درسنامه مکانیک کوانتومی

وحید کریمی پور
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده فیزیک

.

درس اول : مروری بر فیزیک کلاسیک

۱ مقدمه

مکانیک، الکترومغناطیس و ترمودینامیک شالوده های فیزیک کلاسیک را تشکیل می دهند. در پایان قرن نوزدهم به نظر می رسید که فیزیک کلاسیک به پایان خود نزدیک شده است و تمام پدیده های فیزیکی را یا حتی تمام پدیده های طبیعی را با کاربست قوانین این سه علم و با کمک گرفتن از ریاضیات می توان تبین کرد. با مکانیک می شد رفتار یک ذره یا دستگاهی از ذرات را تحت تاثیر هر نوع نیرویی به دقت مطالعه کرد. گستره و شمول این قوانین چنان بود که هم جورج تامپسون می توانست نسبت بار به جرم را برای الکترون ها یا اشعه کاتودی بدست آورد و هم جان کوچ آدامز می توانست وجود و موقعیت دقیق و جرم سیاره ای ناشناخته مثل نپتون را، تنها با مطالعه اختلالات مداری اورانوس ، به درستی پیشگویی کنند. مکانیک را هم چنین می شد برای طراحی دقیق سازوکار تمام ماشین ها و ادوات مکانیکی که در صنعت به کار می رفتند به کار برد دوره‌ی پنج جلدی « مکانیک سماوی » لاپلاس که در حوالی سالهای ۱۸۰۰ انتشار یافت که در آن مکانیک تحلیلی برای مطالعه حرکات سیارات و انواع اختلال ها و جذر و مد های آنها به کار می رفت و هم چنین دوره سه جلدی فلیکس کلاین که فقط به مطالعه دینامیک جسم صلبی مثل فرفره می پراخت نشان دهنده این بود که مکانیک نیوتنی یک و نیم قرن پس از وی و به کمک کارهای کارهای اویلر، لاگرانژ، هامیلتون ، لاپلاس و دیگران به قدرت و شکوهی بی مانند رسیده بود.

الکتریسته و مغناطیس نیز وضعیتی مشابه داشتند، هم در فهم طبیعت و هم در کاربرد صنعتی. فارادی نه تنها توانسته بود الکتریسته و مغناطیس را به هم پیوند بزند بلکه ماکسول توانسته بود این دو را به همراه نور و امواج الکترومغناطیسی در یک دستگاه منسجم ریاضی متحد کند. دستگاهی که با دقت بی مانند برای توضیح تمام پدیده های الکترومغناطیسی و نوری از درون اتم گرفته تا ستارگان به کار می رفت . هرگاه با سیستم های بسیار بزرگ و بس ذره ای سرو کار می داشتیم می شد از مکانیک آماری و پیش گویی های آماری آن که برای مقاصد آزمایشگاهی و عملی کاملا کفایت می کرد، استفاده کرد. برای بررسی پدیده های دیگر مثل سیالات، اجسام الاستیک و نظایرآن تنها کافی بود که فوانین و روابط این نظریه‌های بنیادی را به طرز مناسب به کار ببریم.

در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم بتدریج رخنه هایی در این بنای عظیم پیدا شد. برای برطرف کردن این رخنه ها و ترک ها بود که مشاهده و مطالعه دقیق سرانجام نشان داد که در ورای این ساختمان پهناور یک دنیای کاملا نو و شگفت آور وجود به نام دنیای کوانتومی تا دور دست ها گسترده است. امروزه برای ما بسیار دشوار است که جسارتی را که کاشفان این دنیای نو به خرج داده اند تا این سرزمین را با رازها و قوانین شگفت اش به ما بشناسانند درک کنیم. شگفتی های این دنیای نو تنها در پدیده های آن که از دسترس حواس و شهود ما دورند نیست بلکه بیش از هرچیز این کیفیت راز آمیز ناشی از آن است که برای درک آن می بایست هم یک زبان کاملاً جدید و انتزاعی به کار ببریم و هم در بسیاری از مفاهیم بنیادی و فلسفی خود حتی آنها که فراگیر تر ا ز حوزه فیزیک هستند، نظیر علیت، و قطعیت، و آزادی و اختیار تجدید نظر کنیم.

در درس دوم به اختصار تولد مکانیک کوانتومی را شرح می دهیم. اما قبل از می بایست نگاهی به مبانی فیزیک کلاسیک بیندازیم. نگاه ما به این مبانی کوتاه و گذراست. نخست مبانی گرانش و الکترومغناطیس و سپس مکانیک کلاسیک را در

صورت بندی لاگرانژ و هامیلتون مرور می کنیم و سرانجام به اختصار به به مبانی مکانیک آماری می پردازیم.

۲ گرانش و الکترومغناطیس

غالبا گفته زیر را به نیوتن نسبت می دهند: « اگر من توانستم اندکی دورتر را ببینم، علت اش آن بوده است که من روی شانه غولان ایستاده‌ام. » از جمله این غولان می بایست از دکارت، گالیله و کپلر نام برد.
دکارت بعنوان میراث، هندسه تحلیلی را برای او باقی گذارده بود که نیوتن در وهله اول قدری آن را مشکل یافته بود. کپلر پس از بیست و پنج سال محاسبه مداومی که مافوق قدرت هر انسانی بود، سه قانون اساسی حرکت سیارات را کشف کرده و بالاخره گالیله سالها قبل از تولد نیوتن، اولین سنگ را از بنای مکانیک کارگذاشته بود.
سال ۱۶۶۴ یعنی زمانی که نیوتن دانشجوی بیست و دو ساله‌ای در کمبریج بود مرض طاعون در آن ناحیه همه گیر شد طوری که دانشگاه همه دانشجویان را مرخص کرد و نیوتن نیز به خانه پدری اش در ناحیه کشاورزی وولزتورپ [1] در لینکن شایر[2] برگشت و دوسال در آنجا ماند. گفته‌اند که « اگربشریت همه دورانی را که از مرگ ارشمیدس تا زمان تولد نیوتن را حذف کند و به جای آن دوره هجده قرنی، این دوره دوساله اقامت نیوتن را در وولزتورپ جایگزین کند از نظر علمی ضرری نکرده است، زیرا در همین دوسال بود که نیوتن حساب دیفرانسیل و انتگرال را اختراع کرد، قوانین مکانیک را بنیاد نهاد، قانون عمومی گرانش و سرانجام قوانین حاکم بر اپتیک را کشف کرد.

قانون گرانش در واقع بیان کننده چگونگی یکی از نیروهای چهارگانه طبیعت است. این نیرو به همراه نیروی الکترومغناطیسی بلند برد هستند و برخلاف دو نیروی دیگر یعنی نیروی هسته‌ای ضعیف و قوی که برد خیلی کوتاه دارند، در دنیای ماکروسکوپی نمود پیدا می کنند.

امروزه قانون گرانش را به شکل زیر بیان می کنیم.
چگالی جرمی ρ می تواند پتانسیل گرانشی ϕ_g را در هر نقطه از فضا ایجاد می کند. این پتانسیل گرانشی از رابطه زیر تعیین می شود

$$\nabla^2\phi_g(r) = -4\pi G\rho(r) \tag{1}$$

که درآن G ثابت گرانش و مقدار آن برابر است با

$$G = 6.67428 \pm 0.00067 \times 10^{-11} m^3 Kg^{-1} s^{-2}. \tag{2}$$

میدان گرانشی نیز مطابق با رابطه‌ی $E_g(r) = -\nabla\phi_g(r)$ داده می شود. نیروی گرانش مهمترین نیرویی است که در مقیاس های زندگی روزمره و هم چنین در مقیاس منظومه شمسی و ستاره ها و کهکشانها عمل می کند، اما در مقیاس میکروسکوپی

[1] Woolsthorpe
[2] Lincolnshire

بدلیل ناچیزبودن‌اش در مقایسه با نیروی الکترومغناطیسی نقشی ایفا نمی کند.

نیروی الکترومغناطیسی نیز مثل گرانش بلندبرداست اما در مقایسه با آن به طرز حیرت انگیزی بسیار قوی است. درواقع مقایسه نیروی گرانش بین دو الکترون با نیروی دافعه الکترومغناطیسی نشان می دهد که نیروی گرانش 10^{-38} بار کوچکتر از نیروی الکترومغناطیسی است. داستان آشنایی با پدیده‌های الکتریکی و مغناطیسی بسیار طولانی است اما اوج آن مربوط است به اواسط قرن نوزده و کشفیات اورستد، آمپر، فاراده و سرانجام ماکسول که صورت بندی نهایی این قوانین را به انجام رساند. مطابق با قوانین ماکسول رابطه میدان های الکتریکی E و مغناطیسی B با چگالی بار ρ و جریان J به صورت زیراست:

$$\begin{aligned} \nabla . E &= 4\pi\rho \\ \nabla . B &= 0 \\ \nabla \times E &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B \\ \nabla \times B &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E + \frac{1}{c}J, \end{aligned} \tag{3}$$

که درآن c نشان دهنده سرعت نور است که مقدار آن برابر است با:

$$c = 299,792,458 m\ s^{-1}. \tag{4}$$

نیروی وارد بر یک ذره که بار الکتریکی q دارد و با سرعت v در یک میدان الکترو مغناطیسی حرکت می کند توسط رابطه زیر موسوم به رابطه لورنتز داده می شود:

$$F = q(E + \frac{v}{c}B). \tag{5}$$

در درس الکترومغناطیس آموخته‌ایم که چگونه ترکیب روابط ماکسول بایکدیگر می توانند وجود و انتشار امواج الکترومغناطیسی را توضیح دهند.

