

درسنامه نظریه گروه، درس نهم : ساختمان جبرهای لی

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲۹ اردیبهشت ۱۳۹۵

۱ مقدمه

در این فصل با ساختمان جبرهای لی به طور کلی و نه الزاماً جبرهای لی وابسته به گروه های لی یا گروه های ماتریسی آشنا می شویم. شباهت های بسیاری بین مفاهیم نظریه گروه و جبرهای لی وجود دارد و در بسیاری موارد خواننده می تواند تعاریف مربوطه مثل زیرجبر، همسانی، یکسانی، نمایش و نظایر آنها وهم چنین صورت قضایا و اثبات آنها را حدس بزند. آنچه که در این فصل یاد خواهیم گرفت ما را آماده می کند که در فصل های آینده طبقه بندی جبرهای لی ساده را انجام دهیم.

ممکن است که مباحث موجود در این درس کمی بیشتر از حوصله دانشجویان باشد. به همین دلیل بعضی از بخش های این درس با علامت * مشخص شده اند. خواندن این بخش ها و یاد گرفتن آنها برای گذران امتحان نهایی درس لازم نیست.

۲ جبرلی

■ تعریف: فضای برداری A یک جبرلی خوانده می شود هرگاه یک عمل دوتایی دوخطی $[,] : A \times A \rightarrow A$ موسوم به براکت در آن تعریف شده باشد که در خاصیت های زیر صدق کند:

$$[x, y] = -[y, x] \quad (۱)$$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0. \quad (۲)$$

یادآوری می شود که یک عمل دوخطی (*bilinear*) نسبت به هر دو متغیر خود خطی است یعنی به ازای هر دو بردار x و y و هر عدد α :

$$[\alpha x + y, z] = \alpha [x, z] + [y, z]$$

و

$$[x, \alpha y + z] = \alpha [x, y] + [x, z]$$

هرگاه فضای برداری A حقیقی (مختلط) باشد، جبرلی مربوطه نیز یک جبر حقیقی (مختلط) خوانده می شود. بعد جبر همان بعد فضای برداری است. یک جبرلی A آبدلی یا جابجایی خوانده می شود اگر $[x, y] = 0 \quad \forall x, y \in A$.

هرگاه برای فضای برداری A پایه $\{e_i\}$ را انتخاب کنیم می توانیم از خاصیت دوخطی بودن استفاده کنیم و برای هر دو بردار دلخواه v و w بنویسیم:

$$[v, w] = [v^i e_i, w^j e_j] = v^i w^j [e_i, e_j]. \quad (۳)$$

بنابراین اگر براکت بردارهای پایه را بلد باشیم می توانیم براکت هر دو بردار دلخواه را حساب کنیم. حال براکت دو بردار پایه بنابر تعریف جبر می بایست خود یک بردار باشد و بنابراین می بایست بتوان آن را برحسب بردارهای پایه فضا بسط داد. این بسط را به شکل زیر می نویسیم:

$$[e_i, e_j] = f_{ij}^k e_k, \quad (4)$$

که در آن روی شاخص های تکراری جمع بسته شده است. f_{ij}^k ها اعداد مختلفی هستند که ثابت های ساختاری جبر در آن پایه خوانده می شوند. هرگاه پایه جبر را عوض کنیم ثابت های ساختاری نیز عوض می شوند.

■ تمرین: هرگاه بردارهای پایه با رابطه $e'_i = X_i^j e_j$ به هم مربوط باشند، رابطه ثابت های ساختاری را در این دو پایه بدست آورید.

از خاصیت پادتقارن براکت و هم چنین اتحاد جاکوبی یعنی از روابط زیر

$$[e_i, e_j] = -[e_j, e_i], \quad (5)$$

$$[[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] = 0, \quad (6)$$

معلوم می شود که در هر پایه ای ثابت های ساختاری در روابط زیر صدق می کنند:

$$f_{ij}^k = -f_{ji}^k \quad (7)$$

$$f_{ij}^m f_{mk}^n + f_{jk}^m f_{mi}^n + f_{ki}^m f_{mj}^n = 0 \quad \forall i, j, k. \quad (8)$$

یک جبر لی جابجایی (*Abelian Lie Algebra*)، جبری است که همه عناصر آن باهم جابجا شوند. در چنین جبری ثابت های ساختاری در هر پایه ای برابر با صفر هستند.

■ مثال: هر فضای برداری V را می توان با تعریف براکت به صورت $[x, y] = 0 \quad \forall x, y \in V$ تبدیل به یک جبرلی آبلی کرد.

■ مثال: هر جبر شرکت پذیر A را می توان با تعریف $[a, b] := ab - ba$ تبدیل به یک جبرلی کرد. اگر جبر شرکت پذیر اولیه ناجابجایی باشد یعنی $ab \neq ba$ آنگاه جبرلی ساخته شده نیز ناجابجایی خواهد بود، یعنی $[a, b] \neq 0$. منظور از جبر شرکت پذیر یک فضای برداری است که در آن یک ضرب به شکل $\times: V \times V \rightarrow V$ تعریف شده است و این ضرب دو خطی و شرکت پذیر است. به عنوان مثال فضای برداری ماتریس های مربعی یک جبر شرکت پذیر است.

■ مثال: فرض کنید که V یک فضای برداری و $gl(V)$ فضای برداری تمام تبدیلات خطی روی V باشد. این فضای جبر شرکت پذیر است که در آن ضرب دو تبدیل خطی همان ترکیب دو تبدیل خطی است. یعنی $(xy)(v) := x(y(v))$. این جبر شرکت پذیر را می توان تبدیل مطابق با مثال ۲ به یک جبرلی تبدیل کرد. هرگاه V برابر با R^n باشد جبرلی مربوطه را با $gl(n, R)$ نشان می دهند. $gl(n, C)$ نیز به همین ترتیب تعریف می شود.

هرگاه پایه $\{E_{ij}\}$ را برای $gl(n, R)$ یا $gl(n, C)$ اختیار کنیم خواهیم داشت:

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}. \quad (9)$$

■ مثال: فضای برداری سه بعدی R^3 با ضرب برداری متعارف

$$[\vec{r}, \vec{r}'] = \vec{r} \times \vec{r}' \quad (10)$$

یک جبرلی است. هرگاه پایه متعامد یکه $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ را برای فضای سه بعدی اختیار کنیم خواهیم داشت:

$$[\hat{e}_1, \hat{e}_2] = \hat{e}_3, \quad [\hat{e}_2, \hat{e}_3] = \hat{e}_1, \quad [\hat{e}_3, \hat{e}_1] = \hat{e}_2. \quad (11)$$

■ مثال: جبرلی $E(R^2)$ به صورت یک فضای خطی با پایه های P_x, P_y, L و روابط جابجایی زیر تعریف می شود:

$$[P_x, P_y] = 0, \quad [L, P_x] = iP_y, \quad [L, P_y] = -iP_x. \quad (12)$$

این جبریک جبرلی مختلط سه بعدی است.

