درس نامه مکانیک کوانتومی

درس سوم: آشنایی با ساختمان ریاضی مکانیک کوانتومی

۱ مقدمه

در درس گذشته دیدیم که دو فرمول بندی به ظاهر متفاوت از مکانیک جدید یکی توسط هایزنبرگ موسوم به مکانیک ماتریسی و دیگری توسط شرودینگر موسوم به مکانیک موجی، داده شد. خیلی زود معلوم شد که آنچه که هایزنبرگ و شرودینگر به تنهایی دیده بودند، درواقع دو تصویر از دو زاویه متفاوت از یک ساختمان واحد بود که آن را اکنون به نام مکانیک کوانتومی می شناسیم. کسی که توانست با ترکیب این دو تصویر مجزا تصویر کامل ساختمان را بدست آورد، کسی نبود جز پاوول دیراک [1]. بعد از دیراک نیز کسان دیگری به فهم ما از این ساختمان کمک کردند که مهم ترین آنها جان فون نویمان [2] ریاضی دان آمریکایی مجارستانی تبار بود. [3] امروزه می دانیم که بنای معظم مکانیک کوانتومی براساس فضاهای برداری مختلط ساخته می شود.

بنابر اصول مکانیک کوانتومی، به هر حالت فیزیکی از یک دستگاه (خواه این دستگاه یک الکترون در اتم هیدروژن باشد، خواه متشکل از بیلیون ها ذره در یک جامد) یک بردار در یک فضای برداری مختلط نسبت داده می شود. به هر مشاهده پذیر مثل سرعت، مکان، انرژی و نظایرآن نیز یک عملگر روی این فضا نسبت داده می شود. نتایج اندازه گیری مشاهده پذیرها بر روی این دستگاه فیزیکی و هم چنین نحوه تحول دستگاه فیزیکی ما در طول زمان (یعنی همه آنچه که ما از «فهم» یک دستگاه فیزیکی می خواهیم، همه به زبان بردارها و عملگرهای این فضای برداری و روابط بین آنها بیان می شوند. یک بار که اصول موضوع را به دقت بنا کنیم (کاری که در فصل بعد انجام می دهیم) و و آشنایی کافی با مفاهیم و روش های نظریه جبر خطی پیدا کنیم (کاری که دراین فصل انجام می دهیم) می توانیم امیدوار باشیم که پس از توسعه مفاهیم و روش های محاسبه (کاری که در بقیه فصل ها انجام خواهیم داد) شناخت کافی از سازوکارهای موجود در دستگاه های فیزیکی گوناگون از ساده ترین اتم یعنی اتم هیدروژن گرفته تا اتم های چند الکترونی، مولکول ها و سیستم های بس ذره‌ای دیگر پیداکنیم.

روی واژه «فهم» چنانکه می بینید، تاکید کرده‌ایم. فیزیکدانان بعد از مکانیک کوانتومی عموماً و نه تماماً توقع خود را از این واژه تعدیل کرده‌اند. امروزه این واژه را به این معنا به کار می بریم که بتوانیم یک چارچوب نظری بناکنیم که بتوانیم با استفاده از آن داده‌های تجربی و نتایج آزمایش های خود را بر اشیای دنیای خارج از ذهن پیش بینی کنیم، حتی اگر نتوانیم دریابیم که

---

[1] Paul Adrian Maurice Dirac

[2] John von Neumann

[3] فون نویمان علاوه بر نقشی که در تدوین ریاضیات مکانیک کوانتومی داشته است در خیلی جاهای دیگر ریاضیات نیز آثار مهم خلق کرده و به خصوص نقش او در معماری بنیادی کامپیوترهای قابل برنامه ریزی مهم است.

شکل ۱: پاوول آدریان موریس دیراک، فیزیکدان انگلیسی که ساختمان نهایی مکانیک کوانتومی را تدوین کرد.

درژرفای این اشیای فیزیکی نظیر الکترون و پروتون چه می گذرد. مکانیک کوانتومی با استفاده از همین چارچوب کنونی اش ما را قادر می سازد که بتوانیم با دقت بسیار زیاد، دقتی که در بعضی از حوزه های فیزیک به مقدار باورنکردنی ۱ در میلیارد میلیارد نیز می رسد، کمیت های قابل اندازه گیری در آزمایشگاه را به درستی محاسبه و پیش بینی کند. همین فهم که ممکن است به نظر ناقص برسد مبنای تمامی تکنولوژی مدرن و وسیع امروزه است. با این فهم ناقص است که ترانزیستورهای کامپیوتری که من با آن این کلمات را تایپ می کنم رفتار می کنند و صفحه مانیتوری که از بلورهای مایع ساخته شده‌اند حروف درخشان را نشان می دهند.

این تغییر در تعبیر واژه‌ی «فهم» ناشی از تنبلی ذهنی و یا انگیزه‌های دیگر نیست بلکه ناشی از این است که تا کنون تمام تلاش های پی گیرانه برای رفتن به ژرفای بیشتری از فهم طبیعت ناموفق بوده‌اند. مسلماً این تلاش درآینده نیز ادامه خواهد یافت. شاید روزی بتوانیم علاوه بر آنکه احتمال حضور الکترون در یک نقطه‌از درفضا را پیدا می کنیم، مسیری را نیز که الکترون طی کرده تا به آنجا برسد پیدا کنیم. تاریخ علم نشان می دهد که رسیدن به چنین ژرفایی از فهم طبیعت بدون گسترش حوزه مشاهدات مثلاً رفتن به انرژی های بسیار بسیار بیشتر، یا کندوکاو فاصله‌های زمانی و مکانی بسیار بسیار کوچک، امکان ناپذیراست. تا زمانی که حوزه مشاهدات خود را گسترش ندهیم و بخواهیم برای مشاهده ذرات از فوتون ها، الکترون ها و ذرات شناخته شده فعلی استفاده کنیم، اصل عدم قطعیت که در صحت تجربی آن هیچ گونه شک و تردیدی وجود ندارد مانع از مشاهده مسیر الکترون است. اماممکن است که با فرورفتن به اعماق طبیعت، روزی ذراتی را پیداکنیم که مثلاً خاصیت دوگانه موج و ذره نداشته باشند. دراین صورت اصل عدم قطعیت و ساختار کنونی مکانیک کوانتومی نیز تغییر خواهند کرد و چه بسا، نظریه جدید که تصحیحی از مکانیک کوانتومی خواهد بود امکان شناخت دقیق و ژرف تری را مثلا از مسیر الکترون در درون اتم هیدروژن فراهم کند.

درتاریخ علم نمونه‌ای وجود ندارد که نشان دهد بدون گسترش حوزه مشاهدات تنها با انتقاد از نظریه‌های موجود و زیرو رو کردن آنها، نظریه بهتر و درست تری ظهور کرده باشد، مگر این که نظریه جدید ساختاری بسیار ساده تر از نظریه قبلی داشته

شکل ۲: جان فون نویمان، ریاضیدان مجارستانی تبار آمریکایی که سهم بسزایی در توسعه ریاضیات مکانیک کوانتومی داشته‌است.