۳ صورت بندی لاگرانژ ازمکانیک

تقریباً نیم قرن پس از آنکه نیوتن کتاب «اصول ریاضی فلسفی طبیعی» را در ۱۷۲۹ منتشر کرد و درآن قوانین مکانیک را به صورتی که امروز می شناسیم تدوین کرد، ژوزف لویی لاگرانژ ریاضیدان فرانسوی توانست فرمول بندی جدید ولی معادلی از مکانیک ارایه کند که هم برای تعمیم های نظری و هم برای تحلیل مسائل پیچیده کارایی خیلی بیشتری داشت. مکانیک در آن صورتی که نیوتن نخستین بار عرضه کرده بود هنوز متکی بر مفاهیم هندسی بود، اما لاگرانژ توانست با کاربرد آنالیز به جای هندسه به آن هم وحدت و هم استحکام بخشد. خواننده دقیق می تواند به این نکته توجه کند که در صورت بندی نیوتن می بایست برای برای هر مسئله‌ای تجزیه تحلیل دقیقی از بردارهای نیروها انجام دهیم. هم چنین می تواند به یاد بیاورد که معادلات حاکم بر نیروها و شتاب ها در هر دستگاه مختصاتی یک شکل و یک قیافه معین پیدا می کند. در صورت بندی لاگرانژ

خواهیم دید که اثری از بردارهای نیرو و شتاب نیست، نیازی به تجزیه تحلیل این بردار ها نیز و جود ندارد، و بالاتر از همه شکل معادلات حرکت که آنها را معادلات اویلر– لاگرانژ می نامیم کاملاً مستقل از نوع مختصاتی هستند که به کار می بریم. این خصلت هاست که به صورت بندی لاگرانژ هم توانایی فوق العاده داده و هم آن را به صورت یک ساختار ریاضی زیبا درآورده است.

> ده سال بعد از آن تاریخ در نامه ای که لاگرانژ به ریاضی دان فرانسوی دالامبر نوشته است گفته است که در نظر او کاری که در دوران جوانی در نوزده سالگی در محاسبه تغییرات انجام داده شاهکار اوست و بوسیله همین محاسبه است که لاگرانژ توانست تمام دانش مکانیک را منسجم کند و به قول هامیلتون از آن نوعی « شعر علمی » بوجود آورد. [3]

دستگاهی درنظربگیرید که برای توصیف حالت آن احتیاج به مختصات $(q_1, q_2, \cdots q_N)$ دارید. این مختصات لزوماً مختصات دکارتی نیستند و می توانند طول، زاویه یا هرچیز دیگری باشند که برای توصیف موقعیت دستگاه لازم است. سرعت های تعمیم یافته را با $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_N)$ نشان می دهیم. مجموعه $(q, \dot{q})$ را که درآن منظور از q تمامی مختصه هاست یک پیکربندی یا $Configuration$ ازدستگاه می خوانیم و $2N$ را تعداد درجات آزادی دستگاه می گوییم. ازاین به بعد نماد خلاصه‌ی $(q, \dot{q})$ را بجای $(q_1, q_2, \cdots q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_N)$ بکار خواهیم برد. مجموعه تمام هیئت های قابل تصور برای یک دستگاه را فضای پیکر بندی یا $Configuration\ Space$ می خوانیم. خاصیت مهمِ طبیعت آن است که که مختصات q_i و سرعت های $\dot{q}_i$ از یک دستگاه دریک لحظه شتاب های آن دستگاه یعنی $\ddot{q}_i$ ها را در همان لحظه تعیین خواهد کرد. این امر به این معناست که در یک لحظه بی نهایت کوچکِ بعد به فاصله ϵ، می توان مختصات و سرعت ها را بدست آورد، زیرا:

$$\begin{aligned} q_i(t+\epsilon) &= q_i(t) + \epsilon \dot{q}_i(t) \\ \dot{q}_i(t+\epsilon) &= \dot{q}_i(t) + \epsilon \ddot{q}_i(t). \end{aligned} \tag{6}$$

بنابراین هرگاه هیئت یک دستگاه فیزیکی در یک لحظه از زمان معلوم شود، می توان هیئت این دستگاه را در همه لحظات آینده به طور یکتا تعیین کرد. بنابراین دانستن هیئتِ $(q(0), \dot{q}(0))$، هیئت های $(q(t), \dot{q}(t))$ را درهمه لحظات آینده یا به عبارت دیگر مسیر حرکت را به طور یکتا تعیین خواهد کرد.
توجه به این مسئله مهم است که آنچه که دربالا گفتیم یک خاصیت مهم از طبیعت و دنیای ماست و نمی توان آن را براساس بنیادی تری توضیح داد. مثلا می شد دنیا چنان باشد که درآن تنها مختصات یک دستگاه در هرلحظه می توانست سرعت ها را درهمان لحظه تعیین کند. ولی جهانی که ما درآن زندگی می کنیم چنین نیست و درآن مختصات و سرعت ها در هر لحظه مستقل از یکدیگرند و نمی توان با دانستن مختصات در یک لحظه سرعت ها را درهمان لحظه تعیین کرد. حال سوال اساسی این است که مسیر یک دستگاه در فضای پیکربندی چگونه تعیین می شود؟ پاسخِ این سوال توسط یک اصل مهم مکانیک داده می شود که آن را اصل کمترین عمل می گویند.

[3] ریاضی دانان نامی، نوشته اریک تمپل بل، ترجمه حسن صفاری.

۱.۳ اصل کمترین عمل

فرض کنید که درلحظه t_1 دستگاه درپیکربندی $(q_a, \dot{q}_a)$ باشد و دینامیک دستگاه درلحظه t_2 آن را درپیکربندی $(q_b, \dot{q}_b)$ قرارداده باشد. دراین صورت می پرسیم که این دستگاه برای تحول از پیکربندی اولیه به نهایی چه مسیری را درفضای پیکربندی ها طی کرده است. به عبارت ساده تر می پرسیم که مسیرحرکت آن از $(q_a, \dot{q}_a)$ به $(q_b, \dot{q}_b)$ چه بوده است. مطابق با اصل کمترین عمل یا *Principle of least action* تابعی موسوم به لاگرانژی وجود دارد که آن را با $L(q, \dot{q})$ نشان می دهیم و مسیر حرکت دستگاه چنان است که انتگرال این تابع در طول مسیر که آن را کنش می گوییم و با S نشان می دهیم، در فضای همه مسیرهای ممکن یک اکسترمم موضعی است. معنای این حرف آن است تغییرات درجه اول این کمیت نسبت به تغییرات کوچک دراطراف آن برابر با صفراست.

Principle of least action مسیر حرکت می بایست چنان باشد که کمیت زیر موسوم به کنش

$$S = \int_{t_1}^{t_2)} L(q(t), \dot{q}(t))dt \tag{7}$$

در ادامه درباره این که تابع لاگرانژی، چه تابعی از مختصات و سرعت هاست صحبت خواهیم کرد. فعلا می خواهیم ببنیم نتایج اصل کمترین عمل چیست. مسیر دلخواهی مثل $q(t)$ رادرنظرمی گیریم که درلحظه t_1 برابربا q_a ودرلحظه t_2 برابربا q_b باشد. به عبارت دیگر مسیری درنظرگرفته ایم که نقطه q_a را به نقطه q_b وصل کند. برای این مسیر، کنش به شکل زیراست:

$$S[q] := \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt \tag{8}$$

اگراین مسیر، واقعاً مسیر حرکت باشد می بایست تغییرات درجه اول کنش حول آن برابرباصفرباشد یعنی

$$\frac{\delta S}{\delta q} = 0. \tag{9}$$

به زبان ساده تراگرمسیردیگری مثل $q'(t) = q(t) + \eta(t)$ درنظربگیریم که درآن $\eta(t)$ بی نهایت کوچک باشد می بایست تغییرات درجه اول کنش برابرباصفرباشد:یعنی تامرتبه اول از η باید داشته باشیم:

$$S[q+\eta] - S[q] = 0. \tag{10}$$

ازاین رابطه بدست می آوریم (در روابط زیر از قرارداد جمع استفاده شده است یعنی روی اندیس های تکراری جمع زده می شود)

$$\begin{aligned}
S[q+\eta] &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i + \eta_i, \dot{q}_i + \dot{\eta}_i, t)dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{\partial L}{\partial q_i}\eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\eta}_i \right] dt \\
&= S + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\eta_i + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\eta_i) - \eta_i \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial q_i}) \right] dt
\end{aligned}$$

$$= \quad S + \int_{t_1}^{t_2} \eta_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial q_i}) \right] dt \tag{11}$$

ازآنجا که تغییرات S می بایست برای هرنوع تغییر بی نهایت کوچک مسیر برابرباصفرباشد نتیجه می گیریم که شرط زیرمی بایست برقرارباشد.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \tag{12}$$

این معادلات معادلات اویلر—لاگرانژ نامیده می شوند.