■ مثال: جبرلی $E(R^3)$ به صورت یک فضای خطی با پایه های $P_x, P_y, P_z, L_x, L_y, L_z$ و روابط جابجایی زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} [P_j, P_k] &= 0, \\ [L_j, P_k] &= i\epsilon_{ijk}P_k, \\ [L_j, L_k] &= i\epsilon_{ijk}L_k. \end{aligned} \quad (13)$$

■ مثال: به ازای هر عدد صحیح n فضای برداری $2n + 1$ بعدی با بردارهای پایه $\{I, x_i, p_i, \quad i = 1 \dots n\}$ و روابط جابجایی زیر تشکیل یک جبرلی می دهد:

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad [x_i, p_j] = \delta_{ij}I, \quad [I, x_i] = [I, p_i] = 0 \quad (14)$$

این جبر جبرهای زینبرگ^۱ نامیده می شود.

■ مثال: جبرلی نهایت بعدی ویراسورو^۲ توسط بردارهای پایه $\{L_n \quad n \in Z\}$ جاروب می شود و دارای روابط جابجایی زیر است:

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m}. \quad (15)$$

^۱ Heisenberg Algebra

^۲ Virasoro Algebra

۳ زیرجبرلی

■ **تعریف:** فرض کنید که A یک جبرلی و B یک زیرفضای خطی از A باشد. اگر B خود یک جبرلی باشد آن را یک زیرجبرلی از A می گویند.

■ **مثال:** هر جبری دو زیرجبربدهی دارد یکی خودش و دیگری زیرفضای صفری $\{0\}$.

■ **مثال:** در جبر $gl(n, R)$ ، مجموعه ماتریس های با رد صفر تشکیل یک زیرجبرمی دهند. این جبر تبدیلات خطی خاص $sl(n, R)$ نامیده می شود و با $sl(n, R)$ نشان داده می شود.

■ **مثال:** در فضای برداری حقیقی V ضرب داخلی $\langle x, y \rangle$ را در نظر بگیرید. این ضرب داخلی در شرط $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ صدق می کند. مجموعه تبدیلاتی مثل T را در نظر بگیرید که در خاصیت زیر صدق می کنند:

$$\langle Tx, y \rangle + \langle x, Ty \rangle = 0, \quad (16)$$

مجموعه این تبدیلات یک زیرجبرلی از $gl(V)$ تشکیل می دهند که آن را با $o(V)$ نشان می دهند و جبر تبدیلات متعامد روی فضای برداری V می خوانند. درحالتی که داشته باشیم $V = R^n$ یا $V = C^n$ جبرمزبور را بانماد $o(n, R)$ یا $o(n, C)$ نشان می دهند. ضرب داخلی را با انتخاب پایه های مناسب همواره می توان به صورت زیر درآورد:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i \quad (17)$$

در این صورت عناصر $o(n, R)$ یا $o(n, C)$ از ماتریس هایی تشکیل می شوند که در شرط $T^t + T = 0$ صدق می کنند که در آن T^t ترانزپوز ماتریس T است.

■ مثال: در فضای برداری مختلط V ضرب داخلی $\langle x, y \rangle$ را در نظر بگیرید که در شرط $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$ صدق می کند. مجموعه تبدیلاتی مثل T را در نظر بگیرید که در خاصیت زیر صدق می کنند:

$$\langle Tx, y \rangle + \langle x, Ty \rangle = 0, \quad (18)$$

مجموعه این تبدیلات یک زیرجبرلی از $gl(V)$ تشکیل می دهند که آن را با $u(V)$ نشان می دهند و جبر تبدیلات یکانی روی فضای برداری V می خوانند. یک زیرجبر از $u(V)$ از تبدیلاتی تشکیل می شود که رد آنها برابر با صفر باشد. این زیرجبر را با $su(V)$ نشان می دهیم.

در حالتی که داشته باشیم $V = C^n$ جبرهای مزبور را بانماد $u(n)$ یا $su(n)$ نشان می دهند. این جبرها به ترتیب از ماتریس های پادهرمیتی برای $u(n)$ و ماتریس های پادهرمیتی بدون رد برای $su(n)$ تشکیل می شوند.

■ مثال: در فضای برداری V ضرب داخلی پادمتقارن و غیرواگن $\langle x, y \rangle$ را در نظر بگیرید. $\langle x, y \rangle = -\langle y, x \rangle$. منظور از یک ضرب داخلی غیرواگن ضربی است که در آن از $\langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y$ بتوان نتیجه گرفت که $x = 0$. مجموعه تبدیلاتی مثل T را در نظر بگیرید که در خاصیت زیر صدق می کنند:

$$\langle Tx, y \rangle + \langle x, Ty \rangle = 0, \quad (19)$$

مجموعه این تبدیلات یک زیرجبرلی از $gl(V)$ تشکیل می دهند که آن را با $sp(V)$ نشان می دهند و جبر تبدیلات همتافته یا *symplectic* خوانده می شود. در حالتی که داشته باشیم $V = C^{2n}$ یا $V = R^{2n}$ جبرهای مزبور را بانماد $sp(2n, R)$ یا $sp(2n, C)$ نشان می دهند. در یک پایه مناسب می توان ضرب داخلی پادمتقارن را به صورت زیر نشان داد.

$$\langle \eta, \eta' \rangle = \eta^t J \eta', \quad (20)$$

که در آن

$$\eta = \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \\ p^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ p^n \end{pmatrix} \quad \eta' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x'^n \\ p'^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ p'^n \end{pmatrix} \quad (21)$$

و

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

■ مثال: درجبرلی $E(R^3)$ ، فضای برداری تولید شده توسط P_i یک زیرجبراست. هم چنین فضای برداری تولید شده توسط L_i ها نیز یک زیرجبراست.

۴ همسانی و یکسانی جبرهای لی

درست مثل گروه ها در مورد جبرهای لی نیز ممکن است که دو جبر ظاهر متفاوتی داشته باشند ولی واقعاً ساختار آنها یکسان باشد. یکسان بودن این ساختار به این معناست که می توان بین این دو جبر یک تناظر یک به یک برقرار کرد به نحوی که رابطه

بین براکت ها نیز حفظ شود. به عبارت بهتر یک نگاشت خطی $\phi : A \rightarrow B$ بین دو جبرلی یک همسانی^۴ نامیده می شود هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$[\phi(a), \phi(a')] = \phi([a, a']). \quad (۲۳)$$

یک همسانی یکسانی^۵ نامیده می شود اگر یک به یک و پوشا باشد. هرگاه یک یکسانی از یک جبر A به روی خودش تعریف شود آن را یک خودسانی یا^۶ می خوانیم.

■ مثال: A را جبر حقیقی جاروب شده توسط ماتریس های زیر می گیریم:

$$m_1 := \frac{i}{2}\sigma_1, \quad m_2 := \frac{i}{2}\sigma_2, \quad m_3 := \frac{i}{2}\sigma_3, \quad (۲۴)$$

که در آن براکت دو عنصر همان تعویضگر دو ماتریس است. با استفاده از خواص ماتریس های پاولی داریم:

$$[m_j, m_k] = \epsilon_{jkl} m_l. \quad (۲۵)$$

این جبر با جبر فضای برداری R^3 که براکت آن همان ضرب خارجی است یکسان است. یکسانی به شکل زیر تعریف می شود:

$$\phi : A \rightarrow R^3 \quad \phi(m_1) = \hat{e}_1, \quad \phi(m_2) = \hat{e}_2, \quad \phi(m_3) = \hat{e}_3. \quad (۲۶)$$

هم چنین این جبرها با جبر ماتریس های پادمتقارن سه بعدی یعنی جبری که پایه های آن ماتریس های زیر هستند یکسان هستند:

$$L_1 := \begin{pmatrix} & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 := \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix} \quad L_3 := \begin{pmatrix} & -1 & \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad (۲۷)$$

^۴ Homomorphism

^۵ Isomorphism

^۶ Automorphism

این یکسانی به شکل زیرتعریف می شود:

$$\psi(m_j) := L_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (28)$$

■ مثال: جبرلی $M_n(C)$ یعنی جبرماتریس های مختلط مربعی را در نظر بگیرید. نگاشت $\phi : M_n(C) \rightarrow M_n(C)$ با تعریف

$$\phi(x) := g x g^{-1} \quad (29)$$

که در آن g یک ماتریس مربعی وارون پذیر است یک همسانی است. این نگاشت یکسانی نیست.

