

درسنامه نظریه گروه، درس چهارم: عمل یک گروه روی یک مجموعه *

وحیدکریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۳۰ فروردین ۱۳۹۵

۱ مقدمه

در زندگی روزمره اغلب از لفظ تقارن استفاده می کنیم. می گوئیم که یک گل ، یک منظره، یک مجسمه و یا یک ساختمان متقارن است و دیگری نیست. یا یکی تقارن بیشتری نسبت به دیگری دارد. در توصیف دقیق طبیعت آنچنان که در فیزیک با آن روبرو هستیم تقارن نقش مهم تری ایفا می کند و اثر آن تنها یک اثر زیبایی شناسی نیست. در سطوح مختلف طبیعت به تقارن های متعدد و متفاوت برمی خوریم. فضای سه بعدی مطلق یعنی فضای خالی دارای تقارن انتقالی و دورانی است یا به عبارت بهتر قوانین طبیعت نسبت به انتقال و دوران در فضای سه بعدی یکسان هستند. تکرار یک آزمایش در یک نقطه همان نتایج را بدست می دهد که در نقطه دیگر و یا در جهت دیگر. این یک خاصیت بنیادی و مهم فضا است. فضا زمان چهار بعدی تقارن های بازم بیشتر و عمیق تری دارد. قوانین طبیعت در دستگاه های لختی که نسبت به یکدیگر در حال حرکت مستقیم الخط یکنواخت هستند یکسان هستند و به همین جهت با هیچ آزمایش فیزیکی و با مشاهده هیچ پدیده طبیعی نمی توانیم از حرکت دستگاه لختی که بر آن سوار هستیم آگاه شویم. اطمینان ما به این تقارن ها چنان است که از آنها به عنوان محکی برای سنجیدن درستی قوانین جدیدی که می خواهیم برای پدیده های ناشناخته وضع کنیم استفاده می کنیم و آن دسته از قوانین را

* از خانم ریحانه ملکیان که با دقت ویراست اولیه این درسنامه را خوانده و چند اشتباه تایپی را به من تذکر دادند تشکر می کنم.

که با این تقارن ها سازگار نباشند در همان مرحله اول کنار می گذاریم. تقارن قوانین فیزیکی تنها یک خاصیت انتزاعی نیست بلکه این تقارن ها باعث می شوند که اشیای فیزیکی ای که لاجرم تحت تسلط این قوانین هستند به نوبه خود تقارن هایی پیدا کنند. یک ستاره که از تراکم گازهای درون کهکشانی بوجود می آید در اثر تقارن دورانی خود به شکل یک کره درمی آید و نه مثلاً به صورت یک بیضی گون. حالت پایه اتم هیدروژن نیز یک شکل کروی دارد و شکل دیگر اربیتال ها نیز تقارن های مخصوص به خود دارند. از پیوند اتم ها مولکول هایی با تقارن های مختلف بوجود می آید. تقارن انتقالی باعث می شود که بلور ها از تکرار سلول های یکسانی در فضا ایجاد شوند. قیودی که ناشی از سازگاری تقارن های انتقالی برای یک بلور و تقارن های سلول واحد آن است، باعث می شود که تنها بلورهایی با شکل های معین در طبیعت یافت شوند. این تقارن نهایتاً به ابعاد ماکروسکوپی و به دنیای گل ها و پروانه ها راه می یابد.

در سطح عمیق تر و میکروسکوپی تر تقارن های دیگری وجود دارند که براسستی شگفت انگیزند. این تقارن ها مثل تقارن های یک گلبند و یا یک شکل هندسی ساده ملموس نیستند. با این وجود به همان معنادار هستند و اثرات فیزیکی مهم دارند. به عنوان مثال نیروی هسته ای قوی نسبت به تعویض پروتون و نوترون کاملاً متقارن است. این تقارن یک تقارن گسسته است که با گروه Z_2 توصیف می شود. می توانیم بگوییم که نیروی هسته ای قوی تنها روی یک هسته اثر می کند و این هسته می تواند در یکی از دو حالت که آن را پروتون و یانوترون می گوئیم قرار گیرد درست مثل اسپین الکترون که می تواند در یکی از دو حالت بالا یا پایین قرار گیرد. به همین علت این تقارن را تقارن ایزواسپین می گوئیم.