باشد. حتی در مواقعی که این اتفاق افتاده است مثل آنچه که در جایگزینی مدل خورشید مرکزی کپرنیک و کپلر به جای نظریه زمین مرکزی بطلمیوس رخ داد، بازهم مشاهدات دقیق تر و وسیع تر در همان حوزه منظومه شمسی بسیار موثر بوده‌است. نظریه های رقیب مکانیک کوانتومی مثل نظریه بوهم [4] که توسط دیوید بوهم [5] پیشنهاد شده‌اند ساختار بمراتب پیچیده تری دارند و تاکنون نیز نتوانسته‌اند نتیجه‌ای تجربی را توضیح دهند که مکانیک کوانتومی از توضیح آن ناتوان باشد.

در فصل آینده به تفصیل به اصول موضوعه مکانیک کوانتومی و ساختمان این نظریه خواهیم پرداخت. در ادامه سعی می کنیم که نخست خود را با مبانی ریاضیات مورد نیاز یعنی جبرخطی آشنا کنیم. آشنایی ما با این موضوع کوتاه و در حد نیاز است و جایگزین یک آشنایی عمیق که شما می توانید از طریق مطالعه یک کتاب جبر خطی خوب پیدا کنید نخواهد بود. هم چنین این آشنایی دارای دقت و استحکام تعریفی و استدلالی ریاضی، یعنی چیزی که ریاضیدان ها به آن $Mathematical Rigor$ می گویند نیست ولی برای فهمیدن مکانیک کوانتومی کافی است. فرض می کنیم که خواننده با مفهوم میدان اعداد آشناست. دو نمونه مهم از میدان ها عبارت اند از میدان اعداد حقیقی و میدان اعداد مختلط. نخست فضاهای برداری بابعد محدود را بررسی می کنیم و سپس به فضاهای برداری بی نهایت بعدی خواهیم پرداخت. تاکید ما به خصوص بر معرفی نمادگذاری دیراک برای بردارها و عملگرهاست که به طور گسترده ای درمکانیک کوانتومی مورداستفاده قرارمی گیرد.

۲ فضای برداری

مجموعه V را یک فضای برداری روی میدان اعداد F می گوییم هرگاه دو عمل زیر تعریف شده

$$+\ : V\times V \longrightarrow V \qquad \text{و} \qquad .: F\times V\longrightarrow V \tag{1}$$

[4] Bohmian Mechanics
[5] David Bohm

ودارای خاصیت های زیر باشند: (دراین روابط اعضای V را با $x, y, z, \cdots$) و اعضای F را با $\alpha, \beta, \cdots$ نشان می دهیم.)

$$\begin{array}{ll} A1: & x+y=y+x \\ A2: & (x+y)+z=x+(y+z) \\ A3: & \exists \quad 0 \in V \mid \qquad 0+x=x \\ A4: & \forall x \in V \qquad \exists -x \in V \mid \qquad -x+x=0, \\ & \\ M1: & \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \\ M2: & (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \\ M1: & \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x \\ M1: & 1x=x. \end{array} \tag{2}$$

به ازای هر دو بردار u و v و هر عدد $\alpha \in F$، $u+v$ جمع دو بردار و $\alpha\ u$ ضرب اسکالرِ α در بردارِ v نامیده می شود.
بسته به این که F میدان اعداد حقیقیِ R یامیدان اعداد مختلطِ C باشد، فضای برداری V را فضای برداری حقیقی یا مختلط می گوییم.

مثال ها: مجموعه های زیر هرکدام یک فضای برداری هستند. در اغلب این مثال ها تعریف جمع $+$ و ضرب اسکالر بدیهی هستند و به طور صریح داده نشده‌اند. خواننده می تواند خود تعریف طبیعی مورد نظر را پیشنهاد کند.

۱ $-$ R^n یا مجموعه n تایی های مرتب حقیقی یک فضای برداری حقیقی است.

۲ $-$ C^n یامجموعه n تایی مرتب مختلط، یک فضای برداری مختلط است.

۳ $-$ $M_{m\times n}(F)$ یامجموعه ماتریس های $m\times n$ که درایه های آن عناصریک میدان F هستند، نیز یک فضای برداری است.

۴ $-$ $P_n([a,b])$ یا مجموعه چندجمله های های حقیقی مرتبه n ازمتغیر x که درفاصله $[a,b]$ تعریف شده‌اند.

۵ $-$ $C^k[a,b]$ یا مجموعه توابع حقیقی یا مختلط k بارمشتق پذیردرفاصله $[a,b]$. دو تابع f و g به صورت زیر با یکدیگر جمع می شوند:

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \qquad (\alpha f)(x) := \alpha f(x). \tag{3}$$

ازاین به بعد منحصراً با فضاهای برداری مختلط کارمی کنیم.

تعریف: هرگاه V یک فضای برداری و $W \subset V$ زیرمجموعه ای ازآن باشد، آنگاه W رایک زیرفضای V می گوییم اگر W نسبت به جمع بردارها و ضرب اعداد دربردارها بسته باشد.

مثال ها:

۱ — درفضای ۳ بعدی معمولی، صفحه xy یک زیر فضا از فضای ۳ بعدی است. به طور کلی تر هر خطی که از مبداء بگذرد یک زیر فضای یک بعدی و هرصفحه ای که از مبداء بگذرد یک زیر فضای دو بعدی از فضای سه بعدی است.

۲ — در فضای ماتریس های مربعی، مجموعه ماتریس های بالا مثلثی یک زیر فضا ست.

۳ — در فضای توابع پیوسته $C[a, b]$، مجموعه $P_n([a, b])$ یک زیر فضاست.

۴ — در فضای توابع پیوسته، مجموعه توابع مشتق پذیر یک زیر فضاست.

۳ ضرب داخلی و اندازه

تعریف: دریک فضای برداری V یک عمل دوتایی $\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow C$ رایک ضرب داخلی می نامیم هرگاه درشرایط زیرصدق کند:

$$\begin{aligned}
&\langle x, y + \alpha z\rangle = \langle x, y\rangle + \alpha\langle x, z\rangle \\
&\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^* \\
&\langle x, x\rangle \geq 0 \\
&\langle x, x\rangle = 0 \longrightarrow x = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

مثالهایی از ضرب داخلی:

الف — در C^n:

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \tag{5}$$

ب — در $M_{n,m}(C)$

$$\langle A, B\rangle := tr(AB^{\dagger}) \tag{6}$$

ج — در $C^k[a,b]$.

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f^*(x)g(x)dx. \tag{7}$$

فضایی را که به یک ضرب داخلی مجهزشده باشد یک فضای بردای ضرب داخلی یا $Inner\ \ product\ \ space$ می گوییم.