۵ جمع مستقیم دو جبرلی

نخست بهتراست که جمع مستقیم^۷ دو فضای برداری را تعریف کنیم. فرض کنید که V و W دو فضای برداری باشند. در این صورت جمع مستقیم این دو فضا به شکل زیر تعریف می شود:

$$V \oplus W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}. \quad (30)$$

در این فضا جمع دو بردار و ضرب یک بردار در یک عدد به شکل زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} (v, w) + (v', w') &= (v + v', w + w'), \\ \alpha(v, w) &= (\alpha v, \alpha w). \end{aligned} \quad (31)$$

■ تمرین: تحقیق کنید که $V \oplus W$ واقعاً یک فضای برداری است.

^۷Direct sum

■ تمرین: نشان دهید که مجموعه های زیر دو زیرفضا از $V \oplus W$ تشکیل می دهند:

$$\{(v, 0) \mid v \in V\}, \quad \{(0, w) \mid w \in W\} \quad (۳۲)$$

این دو زیرفضا به ترتیب با V و W یکسان هستند.

حال می توانیم بنویسیم

$$(v, w) = (v, 0) + (0, w) \equiv v + w, \quad (۳۳)$$

که در رابطه‌ی آخر از تناظر $(v, 0) \equiv v$ و $(0, w) \equiv w$ استفاده کرده‌ایم. هرگاه $\{e_i, i = 1, \dots, m\}$ و $\{f_j, j = 1, \dots, n\}$ دو پایه برای فضاهای V و W باشند می توانیم بنویسیم

$$(v, w) = (v, 0) + (0, w) = (v^i e_i, 0) + (0, w^j f_j) = v^i (e_i, 0) + w^j (0, f_j), \quad (۳۴)$$

و یا

$$v + w = v^i e_i + w^j f_j. \quad (۳۵)$$

به این ترتیب معلوم می شود که بردارهای پایه فضای $V \oplus W$ عبارتند از $\{(e_i, 0), (0, f_j)\}$ و یا $\{e_i, f_j\}$ و به این ترتیب بعد فضای $V \oplus W$ $m + n$ بعدی خواهد بود. نمونه خیلی آشنای جمع مستقیم دو فضای برداری را خواننده بارها و بارها دیده است:

$$R^3 = R^2 \oplus R = R \oplus R \oplus R. \quad (۳۶)$$

حال که جمع مستقیم دو فضا را فهمیده‌ایم می توانیم به جبر مستقیم دو جبرلی پردازیم.

■ تعریف: فرض کنید که A و B دو جبرلی باشند. در این صورت فضای برداری $A \oplus B$ یعنی جمع مستقیم دو فضای برداری را می توان تبدیل به یک جبرلی کرد. برای این کار براکت را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right] := \begin{pmatrix} [a, a'] \\ [b, b'] \end{pmatrix}. \quad (37)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$[a, b] \equiv [(a, 0), (0, b)] = ([a, 0], [0, b]) = (0, 0) \equiv 0 \quad (38)$$

به این ترتیب می توان گفت که در جمع مستقیم، دو جبر A و B به طرز بیهوده یا بدیهی بایکدیگر جمع شده اند. به این ترتیب هر وقت که بتوانیم که پایه های یک جبرلی را به دو قسمت تقسیم کنیم به نحوی که تعویض گر یک قسمت با قسمت دیگر صفرشود می توانیم آن جبر را به عنوان جمع مستقیم دو جبر در نظر بگیریم. برای چنین جبری داریم

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k, \quad [f_i, f_j] = D_{ij}^k f_k, \quad [e_i, f_j] = 0. \quad (39)$$

■ مثال: جبرلی $so(3) \oplus so(3)$ با روابط زیر داده می شود:

$$[J_m, J_n] = \epsilon_{mnp} J_p, \quad [K_m, K_n] = \epsilon_{mnp} K_p, \quad [J_m, K_n] = 0. \quad (40)$$

در آینده جمع نیمه مستقیم یا (*semidirect sum*) را تعریف خواهیم کرد که در آن A و B را به طرز نابديهی بایکدیگر جمع می شوند.

۶ ایده آل و جبر خارج قسمت *

نخست خارج قسمت A دو فضای برداری را تعریف می کنیم.

Quotient Space^A

تعریف: فرض کنید که V یک فضای برداری و W یک زیرفضای آن باشد. در این صورت گوییم $x, y \in V$ بایکدیگر هم ارز هستند اگر $x - y \in W$. این رابطه یک رابطه هم ارزی است. این رابطه تمام فضای برداری را به کلاس های هم ارزی افراز می کند. همه عناصر هم ارزی با x را با $[x]$ نشان می دهیم. مجموعه تمام این کلاس ها با تعریف زیر یک فضای برداری تشکیل می دهد که آن را فضای برداری خارج قسمت می خوانیم و با V/W نشان می دهیم.

$$[x] + [y] := [x + y], \quad \alpha [x] := [\alpha x]. \quad (41)$$

■ **مثال:** V را فضای سه بعدی دکارتی با محورهای x, y, z و W را محور z می گیریم. هر دو بردار که تفاوت آنها موازی محور z باشد یعنی هر دو بردار به شکل (x, y, z) و (x, y, z') بایکدیگر هم ارز هستند. نماینده هر کلاس را برداری به صورت $(x, y, 0)$ انتخاب می کنیم. در این صورت V/W همان صفحه xy خواهد شد یاب عبارت دیگر خواهیم داشت $R^3/R = R^2$.

■ **مثال:** V را فضای سه بعدی دکارتی با محورهای x, y, z و W را صفحه x, y می گیریم. هر دو بردار که تفاوت آنها موازی صفحه x, y باشد یعنی هر دو بردار به شکل (x', y', z) و (x, y, z) بایکدیگر هم ارز هستند. نماینده هر کلاس را برداری به صورت $(0, 0, 0)$ انتخاب می کنیم. در این صورت V/W همان محور z خواهد شد یاب عبارت دیگر خواهیم داشت $R^3/R^2 = R$.

بعد از این مقدمه می توانیم زیرجبرناوردا و جبر خارج قسمت را تعریف کنیم. زیرجبرناوردا درست همان نقشی را در جبر بازی می کند که زیرگروه بهنجار در گروه ایفای کرد و جبر خارج قسمت نیز درست مثل گروه خارج قسمت تعریف می شود.

■ **تعریف:** زیرجبرناوردا یا ایده آل^۹.

فرض کنید که A یک جبرلی و B زیرجبرلی از آن باشد. در این صورت گوییم B یک ایده آل A است اگر به ازای هر

Invariant Subalgebra or Ideal^۹

$a \in A$ و هر $b \in B$ ، داشته باشیم $[a, b] \in B$.