اما از آنجا که مکانیک کوانتومی به ما آموخته است که حالات فیزیکی یک ذره با بردارهای یک فضای خطی متناظر هستند می توانیم بگوییم که یک هسته می تواند در یک حالت دلخواه $|\phi\rangle = a|proton\rangle + b|neutron\rangle$ قرار گیرد. در نتیجه حالت یک

هسته که با یک بردار دو تایی $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ توصیف می شود می تواند تحت تبدیلات گسترده تری مثل تبدیلات $U(2)$ قرار

بگیرد بدون اینکه نیروی هسته ای قوی متوجه این تغییرات بشود. در نتیجه تقارن ایزواسپین با گروه $U(2)$ توصیف می شود. در اینجا برای اولین بار با تقارنی مواجه می شویم که تقارن فضا یا فضا زمان ملموس نیست بلکه تقارن یک فضای مجرد و درونی مربوط به ذرات موسوم به فضای ایزواسپین است. این تقارن تنها تقارنی نیست که در دنیای ذرات وجود دارد و فضای ایزواسپین نیز تنها فضای درونی مربوط به ذرات نیست. در دنیای میکروسکوپی با تقارن هایی مواجه می شویم مثل تقارن رنگ و یا تقارن پیمانه ای. توصیف دقیق این تقارن هانیا به حد اقلی از دانش ذرات بنیادی دارد و در محدوده این درس نیست. با این وجود ما در این فصل سعی خواهیم کرد که مفهوم کلی و دقیق تقارن را شرح دهیم. مطالب این فصل زیربنایی برای دانشی خواهد بود که

دانشجو در درس های دیگر در مورد تقارن به صورت های خاص دنبال خواهد کرد.

۲ تعاریف اساسی و مثال ها

تعریف: یک گروه G روی یک مجموعه M یک گروه تبدیلات روی M نامیده می شود هرگاه یک نگاشت $\phi : G \times M \rightarrow M$ بتوان یافت که شرایط زیر را داشته باشد:

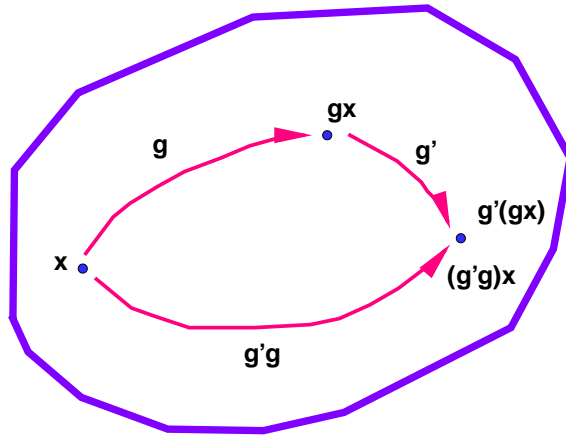
$$\phi(e, x) = x \quad \phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \phi(g_1 g_2, x). \quad (۱)$$

اثر ϕ روی زوج (g, x) را با x' نشان می دهیم و می نویسیم $x' = \phi(g, x)$. x' نقطه جدیدی از M است. در رابطه $x' = \phi(g, x)$ هرگاه g را ثابت بگیریم و تنها x را تغییر دهیم x' به تبع آن تغییر می کند. در واقع مثل این است که نگاشتی داریم از M به خود M که بستگی به g دارد. برای این که این موضوع را به وضوح نشان دهیم رابطه $x' := \phi(g, x)$ را به شکل $x' = \phi_g(x)$ می نویسیم. این رابطه با صراحت بیان می کند که به ازای هر $g \in G$ یک نگاشت $\phi_g : M \rightarrow M$ داریم که با تصویری که ما به طور شهودی از اثر یک عنصر گروه روی یک مجموعه داریم وفق می دهد. ϕ_g را تبدیل وابسته به عنصر g روی مجموعه M می گوئیم. با این نوع نوشتن رابطه نخست این فصل را می توان به صورت معادل زیر نوشت:

$$\phi_e(x) = x, \quad \phi_g \phi_{g'} = \phi_{gg'}. \quad (۲)$$

گاهی اوقات $\phi_g(x)$ را به صورت خلاصه تر gx می نویسیم ولی باید به یاد داشته باشیم که این عبارت به معنای ضرب g در x نیست.