قضیه کوشی—شوارتز: دریک فضای ضرب داخلی داریم:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle. \tag{8}$$

اثبات: بردار $v := \alpha x + y$ را درنظرمی گیریم. داریم

$$\begin{aligned} f(\alpha, \alpha^*) &:= \langle v, v\rangle \geq 0 \longrightarrow \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle \geq 0 \\ &\longrightarrow |\alpha|^2\langle x, x\rangle + \alpha^*\langle x, y\rangle + \alpha\langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{9}$$

طرف چپ این رابطه یک تابع درجه ۲ از متغیر مختلطِ α است و به ازای هر مقدار از این متغیر، از جمله $\alpha = \frac{-\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}$، بازهم بزرگتر از صفر است. هرگاه این مقدارِ α را در طرف چپ قرار دهیم و عبارت بدست آمده را ساده کنیم به نامساوی کوشی شوارتز می رسیم.

اندازه یک بردار:

درهرفضای ضرب داخلی می توان اندازه یک بردار را به شکل زیرتعریف کرد:

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{10}$$

باتوجه به نامساوی کوشی شوارتز می توان نوشت :

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\ ||y||. \tag{11}$$

مثال هایی ازاندازه یک بردار:

الف — در C^n:

$$|x|^2 := \sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i \tag{12}$$

ب — در $M_{n,m}(C)$

$$|A|^2 := tr(AA^\dagger) \tag{13}$$

ج — در $C^k[a,b]$.

$$|f| := \int_a^b f^*(x) f(x) dx. \tag{14}$$

ازنامساوی کوشی شوارتز دو نتیجه مهم حاصل می شود. یکی تعریف زاویه بین دو بردار به صورت

$$\cos\phi := \frac{|\langle x, y\rangle|}{|x||y|} \tag{15}$$

ودیگری نامساوی مثلث:

$$||x+y|| \langle ||x|| + ||y||. \tag{16}$$

فضای نُرم دار یا اندازه دار: یک فضای برداری V که درآن نگاشت $|| \ || : V \longrightarrow R$ تعریف شده باشد را فضای اندازه دار یا $Normed \ \ Space$ می گوییم هرگاه شرایط زیربرقرارباشند:

$$\begin{aligned}
&||v|| \geq 0 \ \ \forall v \\
&||v|| = 0 \longrightarrow v = 0 \\
&||\alpha v|| = |a| \ ||v|| \\
&||v+w|| \leq ||v|| + ||w||.
\end{aligned} \tag{17}$$

هرفضای ضربِ داخلی باهمان اندازه ای که ازروی ضرب داخلی تعریف می شود یک فضای اندازه داراست، ولی یک فضای اندازه دار الزاماً یک فضای ضرب داخلی نیست. به عبارت دیگر یک اندازه لزوماً ازروی یک ضرب داخلی تعریف نشده است. مثلاً در R^n می توان اندازه یک بردار $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ را به صورت $||x|| = max_i |x_i|$ و یا در فضای توابعِ $C[a,b]$ می توان اندازه یک تابع یا بردار f را می توان به صورت $||f|| = sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ تعریف کرد. هیچ کدام از این دو اندازه از یک ضرب داخلی بدست نیامده‌اند.

فضای متریک: دریک فضای برداریِ نرم دارِ V می توان فاصله بین دو بردار را به شکل زیر تعریف کرد:

$$d(x,y) := ||x-y||. \tag{18}$$

این فاصله دارای خواص زیر است:

$$\begin{aligned} & d(x,y) \geq 0 \\ & d(x,x) = 0 \qquad d(x,y)=0 \longrightarrow x=y \\ & d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z). \end{aligned} \tag{19}$$

اما می توان دریک مجموعه‌ی M که الزاماً فضای برداری نیست، فاصله بین دو نقطه را تعریف کرد به این شکل که هر تابع $d: M\times M \longrightarrow R$ را متریک می گوییم هرگاه در خواص بالا صدق کند. دقت کنید که در خواص بالا هیچ کجا نیازی نیست که چیزی مثل $x+y$ یا αx معنا پیدا کند. به همین دلیل است که تعریف متریک نیازی به خطی بودن فضا ندارد. به عنوان مثال می توان هر مجموعه دلخواهی مثل M را با تعریف زیر تبدیل به یک فضای متریک کرد:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x\neq y \\ 0 & x=y \end{cases} \tag{20}$$

۴ پایه

استقلال خطی: در فضای برداری V، بردارهای $v_1, v_2, \cdots v_n$ مستقل خطی نامیده می شوند اگر تنها حل معادله $\sum_{i=1}^n c_i v_i = 0$ برای اعداد حقیقی یا مختلطِ $c_1, c_2, \cdots c_n$ آن باشد که $c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0$.

یک مجموعه بردار مستقل خطی $e_1, e_2, \cdots e_n$ یک پایه برای فضای برداری V خوانده می شود هرگاه این مجموعه بردارها مستقل خطی باشند و ثانیا هربردار متعلق به V را بتوان به صورت خطی برحسب این بردارها بسط داد، یعنی

$$\forall\ v \in V, \longrightarrow v = \sum_{i=1}^n v_i e_i. \tag{21}$$

v_i ها مولفه های بردارِ v در پایه فوق خوانده می شوند. بدیهی است که وقتی پایه را عوض کنیم، مولفه های یک بردار نیز عوض می شوند.

یک پایه متعامد یکه یا بهنجار خوانده می شود هرگاه شرط زیر را برآورده کند:

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}, \tag{22}$$

که به این معناست که بردارهای پایه دو به دو برهم عمودند و اندازه هرکدام از آنها برابر با یک است.

پایه بهنجار $\{e_i, \quad i=1,\cdots N\}$ را برای فضای V درنظرمی گیریم. $x\in V$ را می توان برحسب این بردارهای پایه بسط داد ونوشت:

$$x=\sum_{i=1}^{N}x_ie_i. \tag{23}$$

بدیهی است که

$$x_i=\langle e_i,x\rangle. \tag{24}$$

روش گرام اشمیت [6] برای ساختن پایه بهنجار

دریک فضای ضرب داخلی، ازیک پایه دلخواه مثل $\{v_1,v_2,\cdots v_N\}$ می توان به روش زیر که به روش گرام اشمیت موسوم است یک پایه بهنجارساخت:
قرارمی دهیم:

$$e_1:=\frac{v_1}{|v_1|},\qquad e_2:=\frac{v_2-\langle e_1,v_2\rangle e_1}{|v_2-\langle e_1,v_2\rangle e_1|},\qquad e_3:=\frac{v_3-\langle e_1,v_3\rangle e_1-\langle e_2,v_3\rangle e_2}{|v_3-\langle e_1,v_3\rangle e_1-\langle e_2,v_3\rangle e_2|},\cdots \tag{25}$$

خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که پایه جدید بهنجاراست. تعبیر هندسی روش بالا نیز روشن وساده است.