■ مثال: هر جبرلی دو ایده آل بدیهی دارد یکی خودش و دیگری زیرفضای $\{0\}$.

■ مثال: اگر B و C دوزیرجبراز A باشند $B + C$ را به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$B + C := \{b + c \mid b \in B, c \in C\}. \quad (42)$$

اگر B یک ایده آل و C تنها یک زیرجبر باشد آنگاه $B + C$ نیز یک زیرجبراز A است.

■ تمرین: این موضوع یعنی صحت ادعای مثال ۲۱ را نشان دهید. در کجا از ایده آل بودن B استفاده می کنید؟

■ مثال: همانطور که در یکی از مثال های بالا گفتیم اگر A و B دو جبرلی باشند، آنگاه $A \oplus B$ یعنی جمع مستقیم آنها نیز یک جبرلی و A و B هر کدام زیرجبری از $A \oplus B$ هستند. براحتی دیده می شود که A و B هر کدام یک ایده آل از $A \oplus B$ نیز هستند.

■ مثال: جبرلی $E(R^3)$ یعنی جبر تبدیلات اقلیدسی روی فضای ۳ بعدی را در نظر می گیریم. این جبر ۶ بعدی است و دارای ۶ مولد به نام های P_x, P_y, P_z و L_x, L_y, L_z است. در این جبر P_i مولفه تکانه در راستای i و L_i مولفه تکانه زاویه ای در راستای i است. دیده می شود که P_i ها یک زیرجبر و L_i ها نیز یک زیرجبر دیگر را تولید می کنند. زیرجبر تولید شده توسط تکانه ها یک زیرجبر ناورد است ولی زیرجبر تولید شده توسط L_i ها ناورد نیست.

■ مثال: در جبرلی $M_n(C)$ یعنی جبرلی تشکیل شده از ماتریس های مختلط n بعدی، ماتریس های قطری تشکیل یک زیرجبر می دهند. این زیرجبر آبله است اما ناورد نیست.

■ **تعریف:** هرگاه A یک جبرلی و B یک ایده آل آن باشد، فضای خارج قسمت یعنی A/B تبدیل به یک جبرلی می شود که آن را جبرلی خارج قسمت می خوانیم. در این جبرلی براکت به شکل زیرتعریف می شود:

$$[[x], [y]] := [[x, y]]. \quad (۴۳)$$

آیده آل بودن B تضمین می کند که جبرخارج قسمت فوق خوش تعریف باشد. برای فهم این مطلب می بایست ثابت کنیم که طرف راست عبارت بالا بستگی به انتخاب نماینده های کلاس های هم ارزی ندارد. فرض کنید که $x \sim x'$ و $y \sim y'$. از این دو نتیجه می گیریم

$$\exists b_1, b_2 \in B \mid x' = x + b_1, \quad y' = y + b_2, \quad (۴۴)$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$[x', y'] = [x + b_1, y + b_2] = [x, y] + [b_1, y] + [x, b_2] + [b_1, b_2] = [x, y] + b_3 \quad (۴۵)$$

که در تساوی آخر از زیرجبر بودن و ایده آل بودن B استفاده کرده ایم. بنابراین نتیجه می گیریم که $[x, y] \sim [x', y']$ و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

■ **مثال:** جبرلی $E(R^3)$ رادرنظرمی گیریم. این جبریک ایده آل دارد که توسط تکانه های P_x, P_y, P_z تولید می شود. این جبر را با $T(R^3)$ نمایش می دهیم. داریم

$$[L_x] \equiv L_x + T_3, \quad [L_y] \equiv L_y + T_3, \quad [L_z] \equiv L_z + T_3. \quad (۴۶)$$

در نتیجه بنابر تعریف خواهیم داشت:

$$[[L_x], [L_y]] = [[L_x, L_y]] = [L_z], \dots \quad (۴۷)$$

بنابراین جبرخارج قسمت $E(R^3)/T(R^3)$ چیزی نیست جز $so(3)$.

۷ قضیه اساسی در مورد همسانی ها*

■ قضیه: فرض کنید که A و B دو جبرلی و $\phi: A \rightarrow B$ یک همسانی باشد. در این صورت:

الف: $Ker(\phi)$ یک ایده آل از A است.

ب: $Im(\phi)$ یک زیرجبر B است.

ج: بین $Im(\phi)$ و $A/Ker(\phi)$ یک یکسانی برقرار است.

اثبات الف: فرض کنید که $x \in Ker(\phi)$ و $a \in A$. در این صورت

$$\phi([x, a]) = [\phi(x), \phi(a)] = [0, \phi(a)] = 0 \rightarrow [x, a] \in Ker(\phi). \quad (48)$$

اثبات ب: فرض کنید که $y_1, y_2 \in Im(\phi)$. در این صورت

$$\exists x_1, x_2 \in A, \phi(x_1) = y_1, \phi(x_2) = y_2. \quad (49)$$

بنابراین نتیجه می گیریم

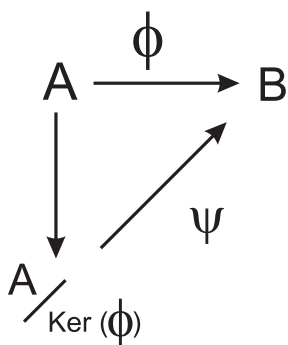
$$[y_1, y_2] = [\phi(x_1), \phi(x_2)] = \phi([x_1, x_2]) \rightarrow [y_1, y_2] \in Im(\phi). \quad (50)$$

اثبات ج: چون $Ker(\phi)$ یک ایده آل جبر A است پس جبر خارج قسمت $A/Ker(\phi)$ وجود دارد. اعضای این جبر با

$[x], [y], [z], \dots$ نشان می دهیم که در آن $x, y, z, \dots \in Ker(\phi)$. حال نگاهیست $\psi: A/Ker(\phi) \rightarrow Im(\phi)$ را به شکل زیر

تعریف می کنیم:

$$\psi([x]) := \phi(x). \quad (51)$$



شکل ۱: قضیه اساسی همسانی ها. فلش عمودی رو به پایین، نشان دهنده نگاشت مصور است یعنی نگاشتی که به هر عضو $a \in A$ کلاس هم ارزی آن یعنی $[a]$ را نسبت می دهد.

باید ثابت کنیم که این نگاشت خوش تعریف است یعنی طرف راست بستگی به انتخاب نماینده کلاس ندارد. هم چنین باید ثابت کنیم که این نگاشت یک همسانی وارون پذیر است.

اثبات خوش تعریف بودن: فرض کنید که $x \sim x'$. در این صورت نتیجه می گیریم که

$$\exists y \in \text{Ker}(\phi) | x' = x + y. \quad (52)$$

بنابراین نتیجه خواهیم گرفت که:

$$\phi(x') = \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) = \phi(x) + 0 = \phi(x). \quad (53)$$

پس این نگاشت خوش تعریف است.