از ابتدای کار لاگرانژ به آنالیز توجه یافت و هیچگاه توجه او به هندسه جلب نشد. ترجیحی که وی برای آنالیز قایل بود به خصوص در شاهکار وی به نام « مکانیک تحلیلی» هویداست که از نوزده سالگی در شهر تورن نقشه آن را طرح کرده بود و حال آنکه اثر بزرگ او فقط در سال ۱۷۸۸ در پاریس انتشار یافت و در آن هنگام لاگرانژ پنجاه و دو ساله بود. در مقدمه این کتاب می نویسد: « دراین کتاب اصلا شکلی وجود ندارد» و درعین حال که با لحنی نیمه شوخی از خدایان هندسه قدردانی می کند یادآوری می کند که مکانیک را می توان هندسه فضایی شامل چهار بعد دانست زیرا مختصات سه گانه هر نقطه در فضا بعلاوه زمان که می تواند بعنوان مختص چهارمی در نظر گرفته شود مجموعاً برای تعیین وضع یک نقطه که در فضا و زمان در حرکت است کفایت می کند.[4]

سوالی که در برابر ما قرار دارد آن است که لاگرانژین چه نوع تابعی است. برای یک دستگاه بسته، لاگرانژی عبارت است از تابع زیر:

$$L = T(q, \dot{q}) - V(q_1, q_2, \cdots q_N), \tag{13}$$

که درآن T انرژی جنبشی ذرات موجود در دستگاه و V تابعی موسوم به تابع پتانسیل است که بستگی به نوع برهم کنش ذرات موجود درآن دستگاه را تعیین می کند.

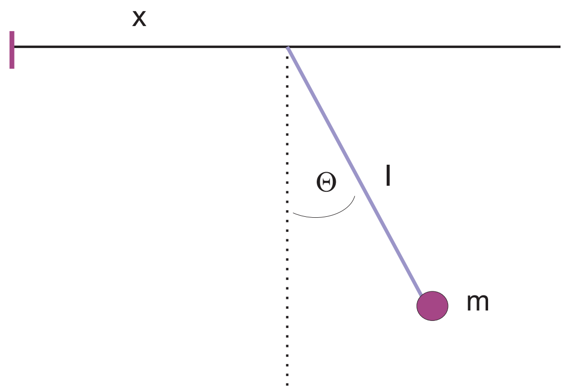
مثال ۱: ذره ای که درپتانسیل V قرار دارد. مختصات تعمیم یافته را همان مختصات دکارتی ذره می گیریم. بنابراین داریم

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z). \tag{14}$$

برای این لاگرانژی، معادلات اویلر و لاگرانژ منجر می شوند به:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{15}$$

[4] تاریخ علوم، نوشته پیر روسو، ترجمه حسن صفاری



شکل ۱: پاندولی که نقطه اتکای آن لغزان است .

که همان معادلات نیوتن هستند.

مثال ۲: پاندول با نقطه اتکای لغزان : شکل ۱، یک پاندول را نشان می دهد که نقطه اتکای آن روی یک میله بدون اصطکاک می لغزد. جرم پاندول را با M و جرم نقطه اتکای آن را با m نشان می دهیم. برای این پاندول مختصات تعمیم یافته را (x, θ) می گیریم که درآن X فاصله نقطه اتکای پاندول با یک نقطه مرجع و θ زاویه پاندول با راستای قائم است. برای آنکه لاگرانژی را بنویسیم از این مطلب استفاده می کنیم که:

$$x = X + l\sin\theta, \qquad y = -l\cos\theta, \tag{16}$$

و درنتیجه

$$\dot{x} = \dot{X} + l\cos\theta\dot{\theta}, \qquad \dot{y} = l\sin\theta\dot{\theta}, \qquad V = -gl\cos\theta. \tag{17}$$

بنابراین لاگرانژی عبارت خواهد بود با:

$$L = \frac{1}{2}m\cos X^2 + \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\cos\theta\dot{X}\dot{\theta}) + gl\cos\theta. \tag{18}$$

مثال ۳ : ذره دریک پتانسیل با تقارن کروی: دراین حالت مختصات ذره را با (r, θ, ϕ) نشان می دهیم. داریم $V = V(r)$ و $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$. بنابراین لاگرانژی عبارت است از:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - V(r). \tag{19}$$

مثال ۴ : دو نوسانگر هارمونیک جفت شده: برای سادگی فرض می کنیم که دو نوسانگر جرم مساوی دارند. این دو نوسانگر با یک فنر با ثابت فنر k به یکدیگر متصل شده ا ند و هرکدام از آنها نیز با فنر مشابهی به دیواره وصل شده اند، شکل (٦).

اگر طول فنرها را درحالت عادی صفر فرض کنیم (فنرهای بسیار کشسان) و اگر انحراف هر جرمِ m_i را از نقطه تعادل آن با x_i نشان دهیم آنگاه داریم

شکل ۲: نوسانگرهای هارمونیک جفت شده.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}\dot{x_2}^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2. \tag{20}$$

مثال ۵ : ذره بار دار درمیدان الکترومغناطیسی: این مثال بدلیل کلیت آن اهمیت دارد زیرا نشان می دهد که چگونه می توان برهم کنش ذره بار دار را با میدان الکترومغناطیسی توصیف کرد. می دانیم که یک میدان الکترومغناطیسی را می توان با پتانسیل اسکالرِ ϕ و پتانسیل برداری $\mathbf{A}$ توصیف کرد. میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی به ترتیب زیر از این پتانسیل ها بدست می آیند:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned} \tag{21}$$

برای ذره بارداری که با بارالکتریکیِ q درچنین میدانی قرار گرفته است، لاگرانژی عبارت است از:

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}. \tag{22}$$

خواننده خود می تواند با استفاده از معادلات اویلر—لاگرانژ نشان دهد که معادله حرکتی که از این لاگرانژی بدست می آید همان معادله لورنتزاست یعنی

$$\frac{d}{dt}m\mathbf{v} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \tag{23}$$

در پنجاه و یک سالگی لاگرانژ این احساس را داشت که به پایان قدرت خویش رسیده است. وضع او مثال بارزی از ایجاد ناتوانی کامل اعصاب در نتیجه کار فکری ممتد و مداوم بوده است. پاریسی ها او را هنگام معاشرت و مصاحبت آرام و مطبوع می دیدند اما هرگز پیشقدم مباحثه و اقدامی نمی شد. بندرت حرف می زد و غالباً گیج و مبهوت و غوطه ور در مالیخولیایی عمیق به نظر می رسید. در اجتماعات دانشمندان که در منزل لاوازیه تشکیل می شد غالباً در کنار پنجره‌ای می ایستاد و بخارج می نگریست و پشت به مهمانهایی می کرد که برای ادای احترام به

او آمده بودند. هنگامی که به او اطلاع می دادند که فلان ریاضی دان به فلان تجسس مهم پرداخته‌است جواب می داد: « چه خوب شد، من اینکار را شروع کرده بودم و مجبور نیستم آن را خاتمه دهم». [5]

۴ صورت بندی هامیلتون از مکانیک

برای یک دستگاه با N درجه آزادی، درصورتبندی لاگرانژ N معادله دیفرانسیل درجه دوم داریم که این معادلات با دردست داشتن مختصات و سرعت های اولیه یک حل یکتا به عنوان مسیر درفضای پیکربندی ها بدست می دهند. هامیلتون صورت بندی متفاوت زیررااز‌مکانیک کلاسیک بدست داده است که ازبسیاری جهات بخصوص برای تعمیم نظری مکانیک کلاسیک به چهارچوب کوانتومی مناسب است.
برای توصیف این صورتبندی لازم است که نخست تکانه یاتکانه تعمیم یافته را تعریف کنیم: تکانه مزدوج با مختصه q_i به شکل زیرتعریف می شود:

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{24}$$

این تکانه با تکانه خطی لزوماً یکی نیست. متغیرهای (q_i, p_i) را یک جفت مختصه مزدوج بایکدیگر می گوییم. هامیلتونی دستگاه به صورت زیرتعریف می شود:

$$H := \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i p_i - L. \tag{25}$$

باید تاکید کنیم که در فرمول بندی هامیلتون متغیرهای مستقل q_i ها و p_i ها هستند. برای فهم این نکته می نویسیم

$$dH = \sum_{i=1}^{N} d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i - dL = \sum_{i=1}^{N} d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i. \tag{26}$$

اما جمله اول و آخر با توجه به تعریف تکانه مزدوج یعنی $p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ یکدیگر را حذف می کنند و باقی می ماند:

$$dH = \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i, \tag{27}$$

که درجمله آخر از معادله اویلر—لاگرانژ استفاده کرده ایم. این رابطه نشان می دهد که اولاً متغیرهای مستقل H برابرند با q_i و p_i، ثانیاً

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

[5] تاریخ علوم، نوشته پیر روسو، ترجمه حسن صفاری

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{28}$$

این معادلات که $2N$ معادله دیفرانسیل درجه یک هستند معادلات هامیلتون نامیده می شوند و معادلات حرکت در صورت بندی هامیلتونی نامیده می شوند.
بامشخص کردن شرایط اولیه یعنی $(q(t_0), p(t_0))$ معادلات بالایک حل یکتا بدست می دهند که همان مسیرحرکت کلاسیک است.