مثالهایی از پایه های بهنجار:

الف — در R^n و C^n:

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\.\\0\end{pmatrix}\qquad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\.\\0\end{pmatrix}\qquad e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\.\\1\end{pmatrix} \tag{26}$$

ب — در $M_{m\times n}(C), M_{m\times n}(R)$:

$$E_{ij},\quad i=1,\cdots m,\ j=1\cdots n, \tag{27}$$

[6] Gram-Schmidt

که درآن E_{ij} ماتریسی است که درایه (i,j) آن برابر با ۱ و بقیه درایه های آن برابرباصفراست. به عبارت دیگر داریم

$$[E_{ij}]_{k,l} = \delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{28}$$

این پایه ها متعامد یکه هستند.

ج – در $C^k[a,b]$ ، **مجموعه** $\{e_n(x), f_n(x), \quad n = 0\cdots\infty\}$ **با تعریف**

$$e_n(x) := \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin(\frac{n\pi}{b-a})x, \qquad f_n := \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos(\frac{n\pi}{b-a})x. \tag{29}$$

د – در $P_n[a,b]$، می توان یک پایه مثل $\{1, x, x^2, \cdots x^n\}$ درنظرگرفت و آن را با فرایند گرام–اشمیت بهنجارکرد. تکمیل این تمرین را به خواننده واگذار می کنیم.

تغییر پایه فرض کنید که $\{e_i,\ i = 1\cdots n\}$ و $\{e'_i, i = 1\cdots n\}$ دو پایه بهنجار برای یک فضای برداری V باشند. دراین صورت می توان نوشت

$$e'_i = S_{ij}e_j \tag{30}$$

که در نوشتن این رابطه از قرار داد جمع استفاده کرده‌ایم یعنی روی شاخص های تکراری جمع زده‌ایم. دراین صورت چون هر دو پایه بهنجار هستند داریم

$$\delta_{ij} \equiv \langle e'_i, e'_j\rangle = \langle S_{ik}e_k, S_{jl}e_l\rangle = S^*_{ik}S_{jl}\langle e_k, e_l\rangle = S^*_{il}S_{jk}\delta_{kl} = S^*_{il}S_{jl}. \tag{31}$$

هرگاه این رابطه را به شکل ماتریسی بنویسیم خواهیم داشت:

$$S^\dagger S = I, \tag{32}$$

که درآن الحاقی یک ماتریس به شکل زیر تعریف شده است: $(S^\dagger)_{ij} = S^*_{ji}$. ماتریس هایی که دارای خاصیت فوق باشند، یعنی الحاقی آنها با وارون آنها برابر باشد، ماتریس های یکانی خوانده می شوند.
تحت تغییر پایه مولفه های یک بردار تغییر می کنند. داریم

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_i e'_i. \tag{33}$$

می خواهیم ببنیم مولفه های این بردار در دو پایه چه ربطی به هم دارند. می نویسیم

$$x'_i = \langle e'_i, x\rangle = \langle S_{ij}e_j, x\rangle = S^*_{ij}\langle e_j, x\rangle = S^*_{ij}x_j. \tag{34}$$

۵ تبدیلات خطی

دریک فضای برداری V، نگاشت $\hat{T}: V \longrightarrow V$ را یک تبدیل خطی یا عملگر خطی *Linear operator* می گوییم هرگاه دارای خاصیت زیرباشد:

$$\hat{T}(x+\alpha y) = \hat{T}(x) + \alpha\hat{T}(y) \qquad \forall \alpha \in F, \quad x, y \in V. \tag{35}$$

بدلیل خطی بودن، یک عملگرخطی تنها با اثرش روی بردارهای پایه مشخص می شود، زیرا

$$\hat{T}x = \hat{T}(\sum_{i=1}^{N} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i \hat{T} e_i. \tag{36}$$

از آنجا که $\hat{T}e_i$ برداری از فضای V است، می توانیم آن را برحسب بردارهای پایه بسط دهیم. می نویسیم:

$$\hat{T}e_i = \sum_{j=1}^{N} T_{ji} e_j \tag{37}$$

ماتریس T با درایه های T_{mn} را ماتریس مربوط به تبدیل خطی $\hat{T}$ درپایه $\{e_i\}$ می گوییم. هرگاه پایه فوق بهنجارباشد می توانیم بنویسیم

$$\langle e_j, \hat{T}e_i \rangle = T_{ji}. \tag{38}$$

اثر تبدیل خطی $\hat{T}$ روی یک بردار x عبارت خواهد بود از:

$$\hat{T}x = \hat{T}x_i e_i = x_i(\hat{T}e_i) = x_i T_{ji} e_j = (T_{ji} x_i) e_j = (Tx)_j e_j \tag{39}$$

بنابراین اثر تبدیل خطی $\hat{T}$ روی x آن است که ماتریس تبدیل خطی T ازچپ در ماتریس ستونی x ضرب می شود، به این معنا که اگر برای بردارها داشته باشیم $x' = \hat{T}x$ ، آنگاه برای مولفه های این بردارها در یک پایه خواهیم داشت:

$$[x'] = T[x] \tag{40}$$

که درآن T ماتریس عملگر $\hat{T}$ و $[x]$ و $[x']$ نیز به ترتیب ماتریس های ستونی‌ای هستند که مولفه های بردارهای x و x' را در یک پایه مشخص نشان می دهند.

هرگاه پایه را عوض کنیم ماتریس تبدیل خطی نیز عوض خواهد شد. اگر به جای پایه $\{e_i\}$ پایه $\{e'_i\}$ را درنظربگیریم که درآن $e'_i = S_{li} e_l$ آنگاه خواهیم داشت

$$T'_{ij} = \langle e'_i, \hat{T} e'_j \rangle = \langle S_{li} e_l, \hat{T} S_{mj} e_m \rangle = S^*_{li} T_{lm} S_{mj}, \tag{41}$$

که به صورت فشرده زیرقابل بازنویسی است:

$$T' = S^\dagger T S, \tag{42}$$

که درآن $S^\dagger$ با الحاقی ماتریس S خوانده می شود و چنین تعریف می شود:

$$S^\dagger = (S^*)^T, \qquad \text{یا} \qquad S^\dagger_{ij} = (S^*)_{ji}. \tag{43}$$

تذکر: تبدیل خطی لزومی ندارد که از یک فضای برداری به همان فضا تعریف شود. در حالت کلی تبدیل خطی یک نگاشت $\hat{T} : V \longrightarrow W$ از یک فضای برداری به یک فضای برداری دیگر، تبدیل خطی است اگر در شرط $\hat{T}(\alpha x + y) = \alpha \hat{T} x + \hat{T} y \quad \forall\ \alpha, x, y$ صدق کند. بااین شرط معلوم می شود که میدانی که هردو فضای برداری روی آن تعریف می شوند می بایست یکی باشد تا تبدیل خطی قابل تعریف باشد.