اثبات همسانی:

$$\psi([x], [y]) = \psi([x, y]) = \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] = [\psi([x]), \psi([y])]. \quad (54)$$

اثبات وارون پذیر بودن. این نگاشت بنا بر ساخت پوششی است. تنها باید ثابت کنیم که یک به یک است. فرض کنید که $\psi([x]) = \psi([y])$. در این صورت نتیجه می گیریم که

$$\phi(x) = \phi(y) \rightarrow \phi(x - y) = 0, \quad x - y \in \text{Ker}(\phi) \rightarrow x \sim y \rightarrow [x] = [y]. \quad (55)$$

۸ اشتقاق های یک جبرلی *

یک اشتقاق 1° نگاشتی است که روی یک بردارهای یک جبرلی عمل می کند و به نوعی دارای خاصیت مشتق است. نام آن نیز از همین خاصیت استخراج شده است.

تعریف: یک اشتقاق یا *Derivation* از یک جبرلی A نگاشتی خطی مثل $D : A \rightarrow A$ است که در خاصیت زیر صدق می کند:

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [y, D(x)]. \quad (56)$$

■ مثال: به ازای هر $z \in A$ نگاشت $ad_z : A \rightarrow A$ یک اشتقاق است. این نگاشت به صورت زیر تعریف می شود:

$$ad_z(x) := [z, x]. \quad (57)$$

■ تمرین: ادعای مثال فوق را ثابت کنید.

مثال: فرض کنید که $\sigma(s)$ یک خانواده یک پارامتری از خودسانی های جبرلی A باشد یعنی به ازای هر s داشته باشیم:

$$\sigma(s)([x, y]) = [\sigma(s)(x), \sigma(s)(y)]. \quad (58)$$

که در آن پارامتر s را طوری انتخاب کرده ایم که $\sigma(0)$ تگاشت همانی باشد. در این صورت می توانیم از طرفین رابطه بالا در نقطه $s = 0$ نسبت به s مشتق بگیریم. با قراردادن $D := \frac{d}{ds} \sigma(s) |_{s=0}$ و کمی محاسبه بدست می آوریم که

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [y, D(x)], \quad (59)$$

1° Derivation

بعنی D یک اشتقاق است. بنابراین هر خانواده یک پارامتری از خودسانی ها یک اشتقاق تعریف می کند.

۹ نمایش یک جبر

در این بخش هدف ما تنها آن است که مفهوم نمایش یک جبرلی را معرفی کنیم و نمی خواهیم که نظریه نمایش های جبرهای لی را شرح دهیم. این کار را به درس های آینده موكول می کنیم. نمایش یک جبر درست مثل نمایش گروه به معنای آن است که در یک فضای برداری عملگرها یا ماتریس هایی را پیدا کنیم که دارای همان رابطه تعویضگری ای باشند که در جبر وجود دارد. دقت کنید که این نگاشت حتماً می بایست خطی هم باشد به این معنا که ساختار خطی فضای برداری جبر را نیز می بایست نمایش دهد. این مفهوم را به طور دقیق تر در تعریف زیر می آوریم.

تعریف نمایش یک جبرلی: A را یک جبرلی و V را یک فضای برداری می گیریم. گوییم نگاشت خطی $D : A \rightarrow \text{End}(V)$ یک نمایش است هرگاه رابطه زیر برقرار باشد:

$$D[x, y] = [D(x), D(y)], \quad \forall x, y \in A. \quad (60)$$

■ **تمرین:** ثابت کنید که $\phi(-x) = -\phi(x)$ و $\phi(0) = 0$.

درست مثل گروه ها برای هر جبرلی A یک نمایش منظم وجود دارد که آن را اصطلاحاً نمایش الحاقی یا (*Adjoint*) می نامند. در این نمایش از فضای برداری خود جبر برای نمایش دادن عناصر جبر استفاده می شود. بنابراین، بعد این نمایش با بعد خود جبر یکسان است. این نمایش را به جای D با نماد $ad : A \rightarrow \text{End}(A)$ نشان می دهیم و آن را چنین تعریف می کنیم:

$$ad : x \in A \rightarrow ad_x, \quad | \quad ad_x(y) := [x, y] \quad \forall y \in A. \quad (61)$$

خواننده براحتی می تواند ثابت کند که این نگاشت دارای خاصیت های زیراست:

$$\begin{aligned} ad_{\alpha x+y} &= \alpha ad_x + ad_y, \\ [ad_x, ad_y] &= ad_{[x,y]}. \end{aligned} \quad (62)$$

فرض کنید که $\{e_i\}$ یک پایه برای جبر باشد. در این صورت داریم

$$ad_{e_i}(e_j) = [e_i, e_j] = f_{ij}^k e_k, \quad (63)$$

واز آنجا

$$ad_x(y) = x^i y^j f_{ij}^k e_k. \quad (64)$$

بعنوان یک ماتریس بعد ad_{e_i} باعد خود جبر برابر است و درایه های آن باتوجه به رابطه بالا عبارتند از:

$$(ad_{e_i})_j^k = f_{ij}^k, \quad (65)$$

واز آنجا

$$(ad_x)_j^k = x^i f_{ij}^k. \quad (66)$$

■ مثال ۲۸: نمایش الحاقی جبر $so(3)$ به شکل زیراست:

$$ad_{e_1} = \begin{pmatrix} & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad ad_{e_2} = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix} \quad ad_{e_3} = \begin{pmatrix} & -1 & \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix}. \quad (67)$$

■ مثال: نمایش الحاقی جبر $E(R^2)$ به شکل زیراست:

$$ad_{P_x} = \begin{pmatrix} & & \\ & -i & \\ & & \end{pmatrix} \quad ad_{P_y} = \begin{pmatrix} & i & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad ad_L = \begin{pmatrix} & -i & \\ & & \\ i & & \end{pmatrix}. \quad (68)$$

■ قضیه: فرض کنید که $\sigma : A \rightarrow A$ یک خودسانی روی جبرلی A باشد. در این صورت برای هر $x \in A$ رابطه زیر برقرار است:

$$ad_{\sigma(x)} = \sigma \circ ad_x \circ \sigma^{-1}. \quad (69)$$

■ اثبات: اثر $ad_{\sigma(x)}$ را روی عضو دلخواهی مثل $y \in A$ حساب می کنیم و از خاصیت خودسانی σ و هم چنین وارون پذیر بودن آن استفاده می کنیم:

$$ad_{\sigma(x)}(y) = [\sigma(x), y] = [\sigma(x), \sigma(\sigma^{-1}(x))] = \sigma([x, \sigma^{-1}(y)]) = \sigma(ad_x(\sigma^{-1}(y))) \quad (70)$$

با برداشتن y از دو طرف به رابطه (??) می رسیم.