حال سوال می کنیم که عبارت هامیلتونی چه ربطی به انرژی جنبشی و پتانسیل دارد. برای پاسخ به این سوال دقت می کنیم که لاگرانژی به صورت زیراست:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q). \tag{29}$$

بنابراین

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - (T - V). \tag{30}$$

دربسیاری از موارد انرژی جنبشی یک تابع درجه دو از سرعت هاست. یک قضیه ریاضی که اثبات آن را درضمیمه‌ی انتهای این درس می توانید ببنید، بیان می کند که برای چنین تابعی داریم
.

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

درنتیجه برای این سیستم ها خواهیم داشت:

$$H = T + V. \tag{31}$$

مثال : نوسانگر هارمونیک برای نوسانگرهارمونیک به جرم m و فرکانس ω، هامیلتونی برابراست با:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2. \tag{32}$$

q و p دو مختصه مزدوج هستند. معادلات هامیلتون عبارت خواهند بود از:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m} , \qquad \frac{dp}{dt} = -m\omega^2 q. \tag{33}$$

با ترکیب این دو معادله بدست می آوریم

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q^2 = 0, \tag{34}$$

که معادله حرکت یک نوسانگر هارمونیک است.

مثال : حرکت یک ذره در میدان الکترو مغناطیسی دیدیم که لاگرانژی یک ذره در میدان الکترومغناطیسی به شکل زیراست:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}. \tag{35}$$

بنابراین تکانه تعمیم یافته مزدوج با x_i برابرخواهد بود با:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + \frac{q}{c}A_i, \tag{36}$$

و یا به شکل برداری

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}. \tag{37}$$

بنابراین

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}}{m}, \tag{38}$$

ودر نتیجه

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{p} - L = \mathbf{v}\cdot\left(m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}\right) - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q\phi - \frac{q}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} \qquad (39)\\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q\phi. \qquad (40) \end{aligned}$$

ازآنجا که هامیلتونی می بایست تابعی از مختصات و تکانه ها باشد، شکل نهایی هامیلتونی عبارت خواهد بود از:

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2 + q\phi. \tag{41}$$

۱.۴ فضای فاز، حالت و مشاهده پذیر

فرض فیزیک کلاسیک آن است که علی الاصول می توان مختصات و تکانه های یک دستگاه فیزیکی را باهردقتی تعیین کرد. بنابراین کامل ترین توصیف ازیک دستگاه فیزیکی به معنای مشخص کردن تمام مختصات و تکانه هاست. بنابراین «حالت» یک دستگاه فیزیکی با مشخص کردن تمام مختصه های $\{q_i\}$ وتکانه های مزدوج آنهایعنی p_i ها معین می شود. به ازای هرحالت $(q,p) := (q_1, \cdots q_N, p_1, \cdots p_N)$ می توان یک نقطه‌دریک فضای $2N$ که آن را فضای فازمی گوییم درنظرگرفت. فضای فازمجموعه تمام حالاتی است که یک دستگاه فیزیکی منطقاً می تواند اختیارکند. بامشخص کردن حالت اولیه به عنوان یک نقطه دراین فضا، معادلات حرکت یاهمان معادلات هامیلتون یک مسیریکتادراین فضاتعیین می کنند که مسیرحرکت دستگاه فیزیکی است. ازآنجامطابق بافیزیک کلاسیک، نقطه اولیه را می توانیم با هردقتی تعیین کنیم، مسیرحرکت نیز یک مسیر

مشخص ومعین است.
وقتی که دستگاه فیزیکی درحالت (q,p) است علی الاصول می توانیم هرخاصیتی ازآن را اندازه گیری کنیم. این خاصیت به طورکلی کمیتی است که به حالت دستگاه ونه چیز دیگربستگی دارد. بنابراین تابعی است حقیقی از (q,p) مثل $A(q,p)$ یا $B(q,p)$ ونظایرآن. بنابراین به طور کلی می توانیم بگوییم که هرمشاهده پذیرچیزی نیست جزیک تابع حقیقی که روی فضای فازتعریف شده است. این که ازنظرفیزیکی و عملی کدام یک ازاین مشاهده پذیرها راحت تراندازه گیری می شوند یااهمیت بیشتری دارند، موضوع دیگری است.

« مکانیک آسمانی» که مجموعه‌ای از تمام آثار نجومی لاپلاس است در مدت بیست و شش سال قطعه قطعه انتشار یافت. در سال ۱۷۹۹ دوجلد از آن منتشر شد که شامل حرکات سیارات، اشکال آنها و اختلالات و جزر و مد آنها بود. در سالهای ۱۸۰۲ و ۱۸۰۵ دو جلد دیگر که شامل بقیه پژوهش های لاپلاس د رهمین زمینه بود نشر یافت و بالاخره جلد پنجم آن بین سالهای ۱۸۲۳ و ۱۸۲۵ منتشر شد. لاپلاس بیش از همه به نتایج علاقمند بود و غالب اوقات برای اینکه از فشرده ساختن استدلالات مشکل و پیچیده ریاضی بصورتی خلاصه و درک ناکردنی پرهیز کند به یک مرتبه کل استدلال را حذف می کرد و با نوشتن عبارت « به سهولت مشاهده می شود که...» خود را خلاص می کرد. خوانندگان کتاب او، حتی آنهایی که مهارت کامل و استعداد دارند، خیلی زود به غرغر کردن می افتند چرا که به محض اینکه چشمشان به عبارت کذایی مزبور می افتد متوجه می شوند که باید احتمالاً به یک هفته کوشش مداوم تن در دهند. [6]

۲.۴ کروشه پوآسون

برای هردوتابع $f,\ g$ که درروی فضای فاز تعریف می شوند می توان کروشه پواسون را به شکل زیرتعریف کرد:

$$\{f,g\} := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}. \tag{42}$$

خواننده می تواند براحتی خواص زیر را برای کروشه پواسون ثابت کند:

$$\begin{aligned}
&\{f,g\} = -\{g,f\}\\
&\{f,g+h\} = \{f,g\} + \{f,h\}\\
&\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}\\
&\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{h,\{f,g\}\} = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

هم چنین داریم

[6] تاریخ علوم، نوشته پیر روسو، ترجمه حسن صفاری

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \tag{44}$$

تمرین: درستی روابط زیر را نشان دهید. برای هر تابعِ $A(q,p)$:

$$\{q_i, A\} = \frac{\partial A}{\partial p_i}, \qquad \{p_i, A\} = -\frac{\partial A}{\partial q_i}. \tag{45}$$

تمرین: مختصات و تکانه های یک ذره در دستگاه مختصات دکارتی را با (x, y, z, p_x, p_y, p_z) نشان می دهیم. هرگاه $L_x,\ L_y,\ L_z$ مولفه های تکانه زاویه ای باشند، نشان دهید که:

$$\begin{aligned} \{L_i, L_j\} &= \epsilon_{i,j,k} L_k, &(46)\\ \{L_i, x_j\} &= \epsilon_{i,j,k} x_k, &(47)\\ \{L_i, p_j\} &= \epsilon_{i,j,k} p_k. &(48) \end{aligned}$$

بااستفاده ازکروشه پوآسون می توان معادلات حرکت را به شکل زیرنوشت:

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \{q_i, H\} \\ \frac{dp_i}{dt} &= \{p_i, H\}. \end{aligned} \tag{49}$$

هرگاه کمیتی (مشاهده پذیری) مثل $f(q,p,t)$ روی فضای فازتعریف شده باشد می توان تغییرات آن را روی مسیر حرکت بصورت زیربدست آورد:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \end{aligned} \tag{50}$$

که درخط آخر از معادلات حرکت برحسب کروشه پوآسون استفاده کرده ایم. درصورتی که مشاهده پذیر f بستگی جداگانه ای به زمان نداشته باشد وتغییرات آن تنهابه دلیل تغییرات حالت دستگاه ایجادشود رابطه بالا تبدیل به رابطه زیرمی شود:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}. \tag{51}$$

تمرین: $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ بردارهای مختصه و تکانه یک ذره هستند. نشان دهید که برای هر تابع $A(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ روابط زیر برقرارند:

$$\{\mathbf{p}, A\} = -\nabla_r A =: -\frac{\partial A}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial A}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial A}{\partial z}\hat{z} \tag{52}$$

$$\{\mathbf{r}, A\} = \nabla_p A =: \frac{\partial A}{\partial p_x}\hat{x} + \frac{\partial A}{\partial p_y}\hat{y} + \frac{\partial A}{\partial p_z}\hat{z}. \tag{53}$$

حال فرض کنید که تابع A را یک بار در نقطه $(\mathbf{r},\mathbf{p})$ و یک بار هم درنقطه $(\mathbf{r}+\mathbf{a},\mathbf{p})$ حساب کنیم. دراین صورت داریم

$$A(\mathbf{r}+\mathbf{a},\mathbf{p}) = A(\mathbf{r},\mathbf{p}) + \mathbf{a}\cdot\nabla_r A = A(\mathbf{r},\mathbf{p}) - \{\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}, A\}. \tag{54}$$

اصطلاحاً می گوییم که $\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{p}$ مولد انتقال درمکان درجهت بردار یکه $\hat{\mathbf{a}}$ است.
به طریق مشابه می توانیم بگوییم که $\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{r}$ مولد انتقال در تکانه درجهت بردارِ $\hat{\mathbf{a}}$ است.

