۲)$$

از طرفی احتمال اینکه مولکول تا زمان $t + dt$ برخورد نکرده باشد برابر است با احتمال اینکه تا زمان t برخوردی نداشته و در فاصله کوتاه dt نیز بدون برخورد مانده باشد، یعنی

$$P(t + dt) = P(t)(1 - \sigma n v dt). \quad (۳۳)$$

بنابراین بدست می آوریم

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = -\sigma n v \quad (۳۴)$$

اما بنابر تعریف می دانیم که $P(0) = 1$ زیرا احتمال اینکه از زمان آخرین برخورد ذره صفر ثانیه گذشته باشد همواره برابر است با یک. در نتیجه حل معادله بالا عبارت است از:

$$P(t) = e^{-\sigma n v t}. \quad (۳۵)$$

Mean Free Time^۴

این عبارت احتمال این است که ذره پس از گذشت زمان t از آخرین برخوردش هنوز بدون برخورد مانده باشد. این عبارت چیزی در باره بعد از این لحظه نمی گوید. حالا می پرسیم احتمال اینکه ذره فاصله زمانی بین دو برخوردش برابر با t باشد چقدر است؟ این احتمال برابر است با احتمال اینکه ذره تا زمان t بدون برخورد مانده باشد و در فاصله زمانی $(t, t + dt)$ یک برخورد انجام دهد. بنابراین اگر این تابع توزیع را با $P_{coll}(t)$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$P_{coll}(t)dt = P(t) \times nv\sigma dt = nv\sigma e^{-nv\sigma t} \quad (36)$$

با استفاده از این رابطه می توانیم زمان متوسط بین برخوردها را حساب کنیم:

$$\tau = \int_0^{\infty} t e^{-nv\sigma t} nv\sigma dt \quad (37)$$

و یا

$$\tau = \frac{1}{nv\sigma}. \quad (38)$$

■ فاصله پویش میانگین

در اولین تقریب می توان گفت ذره ای که به طور متوسط هر τ ثانیه یک برخورد انجام می دهد و سرعت متوسط اش نیز برابر با v است، بین هر دو برخورد فاصله متوسطی برابر با $l = v\tau = v \times \frac{1}{nv\sigma} = \frac{1}{n\sigma}$ را طی می کند. این فاصله طول پویش آزاد میانگین^۵ نام دارد.

۷ مسئله ها

■ انرژی متوسط مولکولهای هوا را در فشار یک اتمسفر حساب کنید.

■ یک ابر میان ستاره ای از اتم های هیدروژن خنثی دمایی حدود ۵۰ درجه کلوین دارد. جرم این ابر ۱۰۰ برابر جرم خورشید است. فشار این ابر میان ستاره ای چقدر است؟ حجم این ابر را نیز بر حسب مکعب سال نوری حساب کنید. سرعت متوسط اتم ها را نیز بدست آورید.

■ یک گاز در نظر بگیرید که تابع توزیع اندازه سرعت مولکولهایش $f(v)$ باشد. یعنی درصد مولکول هایی که با سرعت بین v و $v + dv$ حرکت می کنند برابر با $f(v)dv$ باشد.

^۵ Mean Free Path

الف: نشان دهید که در صد مولکولهایی که با سرعت بین

v و $v + dv$ و زاویه بین θ و $\theta + d\theta$ نسبت به یک محور معین حرکت می کنند برابر است با

$$\frac{1}{2} f(v) dv \sin \theta d\theta. \quad (39)$$

ب: نشان دهید که تعداد مولکولهایی که با سرعت بین

v و $v + dv$ و زاویه بین θ و $\theta + d\theta$ در واحد زمان به واحد سطح از دیواره ظرف برخورد می کنند برابر است با

$$\frac{1}{2} n v f(v) dv \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad (40)$$

که در آن n چگالی مولکول های در هر نقطه از فضا است. فرض کرده ایم که چگالی در تمام ظرف یکسان است. حال برای گازی که تابع توزیع سرعت مولکولهایش از نوع ماکسول-بولتزمن است،

ب: با استفاده از این رابطه فشار وارد شده بر دیواره های ظرف را حساب کنید.

پ: نشان دهید که متوسط انرژی جنبشی مولکولهایی که به دیواره برخورد می کنند برابر با $2kT$ و متوسط انرژی جنبشی تمام مولکول ها برابر با $\frac{3}{2}kT$ است.

ت: هم چنین نشان دهید که $\langle \cos \theta \rangle = \frac{2}{3}$.

■ در یکی از مسئله های قبل نشان دادید که در صد مولکولهایی که با سرعت بین

v و $v + dv$ و زاویه بین θ و $\theta + d\theta$ نسبت به یک محور معین حرکت می کنند برابر است با

$$\frac{1}{2} f(v) dv \sin \theta d\theta \quad (41)$$

که در آن $f(v)$ می تواند هر تابع توزیعی برای ذرات باشد. حال مستقل از نوع تابع توزیع نشان دهید که روابط زیر برقرارند:

$$\langle u \rangle = 0 \quad \langle u^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle, \quad \langle |u| \rangle \quad (42)$$

در این روابط u می تواند هر کدام از مولفه های سه گانه بردار سرعت باشد.

■ با استفاده از تابع توزیع ماکسول - بولتزمن ، تابع توزیع بردار سرعت نسبی بین دو ذره را بدست آورید. منظور این است که اگر سرعت دو ذره را با v_1 و v_2 نشان دهیم، تابع توزیع بردار سرعت $v_r := v_1 - v_2$ را محاسبه کنید. هم چنین تابع توزیع اندازه سرعت نسبی را بدست آورید. سپس کمیت های زیر را تعیین کنید:

$$\langle v_r \rangle, \quad \langle v_r^2 \rangle. \quad (43)$$

■ یک ظرف محتوی گاز مولکول دواتمی نیتروژن N_2 است. فشار درون ظرف برابر با یک اتمسفر و دمای آن برابر صفر درجه سانتی گراد است. اگر در دیواره این ظرف یک سوراخ به شعاع پنج میلی متر درست شده باشد، چه مدت طول می کشد که گاز دورن ظرف خالی شود.

■ ظرف گازی را در نظر بگیرید که حاوی یک گاز در دما و فشار معین است. مولکولهایی که از یک سوراخ ایجاد شده در دیواره این ظرف به بیرون فرار می کنند قاعدتا سرعت متوسط بالاتری نسبت به بقیه مولکول ها دارند. اگر تابع توزیع مولکولها $f(v)$ باشد، تابع توزیع مولکولهایی که فرار می کنند برابر است با

$$vf(v). \quad (44)$$

اگر تابع توزیع مولکولها از نوع ماکسول-بولتزمن باشد، انرژی جنبشی متوسط مولکولهایی که از ظرف فرار می کنند، چقدر است؟ این انرژی متوسط چند برابر انرژی متوسط مولکولهای گاز است؟

■ یک گاز هیدروژنی بین ستاره ای دارای دمای داخلی ۵۰ درجه کلون است. زمان پویش آزاد میانگین و هم چنین فاصله پویش آزاد میانگین در این گاز چقدر است؟