هرگاه $\hat{A}$ و $\hat{B}$ دوتبدیل خطی دلخواه روی V و α عددی دلخواه متعلق به میدان F باشد، آنگاه $\alpha\hat{A} + \hat{B}$ نیز یک تبدیل خطی روی V است. بنابراین مجموعه تبدیلات خطی روی V تشکیل یک فضای برداری می دهد که آن را با $L(V)$ نمایش می دهیم. هم چنین ضرب دو تبدیل خطی با تعریف

$$(\hat{A}\hat{B})x := \hat{A}(\hat{B}x) \tag{44}$$

نیز یک تبدیل خطی است. خواننده باید نشان دهد که ماتریس مربوط به تبدیل خطی $\hat{A}\hat{B}$ عبارت است از حاصل ضرب ماتریس های مربوط به تبدیل های خطی $\hat{A}$ و $\hat{B}$. یعنی اگر $\hat{T} = \hat{A}\hat{B}$، آنگاه $T_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$.
از آنجا که مجموعه تبدیلات خطی نسبت به ضرب نیز بسته است نتیجه می گیریم که $L(V)$ نه تنهایک فضای برداری است بلکه یک جبراست به این معناکه یک فضای برداری است که درآن یک عمل ضرب شرکت پذیر $(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C})$ تعریف شده است. این جبر جابجایی نیست $(\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A})$ اما یکه دار یا یونیتال $(Unital)$ است به این معنا که درآن عنصریکه وجود دارد (دراینجا عملگرهمانی) با خاصیت زیر$\hat{A}\hat{I} = \hat{I}\hat{A} = \hat{A}$.

دیدیم که به یک عملگرخطی می توان یک ماتریس نسبت داد. وقتی که پایه فضارامعین می کنیم بین فضای تبدیلات خطی یعنی $L(V)$ و فضای ماتریس های $M_{n\times n}(C)$ یک یکسانی بوجود می آید. بنابراین می توان ازیک تبدیل خطی ویا ماتریس آن بسته به راحتی سخن گفت. می توان باتعریف زیر، فضای تبدیلات خطی روی V را به یک فضای ضرب داخلی تبدیل کرد:

$$\langle\hat{A},\hat{B}\rangle = tr(AB^{\dagger}) \tag{45}$$

خواننده می تواند نشان دهد که این تعریف مستقل از پایه ای است که برای فضای برداری درنظرمی گیریم.

مثال هایی از تبدیلات خطی:

الف — در C^n ، هرتبدیل به صورت $x \longrightarrow x' = Ax$ که درآن $A \in M_{n\times n}(C)$ یک تبدیل خطی تعریف می کند. بالعکس هر تبدیل خطی در C^n چیزی نیست جز ضرب یک ماتریس مربعی $n\times n$ در یک بردار ستونی n بعدی.

ب — در $M_{m\times n}(C)$، هرتبدیلی که $x \in M_{m\times n}(C)$ را به صورت زیرتبدیل می کند

$$x \longrightarrow x' = AxB^T, \tag{46}$$

که درآن $A \in M_{m,m}(C)$ و $B \in M_{n,n}(C)$ یک تبدیل خطی است. خواننده با الهام از مثال الف و اینکه هر ماتریس $m\times n$ را می توان به صورت یک بردار mn بعدی در نظر گرفت می تواند ثابت کند که کلی ترین تبدیل خطی روی چنین فضایی عبارت است از جمعی از تبدیلات فوق. یعنی کلی ترین تبدیل روی ماتریس های $M_{m\times n}(C)$ عبارت است از:

$$x \longrightarrow x' := \sum_i A_i x B_i. \tag{47}$$

ج — در $C^k[a,b]$. باالهام از مثال الف می توانیم بگوییم که کلی ترین تبدیل خطی روی چنین فضایی، تبدیلی است که $f \in C^k(a,b)$ را به صورت زیرتبدیل می کند:

$$f(x) \longrightarrow f'(x) := \int_a^b K(x,y)f(y) \tag{48}$$

که درآن $K(x,y)$ تابعی است که نسبت به هردو مختصه خود k بار مشتق پذیراست. این تبدیل را یک تبدیل انتگرال و $K(x,y)$ را هسته آن می خوانند. دربعضی ازموارد می توان تبدیل خطی را به صورت یک عملگر دیفرانسیل نیز نوشت: به عنوان مثال درفضای $C^\infty[a,b]$ یعنی فضای توابع بی نهایت مشتق پذیر تبدیلات ازنوع

$$f(x) \longrightarrow \frac{d^r}{dx^r}f(x) \qquad \text{یا} \quad f(x) \longrightarrow x^r f(x) \tag{49}$$

و هرترکیب خطی ازآنها یک عملگرخطی است مثل تبدیل زیر:

$$f(x) \longrightarrow (x^2\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} + 1)f(x). \tag{50}$$

۶ یکسانی دو فضای برداری

تعریف: یک نگاشت خطی $\phi : V \longrightarrow W$ را یک یکسانی [7] بین دو فضای برداری می گوییم هرگاه ϕ وارون پذیرباشد. دراین حالت دو فضای برداری را یکسان [8] می خوانیم. به عنوان مثال فضای C^4 با فضای $M_{2,2}(C)$ یکسان است.

یکسانی دو فضای برداری دو فضای برداری V و W یکسان خوانده می شوند هرگاه بتوان بین آنها یک نگاشت خطی وارون پذیر تعریف کرد. به عنوان مثال فضای بردرای ماتریس های $m \times n$ با فضای برداری C^{mn} یکسان است. هم چنین فضای برداری چند جمله ای های مختلط مرتبه n با فضای C^n یکسان است. هم چنین فضای توابع $C^k(-1, 1)$ با فضای توابع $C^k(-\infty, \infty)$ یکسان است. یکسانی های اول و دوم بدیهی هستند و اثبات آنها آسان است. اثبات یکسانی سوم را خواننده می تواند با استفاده مناسب از تغییر متغیر $y = \tan \frac{\pi}{2}x$ نشان دهد. خواننده خود می تواند مثال های بیشتری از یکسانی بین فضاهای برداری پیدا کند.

۷ فضای کامل، باناخ وهیلبرت

دنباله کوشی: دریک فضای برداری دنباله ای از بردارها مثل $\{x_1, x_2, \cdots x_n \cdots\}$ درنظرمی گیریم. این دنباله یک دنباله کوشی نامیده می شود هرگاه فاصله بین بردارها به تدریج کم شود. به عبارت دقیقتر هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عددی مثل N یافت شود به قسمی که

$$\forall \ m, n > N \longrightarrow |x_n - x_m| \leq \epsilon. \tag{51}$$

دریک فضای برداری حد یک دنباله کوشی لزوماً درخود فضا قرارندارد. به عنوان مثال هرگاه میدان اعداد گویا را به عنوان یک فضای برداری روی خودش درنظربگیریم دنباله $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ اگرچه یک دنباله کوشی است، ولی حد آن درداخل میدان اعدادگویا قرارندارد. باافزودن اعداد گنگ به اعداد گویا میدان اعداد حقیقی بدست می آید که کامل است یعنی حد دنباله های کوشی را درخود دارد.