۱۰ جمع نیمه مستقیم دوجبرلی *

فرض کنید که A و B دوجبرلی باشند. قبلاً جمع مستقیم این دوجبرلی را تعریف کرده ایم. در جمع مستقیم براکت عناصر A و عناصر B برابر با صفر هستند. به عبارت دیگر A و B به طرز بیهوده یا بدیهی بایکدیگر جمع شده اند. در جمع نیمه مستقیم می خواهیم A و B را به طرز نابديهی بایکدیگر جمع کنیم. برای این کار می بایست براکت بین عناصر A و B را تعریف کنیم. برای این کار به ترتیب زیر عمل می کنیم. می دانیم که جبرلی A را می توان روی یک فضای برداری نمایش داد. بیایید فضای برداری ای را که برای نمایش A انتخاب می کنیم همان فضای برداری جبر B بگیریم و نگاهی که این نمایش را تعریف می کند ϕ نامیم. دقت کنید که ϕ یک نگاشت خطی از B به B است که در شرط نمایش بودن یعنی

$$\phi[a, a'] = \phi(a)\phi(a') - \phi(a')\phi(a) \quad (71)$$

صدق می کند. حال یک شرط اضافه نیز روی ϕ قرار می دهیم و آن اینکه به ازای هر a ، $\phi(a)$ یک اشتقاق روی B باشد. در این صورت

$$\phi(a)[b, b'] = [\phi(a)b, b'] + [b, \phi(a)b']. \quad (72)$$

با این مقدمات برای تعریف جمع نیمه مستقیم دو جبرلی A و B آماده شده ایم. برای این کار تنهایی بایست براکت عناصر A و B را تعریف کنیم که این کار را با رابطه زیر انجام می دهیم:

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \phi(a)b, & \forall a \in A, b \in B, \\ [b, a] &:= -[a, b]. \end{aligned} \quad (73)$$

حال می بایست ثابت کنیم که با این تعریف اتحاد جاکوبی برقرار خواهد بود. داریم

$$\begin{aligned} [[a, a'], b] &= \phi([a, a'])b = (\phi(a)\phi(a') - \phi(a')\phi(a))b = \phi(a)(\phi(a')b) - \phi(a')(\phi(a)b) \\ &= \phi(a)([a', b]) - \phi(a')([a, b]) = [a, [a', b]] - [a', [a, b]], \end{aligned} \quad (74)$$

که در آن از همسانی بودن ϕ استفاده کرده ایم. بنابراین در این مورد اتحاد جاکوبی برقرار است. هم چنین داریم

$$\begin{aligned} [a, [b, b']] &= \phi(a)[b, b'] = [\phi(a)(b), b'] + [b, \phi(a)b'] \\ &= [[a, b], b'] + [b, [a, b']], \end{aligned} \quad (75)$$

که در آن از اشتقاق بودن ϕ استفاده کرده ایم. این رابطه نیز چیزی نیست جز اتحاد جاکوبی. بنابراین براکت تعریف شده اتحاد جاکوبی را برقرار می کند و جمع نیمه مستقیم را تبدیل به یک جبرلی می کند. این جبرلی با نماد $A \oplus_{\phi} B$ نشان داده می شود.

۱۱ فرم کیلینگ

می دانیم که یک جبرلی یک فضای برداری هم هست، بنابراین می توان آن را به ضرب داخلی مجهز کرد. برای یک جبرلی نیز می توان با استفاده از نمایش الحاقی چیزی شبیه به یک ضرب داخلی طبیعی تعریف کرد که آن را فرم کیلینگ^{۱۱} می نامند

^{۱۱}Killing Form

و به شکل زیرتعریف می شود:

$$K(x, y) := \text{tr}(ad_x ad_y). \quad (76)$$

که در آن tr روی فضای برداری A محاسبه می شود.

فرم کیلینگ دارای خاصیت های زیراست:

$$\begin{aligned} K(x, y) &= K(y, x) \\ K(\alpha x + y, z) &= \alpha K(x, z) + K(y, z) \\ K([x, y], z) &= K([z, x], y) = K([y, z], x). \end{aligned} \quad (77)$$

از این خواص تنها خاصیت آخربدهی نیست. برای اثبات آن توجه می کنیم که بنابرتعریف

$$K([x, y], z) = \text{tr}(ad_{[x, y]} ad_z) \quad (78)$$

اما آنجا که $ad_{[x, y]} = ad_x ad_y - ad_y ad_x$ عبارت بالارامی توان به شکل زیرنوشت:

$$K([x, y], z) = \text{tr}((ad_x ad_y - ad_y ad_x) ad_z) = \text{tr}((ad_y ad_z - ad_z ad_y) ad_x) = \text{tr}(ad_{[y, z]} ad_x) = K([y, z], x). \quad (79)$$

که در آن از خاصیت دوره ای رد استفاده کرده ایم.

هرگاه برای جبرلی n بعدی پایه $\{e_a, a = 1, 2, \dots, n\}$ را در نظر بگیریم، ضرب داخلی تعریف شده در بالا یک ماتریس

مربعی متقارن n بعدی را به شکل زیر مشخص می کند:

$$K_{ab} := K(e_a, e_b) \quad (80)$$

باتوجه به رابطه (??) بدست می آوریم:

$$K_{ab} = f_{ac}^d f_{bd}^c. \quad (81)$$

در نتیجه ضرب داخلی هر دو عضو از جبرمثل $x = x^a e_a, y = y^b e_b$ به شکل زیردرخواهد آمد:

$$K(x, y) = K_{ab} x^a y^b. \quad (82)$$

ماتریس K را اصطلاحاً فرم کیلینگ جبرلی می نامند. با استفاده از فرم کیلینگ می توان شاخص بالای تانسورهای مختلف را پایین آورد. به عنوان مثال قرار می دهیم:

$$x_a := K_{ab}x^b \quad f_{abc} = K_{cd}f_{ab}^d, \dots \quad (۸۳)$$

هرگاه فرم کیلینگ وارون پذیر باشد درایه های وارون آن را با K^{ab} نشان می دهیم و در نتیجه خواهیم داشت:

$$K^{ab}K_{bc} = \delta_c^a. \quad (۸۴)$$

با فرم K^{ab} نیز می توان شاخص هارا بالا برد. به عنوان مثال خواهیم داشت:

$$e^a := K^{ab}e_b. \quad (۸۵)$$

می دانیم که روابط جابجایی جبریه شکل کلی زیر هستند:

$$[e_a, e_b] = f_{ab}^c e_c \quad (۸۶)$$

متریک کیلینگ مثل هر ضرب داخلی ای که در یک فضای برداری تعریف می شود به ما اجازه می دهد که ضرایب f_{ab}^c را با ضرب کردن دو طرف در یک بردار پایه بدست آوریم باین تفاوت که متریک کیلینگ یک ضرب داخلی خاص است که خواص مناسب آن به ما اجازه می دهد که از ساختار جبرلی نیز استفاده کنیم.

■ قضیه: ثابت های ساختاری در روابط زیر صدق می کنند:

$$\begin{aligned} f_{abc} &= K([e_a, e_b], e_c), \\ f_{abc} &= f_{bca} = f_{cab}, \\ f_{abc} &= -f_{bac} = -f_{acb}. \end{aligned} \quad (۸۷)$$

رابطه دوم بیان می کند که ثابت های ساختاری $f_{abc} := K_{cd}f_{ab}^d$ تقارن دوره ای نسبت به جایگشت اندیس ها دارند. رابطه سوم نیز بیان می کند که این ضرایب نسبت به تعویض هر جفت از اندیس ها پادمتقارن هستند.

■ اثبات : از رابطه ؟؟ نتیجه می گیریم که

$$K([e_a, e_b], e_d) = f_{ab}^c K(e_c, e_d) = f_{ab}^c K_{cd} = f_{abd}. \quad (88)$$

حال اگر از خواص متریک کیلینگ استفاده کنیم دو رابطه دیگر بدیهی خواهند شد.

■ مثال ۳۶: برای جبر $so(3)$ یک محاسبه ساده بااستفاده از رابطه (؟؟) نشان می دهد که

$$K = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}. \quad (89)$$

یک قضیه مهم درمورد فرم کیلینگ آن است که هر نوع خودسانی درجبرمقداراین ضرب داخلی را حفظ می کند.