تمرین: درهمان مسئله قبل اگر $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times p$ بردار تکانه زاویه ای باشد نشان دهید که

$$\{\mathbf{L}, A\} = -(\mathbf{r}\times\nabla_r + \mathbf{p}\times\nabla_p)A. \tag{55}$$

حال فرض کنید که تابع A را یک بار در نقطه $(\mathbf{r},\mathbf{p})$ و یک بار هم درنقطه ای که نسبت به آن به اندازه کوچکی چرخیده است حساب می کنیم. فرض می کنیم که که دوران حول محور $\mathbf{n}$ به اندازه زاویه کوچک θ چرخیده است. دراین صورت نقطه ای که چرخیده است دارای مختصاتِ $(\mathbf{r}+\theta\mathbf{n}\times\mathbf{r}, \mathbf{p}+\theta\mathbf{n}\times\mathbf{p})$ است. بناراین بدست می آوریم

$$\begin{aligned}
& A(\mathbf{r}+\theta\mathbf{n}\times\mathbf{r}, \mathbf{p}+\theta\mathbf{n}\times\mathbf{p}) = A(\mathbf{r},\mathbf{p}) + \theta\mathbf{n}\times\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}A + \theta\mathbf{n}\times\mathbf{p}\cdot\nabla_{\mathbf{p}}A \\
= \quad & A(\mathbf{r},\mathbf{p}) + \theta\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}\times\nabla_{\mathbf{r}} + \mathbf{p}\times\nabla_{\mathbf{p}})A \\
= \quad & A(\mathbf{r},\mathbf{p}) - \theta\mathbf{n}\cdot\{\mathbf{L}, A\}.
\end{aligned} \tag{56}$$

بنابراین نشان دادیم که

$$A(\mathbf{r}+\theta\mathbf{n}\times\mathbf{r}, \mathbf{p}+\theta\mathbf{n}\times\mathbf{p}) = A(\mathbf{r},\mathbf{p}) - \theta\mathbf{n}\cdot\{\mathbf{L}, A\}. \tag{57}$$

اصطلاحاً می گوییم $\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}$ مولد دوران حول محور $\mathbf{n}$ است.

۵ تقارن و نتایج آن

جهان اطراف ما و پدیده های فیزیکی که درآن اتفاق می افتند، از بعضی جهات متقارن است. به عنوان مثال اگر آزمایشی را امروز انجام دهیم و سپس فردا آن را تکرار کنیم، همان نتیجه ای را به دست خواهیم آورد که امروز بدست می آوریم. این امر ناشی از همگنی زمان است و یک خاصیت مهم طبیعت است. البته فردا با امروز از بسیاری جهات مثل دماو رطوبت، میزان تابش آفتاب و وزش باد متفاوت است، به همین دلیل وقتی که از همگنی زمان سخن می گوییم می بایست توجه خود را به یک آزمایش ایده آل که عوامل فوق درآن موثر نیستند معطوف کنیم و یا اینکه آزمایش را درهمان شرایط دماو رطوبت و غیرآن تکرار کنیم. بنابراین می توانیم بگوییم رفتار یک سیستم تحت انتقال در زمان مطلق و یا رفتار یک سیستم بسته تحت انتقال در زمان متقارن است و تغییر نمی کند. این تقارن آنقدر واضح و بدیهی است که اهمیت آن را کمتر حس می کنیم، بااین وجود این

تقارن بسیار مهم است و درواقع دلیل اصلی قانون بقای انرژی است. به همین ترتیب دنیای اطراف ما تحت انتقال در فضای مطلق متقارن است (می توان فضای بین کهکشان ها را فضای مطلق در نظرگرفت که درآن تقریبا هیچ عاملی روی یک آزمایش که انجام می دهیم اثر ندارد)، یا اینکه بگوییم رفتار یک سیستم بسته تحت انتقال در فضا متقارن است. اگر آزمایشی را در تهران انجام دهیم همان نتیجه ای را بدست می آوریم که درتبریز. خواهیم دید که این تقارن منجر به یک قانون بقای مهم یعنی قانون بقای تکانه خطی می شود. و بالاخره دنیای اطراف ما تحت دوران در فضای مطلق نیز متقارن است یا رفتار یک سیستم بسته تحت دوران در فضا متقارن است. اگر آزمایشی را رو به شمال انجام دهیم همان نتیجه ای را بدست می آوریم که رو به جنوب. البته اگر میدان مغناطیسی زمین دراین آزمایش تاثیر گذار باشد، دو نتیجه متفاوت بدست خواهند آمد، ولی دراین صورت سیستم بسته نیست. این تقارن منجر به قانون بقای اندازه حرکت زاویه ای می شود. این خواص تقارنی هستند که تکرار پذیری آزمایش ها و اساساً قدرت پیش بینی علم فیزیک را امکان پذیر می کنند. دراین بخش هدف ما آن است که ارتباط تقارن و قوانین بقا را بفهمیم . نخست تبدیلاتی را که ازآنها سخن گفتیم با دقت بیشتری معرفی می کنیم، سپس به معرفی مولد های این تبدیلات می پردازیم و دست آخر به رابطه تقارن و قوانین بقا می پردازیم.

۱.۵ همگنی زمان و قانون بقای انرژی

برای یک سیستم بسته هامیلتونی تنها تابع مختصات و تکانه هاست و به طور مستقل به زمان بستگی ندارد. این امر ناشی از همگنی زمان است. بنابراین تغییرات هامیلتونی در طول زمان برابراست با:

$$\frac{dH}{dt} = \{H \ , \ H\} = 0, \tag{58}$$

یعنی H یا همان انرژی یک ثابت حرکت است. بنابراین بقای انرژی ناشی از همگنی زمان است.

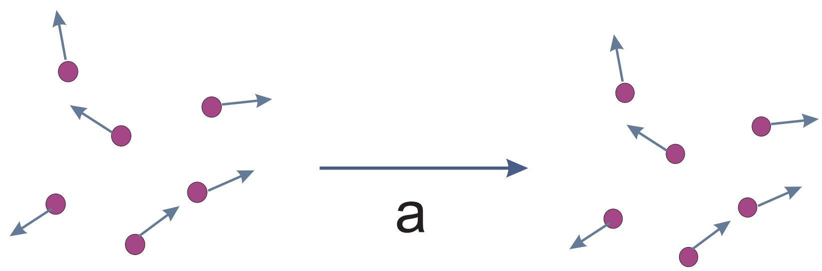
۲.۵ همگنی فضا و قانون بقای اندازه حرکت خطی

دستگاهی در نظر بگیرید متشکل از N ذره که با مختصات $\mathbf{r}_1, \cdot \mathbf{r}_N$ و تکانه های $\mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N$ توصیف می شود. همگنی فضا به این معناست که اگر مکان همه ذرات را به اندازه بردارِ دلخواهِ $\mathbf{a}$ جابجا کنیم، ولی تکانه های آنها را دست نزنیم، (شکل ۳) هامیلتونی هیچ تغییری نمی کند، یعنی

$$H(\mathbf{r}_1, \cdots \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N) = H(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \cdots \mathbf{r}_N + \mathbf{a}; \mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N). \tag{59}$$

ازآنجا که تساوی فوق برای هر بردارِ $\mathbf{a}$ برقراراست، بردار $\mathbf{a}$ را بی نهایت کوچک می گیریم و طرف دوم را تا مرتبه اول برحسب $\mathbf{a}$ بسط می دهیم. بدست می آوریم

$$0 \quad = \quad H(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \cdots \mathbf{r}_N + \mathbf{a}; \mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N) - H(\mathbf{r}_1, \cdots \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N) = \mathbf{a} \cdot \sum_{i=1}^{N} \nabla_{\mathbf{r}_i} H$$



شکل ۳: تقارن یک دستگاه تحت انتقال به این معناست که $H(\mathbf{r}+\mathbf{a},\mathbf{p}) = H(\mathbf{r},\mathbf{p})$. دقت کنید که تکانه ها تغییرنمی کنند.

$$= -\mathbf{a}\cdot\sum_{i=1}^{N}\{\mathbf{p}_i, H\} \tag{60}$$

بدلیل آنکه این تقارن برای تمام $\mathbf{a}$ ها برقراراست نتیجه می گیریم که

$$\{P, H\} = 0, \tag{61}$$

که درآن $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i$ تکانه کل است. بنابراین تقارن تحت انتقال در مکان به این معناست که تکانه زاویه ای کل با هامیلتونی جابجا می شود. نتیجه این رابطه این است که