فضای برداری کامل: یک فضای برداری را فضای برداری کامل می گوییم هرگاه حد دنباله های کوشی رادرخود داشته باشد.

فضای باناخ: یک فضای برداری نرم دار را که کامل باشد فضای باناخ می نامیم.

فضای هیلبرت: یک فضای ضرب داخلی را که کامل باشد فضای هیلبرت می نامیم. ازانجا که میدان اعداد حقیقی و مختلط کامل هستند، می توان ثابت کرد که هرفضای محدود بعدی که روی این میدان ها ساخته می شود نیز کامل بوده

[7] Isomorphism
[8] Isomorphic

وبنابراین یک فضای هیلبرت است.

مثال: فضای توابع حقیقی $C[-1,1]$ را با ضرب داخلی استاندارد $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{2} f(x)g(x)dx$ درنظرمی گیریم. دراین فضا دنباله توابع زیرراتعریف می کنیم:

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{2}(nx+1) & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \end{cases} \tag{52}$$

خواننده می تواند براحتی نشان دهد که این دنباله یک دنباله کوشی است. اما حداین دنباله تابع ناپیوسته پله است که درفضای $C[-1,1]$ قرارندارد. بنابراین $C[-1,1]$ یک فضای هیلبرت نیست.

فضای $L_w^2[a,b]$: فضای توابع مختلط با ضرب داخلی $\langle f,g\rangle = \int_a^b w(x)f^*(x)g(x)dx$ که درآن w یک تابع دلخواه مثبت است باشرط $||f|| < \infty$، فضای توابع انتگرال مجذور پذیر خوانده می شود. هیلبرت ثابت کرده است که این فضا کامل است و به همین مناسبت این فضا یک فضای هیلبرت نامیده می شود. اهمیت این نوع فضاها در استفاده وسیع آنها در مکانیک کوانتومی است. برای اثبات این قضیه وقضیه زیر، خواننده می بایست به کتاب های آنالیز یا آنالیزتابعی مراجعه کند.

قضیه: هرفضای هیلبرت که محدود بعد نباشد، بافضای $L_w^2[a,b]$ یکسان است.

۸ مسئله ویژه مقدار

عمگلر $\hat{T} : V \longrightarrow V$ را درنظرمی گیریم. مسئله ویژه مقدار عبارت است ازیافتن بردارهای غیرصفری است که تحت اثر $\hat{T}$ به مضربی از خود تبدیل شوند، یعنی

$$\hat{T}x = \lambda x \tag{53}$$

بردار x غیر صفر خواهد بود هرگاه ماتریس $T - \lambda I$ وارون پذیرنباشد یعنی اینکه

$$det(T - \lambda I) = 0. \tag{54}$$

این معادله یک معادله درجه N است که درحوزه اعداد مختلط حتماً N تا جواب دارد که آنهارابا $\{\lambda_i,\ i = 1, \cdots N\}$ نشان می دهیم وآن هارا ویژه مقدارهای تبدیل $\hat{T}$ می گوییم. این جواب ها لزوماً همه باهم متفاوت نیستند.

بردارمربوط به λ_i را که درمعادله $\hat{T}v_i = \lambda_i v_i$ صدق می کند ویژه بردارمربوط به آن ویژه مقدارمی گوییم.

هرگاه که یک ویژه مقدار مثل λ_i، g_i بار تکرارشود گوییم درجه واگنی آن g_i است.

هرگاه x و y ویژه بردارمربوط به λ باشند بدیهی است که هرترکیب خطی آنهانیز ویژه بردار مربوط به λ است. بنابراین مجموعه بردارهای متعلق به یک ویژه مقدارتشکیل یک زیرفضامی دهند که آن را ویژه فضای مربوط به آن ویژه مقدارمی گویند.

۹ عملگرهای هرمیتی، یکانی و بهنجار

هم در ریاضیات و هم در فیزیک عملگرهای هرمیتی، پادهرمیتی و یکانی و هم چنین عملگرهای بهنجار اهمیت ویژه دارند. نقطه شروع برای تعریف این عملگرها تعریف چیزی است که آن را الحاقی یک عملگر می نامیم.

تعریف: دریک فضای ضرب داخلی، الحاقی یا $Adjoint$ یک عملگر T عملگری مثل $\hat{T}^\dagger$ است که درشرط زیرصدق کند:

$$\langle v, \hat{T}w\rangle = \langle \hat{T}^\dagger v, w\rangle \qquad \forall v, w \in V. \tag{55}$$

بااستفاده ازاین تعریف می توان براحتی خواص زیرراثابت کرد.

قضیه:

$$\begin{aligned}(\hat{A}^\dagger)^\dagger &= \hat{A}\\ (c\hat{A})^\dagger &= c^*\hat{A}^\dagger\\ (\hat{A}+\hat{B})^\dagger &= \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger\\ (\hat{A}\hat{B})^\dagger &= \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger.\end{aligned} \tag{56}$$

اثبات: فقط رابطه آخر را ثابت می کنیم. اثبات بقیه روابط مشابه است. داریم

$$\langle x, \hat{A}\hat{B}y\rangle = \langle (\hat{A}\hat{B})^\dagger x, y\rangle \tag{57}$$

از طرفی

$$\langle x, \hat{A}\hat{B}y\rangle = \langle \hat{A}^\dagger, \hat{B}y\rangle = \langle \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger x, y\rangle. \tag{58}$$

با مقایسه این دو رابطه بدست می آوریم

$$\langle[(\hat{A}\hat{B})^\dagger - \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger]x, y\rangle = 0, \qquad \forall x, y. \tag{59}$$

از آنجا که این رابطه برای هر بردار y درست است نتیجه می گیریم

$$[(\hat{A}\hat{B})^\dagger - \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger]x = 0 \quad \forall x, \quad \longrightarrow (\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger. \tag{60}$$

تعریف: عملگرهرمیتی: دریک فضای ضرب داخلی عملگرهرمیتی به عملگری گفته می شود که درشرط $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$ صدق کند. عملگر پاد هرمیتی به عملگری گفته می شود که درشرط $\hat{T}^\dagger = -\hat{T}$ صدق کند.

تمرین: نشان دهید که هرگاه A یک عملگر هرمیتی باشد، آنگاه iA یک عملگر پادهرمیتی است. هم چنین نشان دهید که یک عملگر دلخواه مثل Z را می توان به صورت $Z = X + iY$ نوشت که درآن X و Y هر دو هرمیتی هستند. به این ترتیب می شود گفت که عملگرهای هرمیتی مثل اعداد حقیقی هستند. به یک معنا که بعداً خواهیم دید این تعبیر صحیح است.