معنای رابطه (۲) را به بهترین وجه در شکل (۲) می توان فهمید. در این شکل نقطه $x \in M$ نخست توسط $g \in G$ به نقطه gx نگاشته می شود و سپس این نقطه به نوبه خود توسط $g' \in G$ به نقطه $g'(gx)$ نگاشته می شود. اگر عمل گروه روی مجموعه M چنان باشد که نقطه $x \in M$ توسط $g'g \in G$ به همین نقطه آخر نگاشته شود، آنگاه می گوئیم که گروه G یک گروه تبدیلات



شکل ۱: عمل یک گروه تبدیل روی یک مجموعه.

روی M است.

■ مثال : عمل گروه Z_2 روی یک خط:

در این مثال داریم $M = R$ و $G = \{e, I\}$ با تبدیلات زیر:

$$\phi_e(x) := x, \phi_I(x) := -x. \quad (۳)$$

براحتی دیده می شود که G یک گروه تبدیلات روی M است.

■ مثال : عمل گروه $G := \{e, I_x, I_y, I_o\}$ روی صفحه دوبعدی .

در این مثال داریم $M = R^2$. e نگاشت همانی ، I_x و I_y به ترتیب انعکاس نسبت به محورهای x و y و I_o انعکاس

نسبت به مبدا مختصات است. به عبارت دیگر به ازای هر نقطه $(u, v) \in R^2$:

$$I_x(u, v) := (u, -v), \quad I_y(u, v) = (-u, v), \quad I_o(u, v) = (-u, -v). \quad (۴)$$

■ مثال : عمل گروه انتقال روی فضای اقلیدسی :

$M = R^3$ و $G := \{a | a \in R^3\}$. عمل G روی M در این جا به شکل زیر تعریف می شود:

$$\phi_a : R^3 \rightarrow R^3, \quad \phi_a \vec{x} := \vec{x} + \vec{a}. \quad (۵)$$

براحتی دیده می شود که $T_{a'} T_a = T_{a+a'}$.

■ مثال : عمل گروه تغییر مقیاس روی فضای اقلیدسی :

$M = R^3$ و $G := \{\lambda | \lambda > 0\}$. نگاشت های درون G به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\phi_\lambda : R^3 \rightarrow R^3, \quad \phi_\lambda(x, y, z) := (\lambda x, \lambda y, \lambda z). \quad (۶)$$

دیده می شود که $\phi_\lambda \phi_{\lambda'} = \phi_{\lambda \lambda'}$.

■ مثال : عمل گروه $SO(2)$ روی فضای دوبعدی :

داریم: $M = R^2$ و $G = SO(2)$. یادآوری می کنیم که $SO(2)$ گروه ماتریس های دوبعدی متعامد با دترمینان یک است. این گروه را می توان به شکل زیر پارامتریزه کرد:

$$SO(2) := \left\{ g = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}. \quad (۷)$$

عمل $g \in SO(2)$ روی $r \in R^2$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$r \rightarrow r' \equiv gr. \quad (۸)$$

بنابراین در این مثال $\phi_g(r) = gr$. واضح است که شرط $\phi_g \phi_{g'} = \phi_{gg'}$ برآورده می شود. هرگاه r و r' را بر حسب مولفه هایشان بنویسیم بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}x' &= \cos \theta x + \sin \theta y \\y' &= -\sin \theta x + \cos \theta y.\end{aligned}\tag{۹}$$

این رابطه بوضوح نشان می دهد که $SO(2)$ گروه دوران های صفحه دوبعدی است.