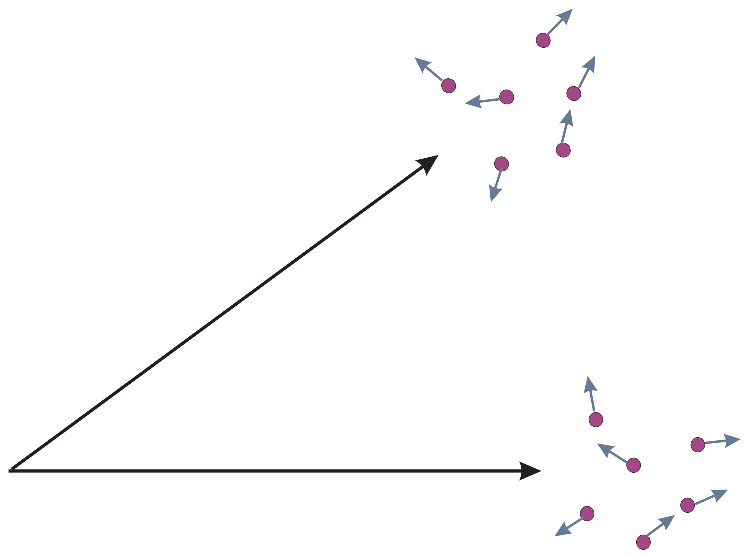
$$\frac{dP}{dt} = \{P, H\} = 0, \tag{62}$$

یعنی تکانه خطی کل یک ثابت حرکت است.

۳.۵ همسانگردی فضا و قانون بقای اندازه حرکت زاویه ای

دستگاهی در نظر بگیرید متشکل از N ذره که با مختصات $\mathbf{r}_1,\cdots\mathbf{r}_N$ و تکانه های $\mathbf{p}_1,\cdots\mathbf{p}_N$ توصیف می شود. هسانگردی فضا به این معناست که اگر این دستگاه را به اندازه زاویه θ بچرخانیم، هامیلتونی هیچ تغییری نمی کند. چرخش دستگاه به این معناست که هم بردارهای مکان و هم بردارهای تکانه به اندازه زاویه θ می چرخند. (شکل ۴)

تقارن تحت دوران به این معناست که هامیلتونی تحت دوران مختصات و تکانه ها تغییر نمی کند. یعنی



شکل ۴: تقارن یک دستگاه تحت دوران به این معناست که $H(r,p) = H(r',p')$ که درآن r' و p' دوران یافته r و p است.

$$
\begin{aligned}
0 &= H(\mathbf{r}_1 + \theta\mathbf{n}\times\mathbf{r}_1, \cdots \mathbf{r}_N + \theta\mathbf{n}\times\mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1 + \theta\mathbf{n}\times\mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N + \theta\mathbf{n}\times\mathbf{p}_N) - H(\mathbf{r}_1, \cdots \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \cdots \mathbf{p}_N) \\
&= \theta\hat{\mathbf{n}}\cdot(\sum_i \mathbf{r}_i \times \nabla_{\mathbf{r}_i} + \mathbf{p}_i \times \nabla_{\mathbf{p}_i})H \\
&= -\theta\mathbf{n}\cdot\{\mathbf{L}, H\}. \qquad (63)
\end{aligned}
$$

این امر به این معناست که

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \{\mathbf{L}, H\} = 0. \qquad (64)$$

بنابراین بقای تکانه زاویه ای نتیجه مستقیم همسانگردی فضاست.

درپایان بهتراست که آنچه را که آموخته ایم به عنوان اصول موضوع مکانیک کلاسیک بیان کنیم.

۶ اصول موضوع مکانیک کلاسیک

درمکانیک کلاسیک فرض بنیادی آن است که مامی توانیم مکان و تکانه هرذره یا دستگاهی متشکل از ذرات را بادقت دلخواه اندازه گیری کنیم.

می توان برای مقایسه بهتر باساختارمکانیک کوانتومی که درپی خواهد آمد اصول موضوع مکانیک کلاسیک را دراینجا بیان کرد.

اصل موضوع یک – معنای حالت : حالت یک ذره با N درجه آزادی با مختصات مکان و تکانهٔ ذرات آن یعنی $(q, p) := (q_1, q_2, \cdots q_n, p_1, p_2, \cdots p_n)$ مشخص می شود. فرض اساسی مکانیک کلاسیک آن است که علی الاصول می توان باهردقت دلخواهی مختصات مکان و تکانه ذرات را مشخص کرد.
مجموعه تمام حالت ها خمینه ای را تعریف می کند که به آن فضای فاز می گوییم. هرنقطه ازاین فضایک حالت قابل حصول برای دستگاه فیزیکی است . فضای فاز خمینه ای است که به یک کروشه پوآسون باتعریف زیرمجهز شده است:

$$\{q_i,\ p_j\} = \delta_{ij} \qquad \{q_i,\ q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \tag{65}$$

اصل موضوع دو – معنای مشاهده پذیر: هرگاه دستگاهی درحالت (q, p) باشد می توان هرخاصیتی که کمیت آن به $(q,\ p)$ بستگی دارد تعیین کرد. به این خاصیت یک مشاهده پذیر یا $Observable$ درفضای فاز می گوییم . بنابراین متناظر با هر مشاهده پذیر A (مثل انرژی، تکانه زاویه ای ویاهرچیزدیگر) یک تابع «حقیقی» A وجود دارد که مقدار آن درنقطه (q, p) یعنی $A(q, p)$ مقدارمشاهده پذیر را، وقتی که دستگاه درحالت (q, p) قراردارد، بدست می دهد.

اصل موضوع سه– اندازه گیری : هرگاه دستگاه درحالت (q, p) باشد، اندازه گیری کمیت A مقدار $A(q, p)$ رابادقتی که توسط ابزاراندازه گیری تعیین می شود بدست می دهد و حالت سیستم نیز دست نخورده باقی خواهد ماند.

اصل موضوع چهار– دینامیک: حالت دستگاه مطابق بامعادلات زیردرطول زمان تغییرمی کند:

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \{q_i, H\} \\ \frac{dp_i}{dt} &= \{p_i, H\}, \end{aligned} \tag{66}$$

که درآن $H(q, p)$ هامیلتونی است. برای بسیاری از سیستم ها تابع هامیلتونی عبارت است از $T - V$ که درآن T انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل است.

در سیزده سالگی ویلیام می توانست مفتخر باشد که به طور متوسط حداقل سالی یک زبان آموخته است. در چهارده سالگی به زبان فارسی نوشته‌ای به زبان فارسی برای خوش آمد برای سفیر ایران که به دیدن شهر دابلین آمده بود تهیه کرد و آنرا برای سفیر فرستاد. فردای آن روز خودش به دیدار جناب سفیر رفت ولی سفیر پیغام فرستاد که « بسیار متاسف است که سردرد شدید وی مانع از آن است که او را ملاقات کند.» فقط پسر بچه‌ای بی اطلاع از ظرافت پرطمطراق شعرای ایرانی که کار خود را نیز خیلی جدی می گیرد ممکن است تصور کند که یک

شرقی حساس که شب را با ضیافت و میخوارگی ایرلندی گذرانده است حاضر است که اول صبح نوشته او را همچون تریاق مستی و خستگی به کار ببرد. [7]

۱.۶ فیزیک آماری

اگر چه فیزیک کلاسیک مبتنی بر تعین و یقین است لازمه پیش بینی یقینی از رویدادها دانستن مختصات و تکانه های همه ذرات در یک لحظه از زمان است. برای یک سیستم ماکروسکوپی مثل یک گاز اگر چه این کار در عالم نظر میسراست ، در عمل چنین چیزی امکان ناپذیراست. البته در عمل هیچگاه علاقمند به پیش بینی مسیر حرکت یک مولکول معین در یک گاز نیستیم بلکه هدف ما پیش بینی رفتار کمیت های ماکروسکوپی است و این کمیت ها مثلاً فشاری که گاز به دیواره های ظرف وارد می کند، ناشی از نیروی میلیاردها میلیارد مولکولی است که در گاز وجود دارد. به همین دلیل برای محاسبه کمیت های ماکروسکوپی کافی است که توجه خود را به متوسط کمیت های میکروسکوپی که با یک تابع توزیع احتمال محاسبه می شوند معطوف کنیم. ما نمی توانیم و نیازی هم نداریم که مکان وسرعت تک تک ذرات یک گاز را تعیین کنیم ولی لازم است بدانیم که احتمال این که مولکولی فلان مکان را اشغال کرده باشد و بهمان سرعت را داشته باشد چقدراست. به خصوص می خواهیم بدانیم وقتی که یک سیستم در دمای T با محیط خود به تعادل رسیده است تابع توزیع این سیستم روی هیئت های مختلفی که برایش امکان پذیراست، چگونه است؟ این سوالی است که مکانیک آماری تعادلی با آن روبرو است و پاسخ آن با یک اصل بنیادین داده می شود که تمامی مکانیک آماری بر آن مبتنی است. بر مبنای این اصل که اصل بولتزمن — گیبس نام دارد، یک سیستم که در دمای T با محیط خود به تعادل رسیده است، هر هیئت با انرژی E را با احتمالِ $\frac{1}{Z}e^{-\beta E}$ اختیار می کند که در آن $\beta=\frac{1}{kT}$، k ثابت بولتزمن، T دمای مطلق و Z یک ضریب تناسب است که برای بهنجار کردن احتمالات در نظر گرفته شده است. بنابراین اگر مختصات تعمیم یافته یک سیستم را با (q,p) و هامیلتونی آن را با $H(q,p)$ نشان دهیم چگالی احتمال این که این سیستم هیئت های یک همسایگی به حجم $dqdp$ را در نزدیکی نقطه (q,p) در فضای فاز اختیار کند، برابر است با