مثال: درفضای $C^\infty[a,b]$ عملگر $\hat{D} := \frac{\partial}{\partial x}$ رادرنظرمی گیریم. این عملگردرزیرفضایی که از توابع تناوبی تشکیل می شود (باشرط $f(a) = f(b)$) پادهرمیتی است . درنتیجه عملگر $\hat{P} := -i\hat{D}$ دراین زیرفضا هرمیتی خواهد بود. هم چنین این تابع در فضای هیلبرت $L^2[-\infty, \infty]$ هرمیتی است.

عملگر یکانی: دریک فضای ضرب داخلی، عملگریکانی [9] به عملگری گفته می شود که در شرط $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$ صدق کند. یک عملگر یکانی ضرب داخلی بردارهارا حفظ می کند، یعنی

$$\langle\hat{U}v, \hat{U}w\rangle = \langle v, w\rangle. \tag{61}$$

بنابراین عملگر یکانی درشرط $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = I$ صدق می کند. واضح است که یک عملگر یکانی را وقتی دریک پایه بهنجار نمایش دهیم متناظر با یک ماتریس یکانی خواهد بود.

تمرین: نشان دهید که یک عملگر یکانی را همواره می توان به شکل e^{iH} نوشت که درآن H یک عملگر هرمیتی است. به این معنا یک عملگر یکانی شبیه یک عدد مختلط با اندازه یک است. این تعبیر هم به ترتیبی که بعداً خواهیم دید صحیح است.

تعریف: عملگربهنجار یا نرمال [10] به عملگری گفته می شود که خودش با الحاقی اش جابجا شود یعنی N نرمال است اگر $N^\dagger N = NN^\dagger$.

[9] Unitary
[10] Normal

واضح است که عملگرهای هرمیتی و یکانی حتماً نرمال هستند ولی عکس آن درست نیست. یعنی عملگرهای نرمالی وجود دارند که نه یکانی اند و نه هرمیتی. با توجه به این که دیدیم هر عملگر دلخواه را می توان به صورت $Z = X + iY$ نوشت که درآن X و Y هرمیتی باشند، نتیجه می گیریم که عملگری نرمال است که قسمت های حقیقی و موهومی آن یعنی X و Y آن باهم جابجا شوند. برای چنین عملگری خواهیم داشت

$$Z^\dagger Z = ZZ^\dagger = X^2 + Y^2. \tag{62}$$

تمرین: مثالی از یک ماتریس نرمال ارایه دهید که نه یکانی باشد و نه هرمیتی.

در مورد عملگرهای هرمیتی، یکانی و نرمال قضایای جالبی وجود دارد. این قضیه ها را در زیر بیان می کنیم.

قبلا دیدیم که عملگر یکانی اندازه بردارها را حفظ می کند. سوال این است که آیا اگر عملگری اندازه همه بردارها را حفظ کند، آیا این عملگر یکانی است؟ پاسخ این سوال مثبت است.

قضیه: عملگری $\hat{U}$ یکانی است اگروفقط اگر اندازه همه بردارها را حفظ کند.

اثبات: اگر $\hat{U}$ یکانی باشد بااستفاده از 61 معلوم می شود که اندازه بردارهاراحفظ می کند. حال فرض کنید که $\hat{U}$ اندازه همه بردارها را حفظ کند. به ازای هردوبرداردلخواه x,y می دانیم که

$$||\hat{U}x|| = ||x||, \qquad ||\hat{U}y|| = ||y||, \qquad ||\hat{U}(x+y)|| = ||x+y||, \qquad ||\hat{U}(x+iy)|| = ||x+iy||. \tag{63}$$

ازاین روابط نتیجه می گیریم که $\langle \hat{U}x, \hat{U}y\rangle = \langle x, y\rangle$.

قضیه: عملگرِ $\hat{N}$ بهنجاراست اگروفقط اگر به ازای هر بردار x داشته باشیم

$$||\hat{N}x|| = ||\hat{N}^\dagger x||. \tag{64}$$

اثبات: اثبات جهت اول: اگر N بهنجارباشد داریم $\hat{N}\hat{N}^\dagger = \hat{N}^\dagger\hat{N}$. بنابراین

$$\langle \hat{N}x, \hat{N}x\rangle = \langle \hat{N}^\dagger\hat{N}x, x\rangle = \langle \hat{N}\hat{N}^\dagger x, x\rangle = \langle \hat{N}^\dagger x, \hat{N}^\dagger x\rangle. \tag{65}$$

اثبات جهت دوم: از تساوی (??) برای برای $x, y, x+y$ و $x+iy$ که درآن x و y دوبردار دلخواه هستند نتیجه می گیریم

$$\langle \hat{N}x, \hat{N}y\rangle = \langle \hat{N}^\dagger x, \hat{N}^\dagger y\rangle, \qquad \forall x, y. \tag{66}$$

درنتیجه

$$\langle \hat{N}^\dagger \hat{N} x, y\rangle = \langle \hat{N}\hat{N}^\dagger x, y\rangle, \tag{67}$$

ویا

$$\langle (\hat{N}^\dagger \hat{N} - \hat{N}^\dagger \hat{N}) x, y\rangle = 0. \tag{68}$$

چون x و y دلخواه هستند نتیجه می گیریم که $\hat{N}^\dagger \hat{N} = \hat{N}\hat{N}^\dagger$ وبنابراین $\hat{N}$ یک عملگربهنجاراست.

در مورد طیفِ عملگرهای هرمیتی، یکانی و بهنجار قضایای بسیار جالب و مهمی وجود دارد.
قضیه: فرض کنید که $\hat{N}$ یک عملگربهنجاراست. دراین صورت اگر $\hat{N}x = \lambda x$ آنگاه $\hat{N}^\dagger x = \lambda^* x$.
اثبات: اگر $\hat{N}$ بهنجارباشد آنگاه $\hat{N} - \lambda I$ نیزبهنجاراست. حال از قضیه قبل استفاده می کنیم:

$$||(\hat{N} - \lambda I)x|| = 0 \longrightarrow ||(\hat{N} - \lambda I)^\dagger x|| = 0 \longrightarrow ||(\hat{N}^\dagger - \lambda^* I)x|| = 0 \longrightarrow \hat{N}^\dagger x = \lambda^* x. \tag{69}$$

ازاین قضیه دونتیجه ساده بدست می آید:

نتیجه اول: ویژه مقادیریک عملگرهرمیتی حقیقی هستند.

نتیجه دوم؛ ویژه مقادیر یک عملگریکانی فازخالص هستند.

قضیه: ویژه بردارهای یک عملگر نرمال که متناظربا ویژه مقدارهای متمایزهستند برهم عمودند.