■ قضیه: اگر σ یک خودسانی جبر لی A باشد، خواهیم داشت:

$$K(\sigma(x), \sigma(y)) = K(x, y). \quad (90)$$

اثبات این امر ساده است. باتوجه به تعریف فرم کیلینگ (؟؟) و رابطه (؟؟) داریم:

$$K(\sigma(x), \sigma(y)) = tr(ad_{\sigma(x)} ad_{\sigma(y)}) = tr(\sigma \circ ad_x \circ \sigma^{-1} \sigma \circ ad_y \circ \sigma^{-1}) = tr(ad_x ad_y) = K(x, y). \quad (91)$$

۱.۱۱ جبرلی تعویض گر- جبرهای لی حل پذیر

■ تعریف جبرلی تعویضگر:^{۱۲} فرض کنید که A یک جبرلی باشد. $A^{(1)}$ را به عنوان زیرفضایی درنظر می گیریم که عناصر

آن را بتوان به عنوان ترکیب خطی تعویضگرهایی از A نوشت. به عبارت دیگر

$$A^{(1)} := \{x \in A \mid x = \sum_i [x_i, y_i], \dots, x_i, y_i \in A\} \quad (92)$$

^{۱۲}Commutator Subalgebra

بدیهی است که $A^{(1)}$ نسبت به براکت لی بسته و بنابراین یک زیرجبر A است. علامت مناسبی که برای $A^{(1)}$ بکارمی بریم به شکل زیراست $A^{(1)} = [A, A]$ که به خوبی گویای تعریف فوق است.

■ قضیه: هرگاه A یک جبرلی باشد، $A^{(1)}$ یک ایده آل آن است.

اثبات: بنا بر تعریف واضح است.

حال به تعریف جبرهای لی حل پذیرمی پردازیم. برای یک جبرلی A می توانیم رشته زیرجبرهای تعویضگر را به شکل زیر تعریف کنیم

$$A^{(1)} = [A, A], \quad A^{(2)} = [A^{(1)}, A^{(1)}], \quad A^{(3)} = [A^{(2)}, A^{(2)}], \quad \dots \quad (93)$$

این کارسلسله ای از زیرجبرهای تودرتو را برای A تعریف می کند:

$$\dots A^{(3)} \subset \dots A^{(2)} \subset A^{(1)} \subset A. \quad (94)$$

هرگاه این سلسله زیرجبرها به زیرجبر $\{0\}$ ختم شود، جبر A حل پذیر^{۱۳} خوانده می شود.

■ مثال: نشان دهید که جبرلی ماتریس های مثلثی یعنی جبرلی تولید شده توسط ماتریس های $\{E_{ij}, \mid i \leq j\}$ یک جبرلی حل پذیراست.

■ مثال: جبرلی $A \equiv so(3)$ را با روابط تعریف کننده

$$[L_1, L_2] = L_3, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = L_2, \quad (95)$$

در نظر می گیریم. برای این جبرداریم:

$$A^{(1)} = A \longrightarrow A^{(n)} = A \quad \forall n. \quad (96)$$

بنابراین جبر $so(3)$ یک جبرحل پذیر نیست.

■ مثال: جبرلی $E(R^2)$ را باروابط تعریف کننده

$$[P_x, P_y] = 0, \quad [L, P_x] = iP_y, \quad [L, P_y] = -iP_x, \quad (97)$$

را درنظربگیرید. برای این جبرداریم:

$$A^{(1)} = \text{Span}\{P_x, P_y\}, \quad A^{(2)} = 0. \quad (98)$$

بنابراین، $E(R^2)$ یک جبرحل پذیر است.

■ مثال: جبرلی $E(R^3)$ را باروابط تعریف کننده

$$\begin{aligned} [P_j, P_k] &= 0, \\ [L_j, P_k] &= i\epsilon_{ijk}P_k, \\ [L_j, L_k] &= i\epsilon_{ijk}L_k. \end{aligned} \quad (99)$$

درنظرمی گیریم. برای این جبرداریم:

$$A^{(1)} = A, \quad \longrightarrow \quad A^{(n)} = A \quad \forall n. \quad (100)$$

بنابراین، $E(R^3)$ یک جبرحل پذیر نیست.

۱۲ جبرهای لی ساده

جبرهای لی ساده^{۱۴} جبرهایی هستند که هیچ نوع زیرجبر ناوردای غیربدیهی نداشته باشند.

■ مثال: جبرلی $so(3)$ یک جبرلی ساده است. برای اثبات این امر از یکسان بودن جبرلی $so(3)$ و فضای برداری R^3 به

همراه ضرب خارجی بردارها استفاده می‌کنیم. در فضای R^3 داریم

$$[a, b] = a \times b, \quad (101)$$

و با این تعریف از براکت فضای R^3 با $so(3)$ یکسان است. حال ثابت می‌کنیم که R^3 نمی‌تواند هیچ زیرجبرناوردایی داشته باشد. اگر این زیرجبر بخواهد یک بعدی باشد، (یعنی یک خط که از مبدا می‌گذرد) در این صورت می‌دانیم که ضرب خارجی هر بردار از این خط با یک بردار دلخواه، بنا بر خواص ضرب خارجی، حتماً می‌بایست بر این خط عمود باشد و نمی‌تواند در امتداد خط قرار بگیرد. بنابراین، این خط نمی‌تواند یک زیرجبر ناوردای R^3 باشد. حال به سراغ زیرفضاهای دوبعدی می‌رویم. در یک صفحه یعنی یک زیرفضای دوبعدی نیز براکت هر دو بردار یعنی ضرب خارجی آنها می‌بایست بر آن صفحه عمود باشد. بنابراین R^3 اصلاً زیرجبر دوبعدی ندارد چه رسد به این که زیرجبر ناوردای دوبعدی داشته باشد. بنابراین R^3 و در نتیجه $so(3)$ یک جبر ساده است.

۱۳ جبرهای لی نیم ساده

فرض کنید که A و B دو جبرلی ساده باشند. در این صورت جبرلی $A \oplus B$ یک جبرلی است که دیگر ساده نیست. دلیل اش این است که A و B هر دو زیرجبرهای $A \oplus B$ هستند و درعین حال هرکدام ایده‌آل نیز هستند. در واقع می‌دانیم که برای چنین

^{۱۴}Simple Lie Algebras

جبری

$$[A, A] \subset A, \quad [B, B] \subset B, \quad [A, B] = 0 \quad (102)$$

و وجه نامگذاری جمع مستقیم نیز همین است به این معنی که براکت زیرجبرهای A و B بایکدیگر مساوی صفر است.

■ **تعریف:** یک جبرلی نیم ساده یا (*Semisimple*) است اگر هیچ نوع ایده آل آبدلی نداشته باشد.

■ **مثال:** جبرلی $E(R^3)$ را در نظر بگیرید. این جبریک ایده آل دارد که توسط بردارهای $\{P_x, P_y, P_z\}$ جاروب می شود. از آنجا که این ایده آل آبدلی است، جبرلی $E(R^3)$ نیم ساده نیست.

■ **مثال:** در جبرهایزنبه‌گ، زیرجبری که توسط I تولید می شود یک ایده آل آبدلی است، بنابراین، جبرهایزنبه‌گ ساده نیست. هم چنین زیرجبری که توسط I و مجموعه $\{x_i\}$ تولید می شود یک ایده آل آبدلی است.