$$\mathcal{P}(q,p)=\frac{1}{Z}e^{-\beta H(q,p)}. \tag{67}$$

از آنجا که جمع همه احتمالات می بایست برابر با یک باشد، ثابت Z که آن را تابع پارش سیستم می خوانیم برابر خواهد بود با

$$Z=\int dq\ dp\ e^{-\beta H(q,p)}. \tag{68}$$

باید یادآور شویم که دراینجانمادِ (q,p) برای اشاره به همه مختصات و تکانه های سیستم به کار رفته است، یعنی $(q,p)=(q_1,\cdots q_N,p_1,\cdots p_N)$ که درآن $2N$ تعداد درجات آزادی سیستم است. دوباره تذکر می دهیم که این اصل مبنای تمامی ساختمان مکانیک آماری است و به کمک آن می توانیم تمامی رفتارهای ماکروسکوپی مواد را توضیح دهیم. هرگاه تابع پارش را محاسبه کنیم خواهیم توانست بسیاری از خصوصیات ماکروسکوپی سیستم را تعیین کنیم. به عنوان مثال می توانیم مقدار متوسط انرژی را به ترتیب زیر بدست آوریم:

[7] تاریخ علوم، نوشته پیر روسو، ترجمه حسن صفاری

$$
\begin{aligned}
\langle H\rangle &= \frac{1}{Z}\int dqdpH(q,p)e^{-\beta H(q,p)} = \frac{1}{Z}\frac{-\partial}{\partial\beta}\int dqdpe^{-\beta H(q,p)} \\
&= \frac{1}{Z}\frac{-\partial}{\partial\beta}Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}ln(Z).
\end{aligned}
\tag{69}
$$

بدنیست دراینجا به چند مثال ساده اشاره کنیم.

مثال ۱: نوسانگر هارمونیک در دمای T:

یک نوسانگر هارمونیک به جرم m و فرکانس ω را در دمای T در نظر می گیریم. این نوسانگر علی الاصول می تواند در هر نقطه ای از فضای فاز قرار داشته باشد یعنی هر مختصه ای و هر تکانه ای را با احتمال معین اختیار کند. تابع پارش برای این نوسانگر عبارت است از

$$
\begin{aligned}
Z &= \int dq\ dpe^{-\beta(\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2)} = \int dqe^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}q^2}\int dpe^{-\frac{\beta}{2m}p^2} \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{\beta m\omega^2}}\sqrt{\frac{2\pi\ m}{\beta}} = \frac{2\pi}{\beta\omega}.
\end{aligned}
\tag{70}
$$

درنتیجه با استفاده از رابطه 69 بدست می آوریم

$$
\langle H\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}(\ln\frac{2\pi}{\omega} - \ln\beta) = \frac{1}{\beta} = kT.
\tag{71}
$$

دیده می شود که متوسط انرژی هیچ گونه بستگی به مشخصات نوسانگر یعنی جرم و فرکانس آن ندارد. دقت در استدلال فوق نشان می دهد که آنچه که در این محاسبه اهمیت داشته است تنها آن بوده است که مختصه q و همینطور مختصه p به صورت مربعی در تابع هامیلتونی وارد شده اند و به ازای هر کدام از این دو مختصه سهمی برابر با $\frac{1}{2}kT$ در انرژی متوسط وارد شده است.

دو نوسانگر هارمونیک جفت شده:

برای این مثال خواننده باید مفهوم وجه یا مُد را برای خود از مکانیک تحلیلی یادآوری کند. دو نوسانگر هارمونیک جفت شده با هامیلتونی زیر توصیف می شوند:

$$
H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{k}{2}(q_1^2 + q_2^2 + (q_1 - q_2)^2).
\tag{72}
$$

این سیستم با تغییر مختصات مناسبی به صورت دو وجه کاملاً جدا از هم درمی آید که با مختصات (Q_1, P_1) و (Q_2, P_2) توصیف می شود و برحسب این مختصات هامیلتونی سیستم به صورت زیر درمی آید:

$$
H = \frac{1}{2m}P_1^2 + \frac{m\omega_1^2}{2}Q_1^2 + \frac{1}{2m}P_2^2 + \frac{m\omega_2^2}{2}Q_2^2.
\tag{73}
$$

ω_1 و ω_2 فرکانس های طبیعی این سیستم نامیده می شوند. اگر وجه ۱ تحریک شود، هردو ذره با فرکانس ω_1 نوسان خواهند کرد و اگر وجه ۲ تحریک شود، هردو ذره با فرکانس ω_2 نوسان خواهند کرد. هرگاه برای چنین سیستمی انرژی متوسط را حساب کنیم با تکرار همان محاسبه قبلی بدست می آوریم

$$\langle H\rangle = \langle\frac{1}{2m}P_1^2+\frac{m\omega_1^2}{2}Q_1^2\rangle+\langle\frac{1}{2m}P_2^2+\frac{m\omega_2^2}{2}Q_2^2\rangle = kT+kT=2kT \qquad (74)$$

بنابراین در هر وجه نوسانی مقدار kT انرژی متوسط ذخیره خواهد شد.

قضیه همپاری انرژی:

آنچه که در مثال قبل بیان کردیم نمونه‌ای است از یک قضیه کلی تر موسوم به قضیه همپاری انرژی. فرض کنید که هامیلتونی یک سیستم به شکل زیر باشد:

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} S_{i,j}p_ip_j+T_{ij}q_iq_j \qquad (75)$$

که درآن S و T دو ماتریس متقارن دلخواه باشند که باهم جابجامی شوند. (درحالتی که ماتریسِ S متناسب با واحد باشد، که برای اغلب سیستم ها چنین است، این شرط برقرارمی شود). تحت این شرایط بایک تبدیل کانونیک که روابط جایجایی مختصات و تکانه ها را به هم نمی زند می توان ماتریس های S و T را باهم قطری کرد و هامیلتونی فوق را به شکل زیر نوشت:

$$H=\sum_{\mu=1}^{N}\frac{1}{2}\alpha_\mu P_\mu^2+\beta_\mu Q_\mu^2, \qquad (76)$$

که درآن ضرایب α_μ و β_μ از قطری شدن ماتریس های S و T بدست می آید و دانستن مقدار آنها برای قضیه فعلی اهمیتی ندارد. به هرکدام از جفت مختصه های Q_μ و P_μ یک وجه گفته می شود. حال اگر همان محاسبه قبلی در مورد نوسانگر هارمونیک را برای این هامیلتونی به کار ببریم متوجه می شویم که به ازای هر وجه سهم انرژی متوسط برابر است با kT. این نتیجه به جزییاتِ سیستم مورد نظر و اینکه درجات آزادی اولیه توصیف کننده چه چیزی بوده اند، ربطی ندارد. براساس این قضیه وقتی که یک سیستم با هر نوع برهم کنش مربعی که داشته باشد بامحیط خود در دمای T به تعادل می رسد، هر وجه از آن سهمی برابر با kT در انرژی متوسط دارد. به عبارت بهتر انرژی متوسطِ سیستم به طور یکسان بین همه وجوه آن پخش می شود طوریکه به هر وجه مقدارِ انرژی kT برسد. به همین دلیل این قضیه نام قضیه همپاری انرژی به خود گرفته است.

۷ ضمیمه یک

دراین ضمیمه قضیه ای را که برای استخراج معادلات حرکت در صورتبندی هامیلتونی مورد استفاده قراردادیم ثابت می کنیم.

تعریف : یک تابع چند متغیره $f(x_1,x_2,\cdots x_N)$ یک تابع همگن از درجه n خوانده می شود هرگاه درشرط زیر صدق کند:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots \lambda x_N) = \lambda^n f(x_1, x_2, \cdots x_N) \qquad \forall \ \ \lambda. \tag{77}$$

قضیه: برای یک تابع همگن از درجه n داریم :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n \ f. \tag{78}$$

اثبات: کافی است که از طرفین رابطه 77 نسبت به λ مشتق بگیریم و دست آخر λ را مساوی یک قرار دهیم.