■ مثال : عمل گروه $O(2)$ روی فضای دوبعدی :

داریم: $M = R^2$ و $G = O(2)$. یادآوری می کنیم که $O(2)$ گروه ماتریس های دوبعدی متعامد است. دترمینان این ماتریس ها می تواند یک یا منهای یک باشد. آنها که دترمینان یک دارند یک زیرگروه تشکیل می دهند که $SO(2)$ نامیده می شود. حال ماتریس $\pi := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ را در نظر می گیریم. این ماتریس در داخل $O(2)$ است ولی در خارج زیرگروه $SO(2)$ قرار می گیرد. در واقع بقیه اعضای $O(2)$ را می توان به صورت πg نوشت که در آن $g \in SO(2)$. این حرف بدان معناست که گروه $O(2)$ از دوهم مجموعه تشکیل شده است، یعنی $O(2) = SO(2) \cup \pi SO(2)$. هر عضو $\pi SO(2)$ روی R^2 به صورت یک دوران و سپس یک انعکاس عمل می کند.

■ مثال : عمل گروه $O(3)$ روی کره دوبعدی:

در این مثال مجموعه M یک کره دوبعدی است که آن را با S^2 نشان می دهیم و G گروه ماتریس های متعامد سه بعدی است.

$$S^2 := \{r \in R^3 | r^t r = 1\} \quad O(3) := \{g \in GL(3, R) | g^t g = I\}.\tag{۱۰}$$

گروه $O(3)$ روی کره دوبعدی به صورت زیر عمل می کند:

$$r' \equiv \phi_g(r) = gr.\tag{۱۱}$$

در اینجا منظور از gr واقعاً ضرب ماتریس مربعی سه بعدی g از چپ در بردارستونی و سه بعدی r است. گروه $O(3)$ نیز یک زیرگروه موسوم به $SO(3)$ دارد که از ماتریس های متعامد با دترمینان یک تشکیل شده است. در درس های بعدی نشان خواهیم داد که هر تبدیل $SO(3)$ روی فضای سه بعدی چیزی جز یک دوران نیست. هر دوران با یک محور \hat{n} و یک زاویه θ مشخص می شود. به همین دلیل عناصر این گروه را می توان به صورت $R_{\hat{n}}(\theta)$ نشان داد. به عنوان مثال تبدیلات زیر دوران های حول محورهای x, y, z را به اندازه زاویه θ نشان می دهند:

$$R_{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$R_{\hat{y}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$R_{\hat{z}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

هرگاه ماتریس پاریته زیر را تعریف کنیم

$$\pi := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

که روی فضای سه بعدی بصورت انعکاس حول مبدا عمل می کند آنگاه می توان نوشت:

$$O(3) = SO(3) \cup \pi SO(3). \quad (16)$$

یعنی بقیه گروه $O(3)$ درحقیقت یک هم مجموعه راست زیرگروه $SO(3)$ برای عنصر پاریته خواهد بود.

■ مثال: عمل گروه اقلیدسی روی فضای اقلیدسی: گروه اقلیدسی E_n گروه تبدیلات دوران و انتقال روی فضای دکارتی R^n است. هر عمل گروه اقلیدسی با یک زوج (R, T) تعریف می شود که در آن R نشان دهنده دوران و T نشان دهنده انتقال است. هر زوج روی یک نقطه $x \in R^n$ به صورت زیر عمل می کند:

$$(R, T) : x \rightarrow x' := Rx + T \quad (17)$$

با استفاده از رابطه بالا می توان ضرب عناصر، عنصر یکه و وارون هر عنصر را در گروه E_3 را مشخص کرد:

$$(R, T)(R', T') = (RR', RT' + T), \quad e = (I, 0), \quad (R, T)^{-1} = (R^{-1}, -R^{-1}T). \quad (18)$$

در قسمت بعدی این درس بعضی از قضایای اساسی مربوط به عمل گروه روی مجموعه را بیان می کنیم. نخست به چند تعریف احتیاج داریم.

۳ بعضی از قضایای اساسی

■ تعریف: هرگاه نقطه ای مثل $x_0 \in M$ وجود داشته باشد به طوریکه $\forall g \in G \phi_g(x_0) = x_0$ آنگاه این نقطه، نقطه ثابت عمل گروه روی M خوانده می شود.