■ **نکته‌ی مهم:** یک جبر نیم ساده را می توان به صورت جمع مستقیم دو یا چند جبر ساده نوشت. یعنی

$$A_{semi-simple} = B_{simple} \oplus C_{simple} \oplus D_{simple} \oplus \dots \quad (103)$$

در نگاه اول به یک جبر نیم ساده مثل $E(R^3)$ معلوم نیست که این جبر جمع مستقیم کدام جبرهای ساده است. برای این کار می بایست ترکیب های خطی مناسبی از پایه های اولیه گرفت تا بتوان به وضوح جبرهای ساده‌ای را که $E(R^3)$ از جمع مستقیم آنها تشکیل شده است پیدا کرد.

چگونه می توان نوع یک جبر را تشخیص داد؟ چگونه می توان تعیین کرد که آن جبر نیم ساده یا حل پذیر است؟ اگر بخواهیم این شناسایی را با استفاده مستقیم از تعاریف انجام دهیم کار بسیار مشکلی است. در عوض کارتان ملاک های بسیار ساده ای برای تعیین نوع یک جبر در اختیار ما قرار داده است. این ملاک ها با استفاده از فرم کیلینگ یک جبر مشخص می شوند که در بخش بعد به توصیف آن می پردازیم.

۱۴ ملاک های کارتازن

همانطور که در بخش پیشین گفتیم تشخیص اینکه یک جبر حل پذیر است یا نه یا آیا نیم ساده است یا نه با استفاده از تعریف های اولیه کاردشواری است. خوشبختانه الی کارتازن *Elie Cartan* ملاک های ساده ای برای این شناسایی بدست داده است که ما آنها را بدون اثبات می آوریم.

■ ملاک کارتازن برای حل پذیری: یک جبر لی A حل پذیر است اگر فقط اگر $K(A, A^{(1)}) = 0$ که به این معناست که به ازای هر $x \in A$ و هر $y \in A^{(1)}$ می بایست داشته باشیم $K(x, y) = 0$.

■ ملاک کارتازن برای نیم ساده بودن یک جبر لی: یک جبر لی A نیم ساده است اگر فقط اگر فرم کیلینگ آن غیرواکن باشد، که به این معناست که ماتریس K وارون پذیر باشد.

۱۵ طبقه بندی جبرهای لی

چگونه می توانیم جبرهای لی را با توجه به تنوع بی پایان آنها طبقه بندی کنیم؟ این سوال در مورد جبرهای لی مثل هر ساختار ریاضی دیگری پیش می آید که انواع جبرهای لی کدامند. پاسخ این سوال در قضیه ای که موسوم به قضیه لوی *Levi* داده شده است. البته دانش ما در مورد جبرهای لی محصول کار مستقل ریاضیدانان بزرگی همچون لی *Lie*، کارتازن *Cartan*، وایل *Weyl*، دینکین *Dynkin*، شوالی *Chevalie* و دیگران است. در این جا این قضیه را بدون اثبات می آوریم. هدف ما تنها آن است که محتوی این قضیه را بفهمیم.

■ قضیه: هر جبرلی چیزی نیست جز جمع نیمه مستقیم یک جبر حل پذیر و یک جبر نیم ساده. یک جبر نیم ساده نیز چیزی نیست جز جمع مستقیم جبرهای ساده.

$$\text{Lie Algebra} = \text{Solvable} \oplus_s \text{Semisimple}$$

$$\text{Semisimple} = \text{Simple} \oplus \text{Simple} \oplus \text{Simple} \dots \quad (104)$$

۱۶ تمرین ها:

■ ۱ - ثابت کنید که مجموعه ماتریس های بالامثلثی یک زیرجبرلی از جبرلی تمام ماتریس های مربعی است.

■ ۲ - اگر A و B دو جبرلی باشند و $\phi: A \rightarrow B$ یک همسانی بین این دو باشد، ثابت کنید که :

الف: تصویر هر زیرجبراز A تحت ϕ ، یک زیرجبراز B است.

ب: تصویر وارون هر زیرجبراز B تحت ϕ یک زیرجبراز A است.

ج: تصویر وارون هر ایده آل از B تحت ϕ یک ایده آل از A است.

■ ۳ - ثابت کنید که اگر A یک جبر حل پذیر باشد آنگاه هر زیرجبرلی از آن نیز حل پذیر است.

■ ۴ - A را یک جبرلی و B و C را دوزیرجبر از آن در نظر بگیرید. $B + C$ را چنین تعریف می کنیم:

$$B + C := \{b + c \mid b \in B, c \in C\}. \quad (105)$$

الف: ثابت کنید که اگر B و C هر دو ایده آل A باشند آنگاه $B + C$ یک زیرجبر A است. مثالی ارائه دهید از حالتی که B و C ایده آل نیستند و در نتیجه $B + C$ نیز یک زیرجبر نیست.

ب: ثابت کنید که اگر B و C هر دو ایده آل A باشند آنگاه $B + C$ نیز یک ایده آل A است.

۵- ثابت کنید که جبرلی $so(3)$ یک جبر ساده است. (راهنمایی: از یکسانی $so(3)$ با جبر R^3 تحت ضرب خارجی بردارها استفاده کنید.)

۶- با استفاده از ملاک های کارتان نشان دهید که جبرلی $E(R^2)$ حل پذیر است.

۷- با استفاده از ملاک های کارتان نشان دهید که جبرلی $su(4)$ نیم ساده است.

۸- با استفاده از ملاک های کارتان نشان دهید که جبرلی ماتریس های سه بعدی بالامتثلی حل پذیر است.

۹- اگر A یک جبرلی حقیقی باشد، نشان دهید که به ازای هر $x \in A$ ، تمام درایه های ماتریس ad_x حقیقی است. بنابراین نشان دهید که ماتریس کیلینگ یک ماتریس بادریه های حقیقی است.

۱۰- روابط جابجایی جبر $so(4)$ را بنویسید. نشان دهید که این جبر با جبر $so(3) \oplus so(3)$ یکسان است. (راهنمایی: ترکیب مناسبی از عناصر پایه این جبر را در نظر بگیرید و نشان دهید که عناصر پایه جدید را می توان به دو قسمت تقسیم کرد که روابط جابجایی هر قسمت مثل $so(3)$ باشد.)

۱۱- یک نمایش وفادار نمایشی است که یک به یک باشد به این معنا که اگر $D(x) = D(y)$ بتوانیم نتیجه بگیریم که $x = y$. این تعریف چه برای گروه و چه برای جبر برقرار است. نشان دهید که اگر یک جبر نیم ساده باشد آنگاه نمایش

الحاقی آن یعنی نمایش $adjoint$ ، یک نمایش وفادار است.
(راهنمایی: از ملاک کارتان برای نیم ساده بودن جبر استفاده کنید.)

■ ۱۲- با استفاده از ملاک کارتان نشان دهید که جبر $su(3)$ نیم ساده است.

■ ۱۳- نشان دهید که اگر یک جبر ساده باشد نمایش الحاقی یا $adjoint$ آن کاهش ناپذیر است. (راهنمایی: یک نمایش کاهش پذیر مثل D نمایشی است که در آن فضای نمایش یعنی V را می توان به صورت $V_1 \oplus V_2$ نوشت به قسمی که

$$D(V_1) \subset V_1$$