۸ ضمیمه دو

دراین ضمیمه مفهوم مولد تبدیل کانونیک را معرفی می کنیم. دیدیم که برای هرمشاهده پذیر A (که بستگی صریحی به زمان ندارد) رابطه زیر برقراراست:

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}. \tag{79}$$

این رابطه نشان می دهد که درطول حرکت مقدارمشاهده پذیرA چگونه تغییرمی کند. به عبارت دیگر داریم

$$A(t+\epsilon) = A(t) + \epsilon\{A, H\}. \tag{80}$$

بنابراین H را مولد تبدیل درزمان می خوانیم زیرا به مفهومی که درروابط بالا آمده است تحول یافته هرمساهده پذیری را درزمان بدست می دهد. حال می توانیم سوال کنیم که آیا برای تبدیلات دیگر مثل انتقال یا دوران هم می توانیم مولد تعریف کنیم یاخیر؟ نخست مفهوم مولد رابه طورکلی تعریف می کنیم. تبدیلی را درنظربگیرید که فقط بایک پارامتر مشخص می شود. مقداربی نهایت کوچک این پارامتررا با نماد ϵ نشان می دهیم. فرض کنید که این تبدیل بی نهایت کوچک به صورت زیرعمل می کند:

$$(q_i, p_i) \longrightarrow (q_i', p_i') = (q_i + \delta_\epsilon q_i, p_i + \delta_\epsilon p_i).$$

دراین صورت می گوییم تابع G مولد این تبدیل است هرگاه داشته باشیم

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon q_i &= \epsilon\{q_i, G\} \equiv \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \\ \delta_\epsilon p_i &= \epsilon\{p_i, G\} \equiv -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}. \end{aligned} \tag{81}$$

روابط فوق تضمین می کنند که نقطه جدید بامختصات (q_i', p_i') همچنان نقطه ای است درفضای فاز و روابط کانونیکِ $\{q_i', p_j'\} = \delta_{ij}$ برقرار هستند:

$$
\begin{aligned}
\{q'_i, p'_j\} &= \{q_i + \delta_\epsilon q_i, p_j + \delta_\epsilon p_j\} = \delta_{ij} + \{\delta_\epsilon q_i, p_j\} + \{q_i, \delta_\epsilon p_j\} \\
&= \delta_{ij} + \epsilon\{\{q_i, G\}, p_j\} + \epsilon\{q_i, \{p_j, G\}\} \\
&= \delta_{ij} + \epsilon\{\{q_i, p_j\}, G\} = \delta_{ij} + \epsilon\{\delta_{ij}, G\} = \delta_{ij}, \qquad (82)
\end{aligned}
$$

که درآن ازاتحادجاکوبی استفاده کرده ایم.

حال مشاهده پذیری دلخواه مثل A رادرنظرمی گیریم . تفاوت این مشاهده پذیر رادردونقطه (q,p) و $(q+\delta_\epsilon q, p+\delta_\epsilon p)$ حساب می کنیم. یک محاسبه ساده نشان می دهدکه

$$
\begin{aligned}
\delta A := A(q+\delta_\epsilon q, p+\delta_\epsilon p) - A(q,p) &= \frac{\partial A}{\partial q_i}\delta_\epsilon q_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\delta_\epsilon p_i \\
= \quad \epsilon\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \epsilon\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} &= \epsilon\{A, G\}. \qquad (83)
\end{aligned}
$$

قضیه زیر قضیه بسیارمهمی درارتباط با تقارن است:

قضیه: هرگاه H تحت تبدیلی که مولد آن G است تغییرنکند، یعنی دارای تقارن باشد، دراین صورت G یک ثابت حرکت است.
اثبات: چون H تغییرنمی کند داریم $\delta H = 0$. بنابررابطه (83) داریم

$$
\{G, H\} = \delta H = 0. \qquad (84)
$$

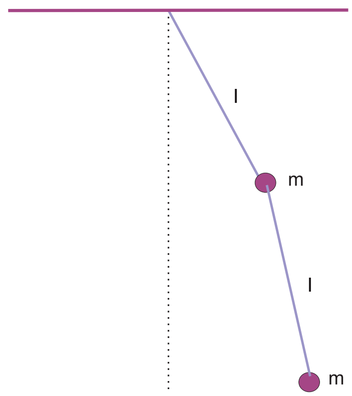
بنابراین

$$
\frac{dG}{dt} = 0. \qquad (85)
$$

ازاین قضیه دونتیجه مهم می گیریم یکی آنکه مولدهای تقارن با هامیلتونی جابجا می شوند و دوم اینکه ثابت حرکت هستند.

۹ مسئله ها

۱ – یک پاندول مرکب مطابق شکل ۵ نظر بگیرید. لاگرانژی این سیستم را بنوسید. معادلات حرکت را بدست آورید.(لازم نیست این معادلات را حل کنید.)



شکل ۵: یک پاندول مرکب. برای حل مسئله ۱ می بایست مختصات مناسب برای این پاندول را بیابید.

۲ — سیستمی متشکل از دو نوسانگر هارمونیک مطابق شکل ٦ در نظر بگیرید. طول نوسانگرها در حالت تعادل برابر با a و ثابت فنرها برابر با k است. جابجایی هر نوسانگر از نقطه تعادلش را با متغیر x نشان می دهیم. لاگرانژی این سیستم را بنویسید. معادلات حرکت را بدست آورید. تکانه های مزدوج با x_1 و x_2 را بدست آورید و هامیلتونی را بنویسید. معادلات هامیلتونی را بدست آورده و آن ها را برای شرایط اولیه دلخواه حل کنید.

۳ — ذره ای با جرم m و بار الکتریکی q دریک میدان مغناطیسی $\vec{B} = B_0\hat{z}$ قرار دارد. لاگرانژی این سیستم را بنویسید. معادلات حرکت را بدست آورید. تکانه های مزدوج با x و y و z را بدست آورید و هامیلتونی را بنویسید. معادلات هامیلتونی را بدست آورده و آن ها را برای شرایط اولیه دلخواه حل کنید.

۴ — ذره ای در یک پتانسیل حرکت می کند. این پتانسیل دارای یک تقارن مارپیچی است به این معنا که به ازای هر r, θ, z

$$V(\rho, \theta, z) = V(\rho, \theta + \alpha, z + h\alpha), \quad \forall, \alpha. \tag{86}$$

در رابطه بالا h یک مقدار ثابت است که به اصطلاح پیچ مارپیچ را تعیین می کند.
با استفاده از این تقارن کمیتی را که ثابت حرکت است پیدا کنید.

۵ — کروشه های پوآسون زیر را محاسبه کنید:

شکل ٦: دو نوسانگر جفت شده به هم.

$$\begin{aligned} &\{L_i, x_j\}, \qquad &\{L_i, p_j\} \\ &\{L_i, L_j\}, \qquad &\{L^2, L_i\} \\ &\{L_i, r^2\}, \qquad &\{L_i, p^2\}. \end{aligned} \tag{87}$$

دراین رابطه ها $p^2 = \sum_{i=1}^{3} p_i p_i \quad r^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i, \quad L^2 = \sum_{i=1}^{3} L_i L_i,$.

٦ — هامیلتونی یک ذره که در یک پتانسیل شعاعی حرکت می کند به شکل زیراست:

$$H = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{2m} + V(r). \tag{88}$$

دقت کنید که پتانسیل $V(r)$ دارای تقارن دورانی است و فقط به اندازه r بستگی دارد.

الف: نشان دهید که

$$\begin{aligned} \{L_i, H\} &= 0 \\ \{L^2, H\} &= 0 \end{aligned} \tag{89}$$

ب: نشان دهید که هامیلتونی را به شکل زیر نیز می توان نوشت:

$$H = \frac{\mathbf{L}\cdot\mathbf{L} + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})^2}{2mr^2} + V(r). \tag{90}$$

٧ — در یک بعد دو ذره مطابق با هامیلتونی زیر باهم برهم کنش می کنند:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(x_1 - x_2) \tag{91}$$

متغیرهای دینامیکی ای که این سیستم را توصیف می کند عبارتند از $x_1, \quad x_2$ مکان های ذره اول و دوم و $p_1, \quad p_2$ که تکانه های این دو ذره هستند.

الف: دو مختصه x و X که به ترتیب مختصه نسبی و مختصه مرکز جرم هستند به صورت زیر تعریف می شوند:

$$x := x_1 - x_2, \qquad X := \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{92}$$

تکانه های مزدوج این دو مختصه که آنها را با p و P نشان می دهیم بدست آورید و آنها را معنا کنید. (راهنمایی: از روابط کروشه پوآسون استفاده کنید.)

ب: هامیلتونی را برحسب این مختصات و تکانه های جدید نوشته و معادلات حرکت را بدست آورید. نشان دهید که در این مختصات جدید مسئله دو جسمی فوق عملاً به یک مسئله یک جسمی تبدیل می شود.

۸ — مسئله ۲ را به N نوسانگر جفت شده تعمیم دهید. طول نوسانگرها در حالت تعادل برابر با a و ثابت فنرها برابر با k است. جابجایی نوسانگر n—ام از محل تعادلش را با x_n نشان می دهیم. لاگرانژی این سیستم را بنویسید. معادلات حرکت را بدست آورید. تکانه مزدوج با x_n را بدست آورید و هامیلتونی را بنویسید. معادلات هامیلتونی را بدست آورده و آن ها را برای شرایط اولیه دلخواه حل کنید. (راهنمایی: هامیلتونی را به شکل ماتریسی $H = \frac{1}{2m}P^tP + \frac{k}{2}X^tSX$ بنویسید و سعی کنید با انتخاب مختصات و تکانه های کانونیک جدید، ماتریس S را قطری کنید.)