■ مثال ۱ - در عمل گروه $O(3)$ روی فضای R^n ، نقطه مبدا نقطه ثابت است. اما عمل همین گروه روی کره S^2 نقطه ثابت ندارد.

■ مثال ۲ - در عمل گروه $SO(2)$ یا دوران های حول محور z روی R^3 تمام نقاط محور z ، نقاط ثابت هستند اما در عمل همین گروه روی کره دویبعدی قطب شمال و قطب جنوب نقاط ثابت هستند.

■ مثال ۳ - در عمل انتقال روی R_n نقطه ثابت وجود ندارد.

■ مثال ۴ - در عمل گروه تغییرمقیاس روی R_n ، نقطه مبداء نقطه ثابت است.

■ قضیه: فرض کنید که $x \in M$ یک نقطه دلخواه از مجموعه M باشد و G روی M عمل کند. در این صورت مجموعه عناصری از گروه G که نقطه x را ثابت نگاه می دارند یک زیرگروه از G تشکیل می دهند. این زیرگروه زیرگروه ثابت کننده آن نقطه نامیده می شود.

اثبات : مجموعه این عناصر را با H_x نشان می دهیم:

$$H_x := \{g \in G \mid \phi_g(x) = x\}. \quad (19)$$

حال فرض کنید که $h, h' \in H_x$. در این صورت بنا بر تعریف $\phi_h(x) = x$ و $\phi_{h'}(x) = x$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\phi_{hh'}(x) = \phi_h(\phi_{h'}(x)) = \phi_h(x) = x. \quad (20)$$

هم چنین خواهیم داشت:

$$\phi_{h^{-1}}(x) = (\phi_h)^{-1}(x) = x. \quad (21)$$

پس $h^{-1} \in H_x$ و در نتیجه H_x یک زیرگروه G است.

■ تعریف : عمل یک گروه G روی یک مجموعه M تراگذار خوانده می شود هرگاه هر دو نقطه x, y از M را بتوان با عمل عضوی از گروه به یکدیگر نگاشت .

■ مثال ۱ : عمل گروه $SO(3)$ روی R^3 تراگذار نیست، زیرا بردارهایی که طول های یکسان ندارند نمی توانند توسط این گروه به هم نگاشته شوند.

■ مثال ۲ : عمل گروه $SO(3)$ روی کره دویعدی S^2 تراگذار است زیرا هر دو نقطه ای روی کره را می توان با یک دوران حول محور مناسب و با زاویه مناسب به یکدیگر نگاشت.

■ مثال ۳ : یک گروه G می تواند به طرق مختلف روی خودش به عنوان یک مجموعه عمل کند. عمل از چپ چنین تعریف می شود:

$$L_g(a) := ga \quad \forall g, a \in G. \quad (22)$$

عمل از راست به طریق مشابه تعریف می شود:

$$R_g(a) := ag^{-1} \quad \forall g, a \in G. \quad (23)$$

عمل تزویج *adjoint action* به طریق زیر تعریف می شود:

$$Ad_g(a) := gag^{-1} \quad \forall g, a \in G. \quad (24)$$

عمل های راست و چپ هر دو بوضوح تراگذار هستند ولی عمل تزویجی چنین نیست زیرا نقطه e را با این عمل به هیچ نقطه دیگری جز خودش نمی توان نگاشت.

■ قضیه: هرگاه عمل یک گروه G روی یک مجموعه M تراگذار باشد آنگاه زیرگروه های ثابت کننده همه نقاط بایکدیگر یکسان هستند. این زیرگروه را با H نمایش می دهیم و آن را زیرگروه همسانگرد G می نامیم.

اثبات: فرض کنید که x و y دونقطه دلخواه از M باشند. می خواهیم یک یکسانی بین H_x و H_y برقرارکنیم. چون عمل G روی M تراگذار است حتماً عنصری مثل $a \in G$ وجود دارد به نحوی که $y = ax$ و $x = a^{-1}y$. حال نگاشت زیر را بین H_x و H_y تعریف می کنیم:

$$\psi : H_x \longrightarrow H_y, \quad \psi(g) := aga^{-1}. \quad (25)$$

درنتیجه خواهیم داشت:

$$\psi(g)y = (aga^{-1})y = (ag)(a^{-1}y) = (ag)x = a(gx) = ax = y. \quad (26)$$

پس $\psi(g)$ واقعاً عضو H_y است. علاوه براین

$$\psi(gg') = agg'a^{-1} = aga^{-1}ag'a^{-1} = \psi(g)\psi(g'). \quad (27)$$

پس ψ یک همسانی است.

حال باید ثابت کنیم که این نگاشت یک به یک و پوشاست. برای اثبات پوشا بودن توجه می کنیم که اگر $h \in H_y$ آنگاه

$$hy = y \longrightarrow h(ax) = (ax) \longrightarrow hax = ax \longrightarrow (a^{-1}ha)x = x \longrightarrow a^{-1}ha \in H_x. \quad (28)$$

بنابراین به ازای یک $h \in H_y$ عضوی مثل $a^{-1}ha$ بدست آوردیم که متعلق به H_x است و تحت نگاشت (25) به h نگاشته می شود، یعنی عضوی بدست آوردیم که :

$$h = \psi(a^{-1}ha). \quad (29)$$

برای اثبات یک به یک بودن می بایست ثابت کنیم که $\text{Ker}(\psi) = \{e\}$.
 برای این کار فرض کنید که $\psi(g \in H_x) = e$. در نتیجه بدست می آوریم

$$aga^{-1} = e \longrightarrow g = e. \quad (30)$$

که آنچه را می خواستیم ثابت می کند.

■ قضیه: هرگاه عمل یک گروه G روی یک مجموعه M تراگذار باشد آنگاه:

بین G/H به عنوان یک مجموعه و M به عنوان یک مجموعه تناظر یک به یک برقرار است.

■ اثبات: می خواهیم یک تناظر یک به یک از G/H به M برقرار کنیم. دقت کنید که M ساختمان گروه ندارد و بنابراین

نمی توان راجع به شباهت ساختاری این دو صحبت کرد مگر در مواقعی که M خود یک گروه باشد.

نقطه ای از مجموعه M مثل x_0 در نظر می گیریم. زیرگروه ثابت کننده ای این نقطه برابر است با $H_{x_0} = H$. حال به ازای هر g که از گروه نقطه ای gx_0 را از M مشخص می کنیم. به عبارت دیگر هر g از گروه را به نقطه ای gx_0 از M می

نگاریم. اما دقت می کنیم که نقطه های g و gh که در آن $h \in H_{x_0}$ هر دو یک نقطه از M را بدست می دهند، زیرا

$$(gh)x_0 = g(hx_0) = gx_0. \quad (31)$$

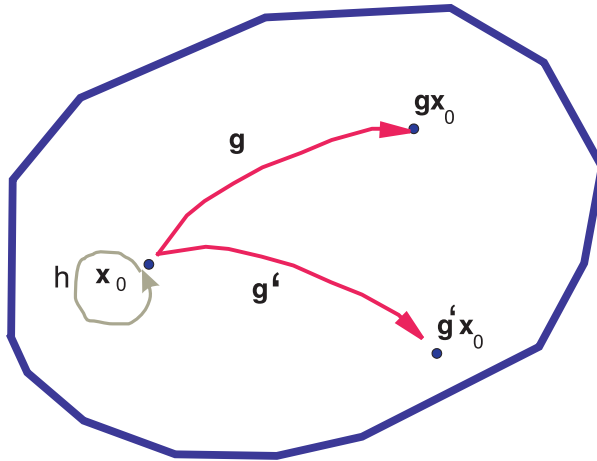
بنابراین هر هم مجموعه ای H_{x_0} یعنی هر عضو $G/H_{x_0} = G/H$ به یک نقطه از مجموعه ای M نگاشته می شود.

حرف های شهودی بالا را می توان به زبان دقیق ریاضی نیز بیان کرد. نگاشت زیر را تعریف می کنیم.

$$\phi : G/H \longrightarrow M, \quad \phi[a] := ax. \quad (32)$$

نخست نشان می دهیم که این نگاشت خوش تعریف است و طرف راست بستگی به انتخاب نماینده کلاس $[a]$ ندارد. این

خاصیت بدیهی است زیرا اگر $a \equiv a'$ آنگاه نتیجه می گیریم که $a' = ah$ که در آن $h \in H$ عضوی از زیرگروه همسانگرد



شکل ۲: هر عضو از گروه مثل g یک نقطه از M مثل gx_0 را مشخص می کند. دو عضو از یک هم مجموعه‌ی H_{x_0} مثل g و gh هر دو یک نقطه را بدست می دهند.

است: بنابراین

$$a'x = ahx = ax. \quad (۳۳)$$

سپس نشان می دهیم که این نگاشت یک به یک است، زیرا

$$\phi[a] = \phi[b] \rightarrow ax = bx \rightarrow b^{-1}ax = x \rightarrow b^{-1}a \in H \rightarrow a \equiv b \rightarrow [a] = [b]. \quad (۳۴)$$

و بالاخره نشان می دهیم که این نگاشت پوششی است، زیرا به ازای هر نقطه $y \in M$ با توجه به تراگذار بودن عمل گروه روی مجموعه داریم $y = ax$ که در آن a عضوی از گروه است. بنابراین $y = \phi[a]$ و در نتیجه نگاشت وارون پذیر است. در اینجا اثبات قضیه کامل شده است و داریم $G/H \cong M$.

■ مثال ۱ - گروه $SO(3)$ روی کره دوبعدی S^2 عمل تراگذار دارد. زیرگروه همسانگرد $SO(3)$ یعنی زیرگروهی که یک نقطه مثلاً قطب شمال را ثابت نگاه می دارد برابر است با $SO(2)$. بنابراین خواهیم داشت:

$$SO(3)/SO(2) \sim S^2. \quad (۳۵)$$

این مثال باهمین استدلال به ابعاد بالاتر تعمیم می یابد

■ تمرین: نشان دهید که

$$SO(n)/SO(n-1) \sim S^{n-1}. \quad (۳۶)$$

■ مثال ۲ - کره سه بعدی S^3 را با تعریف زیر در نظر بگیرید:

$$S^3 := \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in C, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}. \quad (۳۷)$$

گروه $U(2)$ روی این کره به شکل زیر عمل می کند:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad (۳۸)$$

که در آن $g \in U(2)$. با توجه به رابطه $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \end{pmatrix} (|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1)$ درمی یابیم که گروه $U(2)$ گروه تبدیل از S^3 به S^3 است. هم چنین بسادگی معلوم می شود که عمل این گروه روی S^3 تراگذار است. برای پیدا کردن زیرگروه همسانگرد یک نقطه مثل $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ را در نظر می گیریم. کمی محاسبه نشان می دهد که زیرگروه همسانگرد عبارت است از:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}, \mid \theta \in [0, 2\pi] \right\} \sim U(1). \quad (۳۹)$$

با توجه به قضیه قبل نتیجه می گیریم که

$$U(2)/U(1) \sim S^3. \quad (۴۰)$$

این مثال باهمین استدلال به ابعاد بالاتر تعمیم پیدامی کند، یعنی

$$U(n)/U(n-1) \sim S^{2n-1}. \quad (۴۱)$$

■ تمرین: این یکسانی را به طور دقیق نشان دهید.

■ تمرین: بردار $\mathbf{r} := (x, y, z, w) \in R^4$ را در نظر بگیرید. این بردار را نخست تحت اثر یک دوران در صفحه xy به اندازه زاویه 30° درجه و سپس تحت اثر یک دوران در صفحه yz به اندازه 45° درجه و سرانجام تحت اثر یک دوران در صفحه zw به اندازه 60° درجه قرار می دهیم. مولفه های بردار نهایی را بنویسید.

■ تمرین: گروه S_4 روی چهار نقطه $\{1, 2, 3, 4\}$ اثر می کند. گروه پایدارساز 1 را بدست آورید.

■ تمرین: الف: فرض کنید که G یک گروه متناهی باشد که روی یک مجموعه M اثر می کند. X را یک زیر مجموعه از M بگیرید. H_X را آن دسته اعضایی از G می گیریم که X را به خودش می نگارند. دقت کنید که هر عضوی از X الزاماً به خودش نگاشته نمی شود بلکه ممکن است به عضو دیگری از X نگاشته شود. به عبارت دیگر:

$$H_X := \{g \in G \mid gx \in X \quad \forall x \in X\}. \quad (42)$$

در این صورت نشان دهید که H_X یک زیر گروه از G است.

ب: به عنوان یک مثال قرار دهید $G = S_4$ و $M = \{1, 2, 3, 4\}$ و $X = \{1, 2\} \in M$.

زیر گروه پایدارساز X یعنی H_X را پیدا کنید و نشان دهید که واقعا یک زیر گروه از S_4 است.

■ تمرین: در تمرین قبلی متناهی بودن گروه نقش کلیدی داشت. حال یک گروه نامتناهی در نظر بگیرید. (برای سادگی می توانید این گروه را شمارش پذیر بگیرید). با یک مثال نشان دهید که در این صورت H_X دیگر الزاماً یک گروه نیست.

■ تمرین: برای هر کدام از گروه های زیر و عمل آنها روی مجموعه داده شده مشخص کنید که آیا نقطه ثابت وجود دارد یا نه. در صورت وجود این نقطه یا نقاط ثابت را تعیین کنید.

الف: عمل گروه دوران $SO(2)$ روی صفحه دوبعدی.

ب: عمل گروه دوران $SO(2)$ روی فضای سه بعدی. (دوران های حول محور z)

■ تمرین: الف: گروه G که شامل جفت های (A, t) هستند را در نظر بگیرید. هر عنصر این گروه یک دوران توسط $A \in SO(3)$ و یک انتقال به اندازه بردار $t \in R^3$ روی بردارهای فضای R^3 ایجاد می کند:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = A\mathbf{r} + \mathbf{t}. \quad (43)$$

در این جا نخست اعمال روی مجموعه تعریف شده است. حال حاصلضرب عناصر (A', t') (A, t) را پیدا کنید. هم چنین عضو واحد و وارون هر عضو را پیدا کنید.

ب: آیا عمل این گروه نقطه ثابت دارد؟ در صورت وجود نقطه یا نقاط ثابت را پیدا کنید.

پ: آیا عمل این گروه تراگذار است؟

■ تمرین: الف: گروه G که شامل جفت های (A, λ) هستند را در نظر بگیرید. هر عنصر این گروه یک دوران توسط $A \in SO(3)$ و یک تغییر مقیاس به اندازه بردار $\lambda \in R^+$ روی بردارهای فضای R^3 ایجاد می کند:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \lambda \times A\mathbf{r}. \quad (44)$$

در این جا نخست اعمال روی مجموعه تعریف شده است. حال حاصلضرب عناصر (A', λ') (A, λ) را پیدا کنید. هم چنین عضو واحد و وارون هر عضو را پیدا کنید.

ب: آیا عمل این گروه نقطه ثابت دارد؟ در صورت وجود نقطه یا نقاط ثابت را پیدا کنید.

پ: آیا عمل این گروه تراگذار است؟

■ تمرین: الف: گروه G که شامل جفت های (A, t) هستند را در نظر بگیرید. هر عنصر این گروه یک دوران توسط

$A \in SO(2)$ و یک انتقال به اندازه بردار $t \in R$ روی بردارهای فضای R^3 ایجاد می کند:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}. \quad (45)$$

در این جا نخست اعمال روی مجموعه تعریف شده است. حال حاصلضرب عناصر (A', t') را پیدا کنید. هم چنین عضو واحد و وارون هر عضو را پیدا کنید.

ب: آیا عمل این گروه نقطه ثابت دارد؟ در صورت وجود نقطه یا نقاط ثابت را پیدا کنید.

پ: آیا عمل این گروه تراگذار است؟