اثبات: فرض کنیم $\hat{A}x = \lambda x$ و $\hat{A}y = \mu y$. دراین صورت

$$\langle x, \mu y\rangle = \langle x, \hat{A}y\rangle = \langle \hat{A}^\dagger x, y\rangle = \langle \lambda^* x, y\rangle, \tag{70}$$

وازآنجا

$$\longrightarrow (\mu - \lambda)\langle x, y\rangle = 0 \longrightarrow \langle x, y\rangle = 0. \tag{71}$$

از این قضیه نیز نتیجه می شود که این خاصیت برای عملگرهای هرمیتی و یکانی نیز برقرار است.

۱۰ تجزیه طیفی

پیداکردن ویژه مقادیر و ویژه بردارهای یک عملگربهنجار را پیدا کردن طیف [11] آن عملگر یا به اصطلاح تجزیه طیفی [12] آن عملگر می گویند.

قضیه: دریک فضای برداری محدود بعد ویژه بردارهای یک عملگربهنجار یک پایه برای فضا تشکیل می دهند.

اثبات: عملگر نرمال $\hat{A}$ را روی فضای n بعدی V درنظرمی گیریم. می دانیم که هرعملگر حتماً یک ویژه مقدار و یک ویژه بردارداردک. این ویژه مقداروویژه بردارمربوطه را با λ_1 و e_1 نشان می دهیم:

$$\hat{A}e_1 = \lambda_1 e_1. \tag{72}$$

یک پایه متعامد بهنجاربرای برای فضا انتخاب می کنیم که e_1 اولین عضو آن باشد. بقیه بردارهای این پایه اگر چه بر e_1 عمود هستند ولی لزوماً ویژه بردارهای A نیستند. دراین صورت خواهیم داشت $\langle e_{j\neq 1}|A|e_1\rangle = 0$ و درنتیجه ماتریس عملگر A به شکل زیردرمی آید:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{n-1} \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix} \tag{73}$$

که درآن A_{n-1} یک ماتریس $n-1$ بعدی و b_{n-1} یک بردارسطری $n-1$ بعدی است. اماازقضیه های قبل می دانیم که اگر $Ae_1 = \lambda_1 e_1$ آنگاه $A^\dagger e_1 = \lambda_1^* e_1$. دراین جا ازبهنجاربودن عملگر A استفاده کرده ایم. بنابراین ماتریس $A^\dagger$ نیز می بایست به فرم بالامثلثی باشد ودرنتیجه می بایست $b_{n-1} = 0$. پس A به شکل بلوکه قطری ِزیر درمی آید:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{74}$$

(یک راه ساده تر آن است که مستقیماً از تساوی $AA^\dagger = A^\dagger A$ استفاده کنیم.) حال A_{n-1} به نوبه خود یک عملگرنرمال است و حداقل یک ویژه مقدارویک ویژه بردارداردک. همین استدلال رادرموردآن تکرارمی کنیم ومی بینیم که درپایه ای که اولین و دومین عنصر آن e_1 و e_2 هستند ماتریس عملگر A به شکل زیردرمی آید:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{75}$$

باتکراراین عمل می بینیم که درپایه ویژه بردارهای A یعنی پایه $\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$، A به طورکامل قطری می شود.

---

[11] Spectrum
[12] Spectral Decomposition

این موضوع برای عملگرهایا ماتریس های نابهنجار صادق نیست. به عنوان مثال، ماتریس زیر را درنظر می گیریم

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad c \neq 0. \tag{76}$$

ویژه مقدارهای این ماتریس هردو برابربایک هستند. اما تنهایک ویژه بردار برای این ماتریس وجود دارد که به شکل $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ است. بنابراین ویژه بردارهای این ماتریس نمی توانند یک پایه برای فضا تشکیل دهند.

۱.۱۰ قطری کردن

دیدیم که یک عملگرنرمال درپایه ویژه بردارهای خود قطری است. این امربه این معناست که یک تبدیل یکانی وجود دارد که ماتریس عملگر A راقطری می کند. برای پیداکردن فرم صریح این تبدیل یکانی به ترتیب زیرعمل می کنیم. ویژه مقدارها و ویژه بردارهای A را پیدامی کنیم:

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \qquad i = 1, \cdots n. \tag{77}$$

می دانیم که ویژه بردارهای متناظر با ویژه مقدارهای متمایز برهم عمودهستند. ویژه بردارهای مربوط به یک ویژه مقداروا‌گن را نیز با روش گرام اشمیت برهم عمود می کنیم. درنتیجه این ویژه بردارها درشرایط $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ صدق می کنند. اگر e_i ها را به صورت بردارهای ستونی درنظربگیریم، $e_i^\dagger$ ها به صورت بردارهای سطری درخواهند آمد و رابطه بهنجاربودن آنها به شکل زیربیان می شود $e_i^\dagger e_j = \delta_{ij}$. حال ماتریس S را به شکل زیرمی نویسیم:

$$S = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \tag{78}$$

که درآن e_i ها به عنوان بردارهای ستونی در S قرارگرفته اند. درنتیجه خواهیم داشت

$$S^\dagger = \begin{pmatrix} e_1^\dagger \\ e_2^\dagger \\ \cdot \\ \cdot \\ e_N^\dagger \end{pmatrix}. \tag{79}$$

بدلیل شرط $e_i^\dagger e_j = \delta_{ij}$ نتیجه می گیریم که

$$S^\dagger S = \begin{pmatrix} e_1^\dagger \\ e_2^\dagger \\ \cdot \\ \cdot \\ e_N^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} = I, \tag{80}$$

یعنی S یکانی است.

ازآنجا که $Ae_i = \lambda_i e_i$، بدست می آوریم

$$AS = A \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e_1 & \lambda_2 e_2 & \cdots & \lambda_n e_n \end{pmatrix} \tag{81}$$

ودرنتیجه

$$S^\dagger AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{82}$$

بنابراین A بایک تبدیل یکانی قطری شده است. به مجموعه ویژه بردارها و ویژه مقدارهای یک عملگر نرمال اصطلاحاً طیف یا $spectrum$ آن عملگر می گویند. به همین جهت است که قطری کردن یک عملگر تجزیه طیفی نیز نامیده می شود.

قضیه: دوعملگر نرمال A و B بایکدیگر جابجامی شوند اگروفقط اگر بتوان برای آنها یک مجموعه کامل از ویژه بردارهای مشترک یافت.
این قضیه را به شکل دیگری نیز می توان بیان کرد وآن اینکه اگر دو عملگرنرمال بایکدیگر جابجاشوند حتماً می توان پایه ای یافت که درآن هردوعملگرقطری باشند. باید تاکید کنیم که این خاصیت برای هرپایه دلخواهی برقرارنیست وقضیه تنهامی گوید که می توان پایه‌ای یافت که درآن این خاصیت برقرارباشد.

این قضیه هم ازنظرمفهومی و هم از نظرکاربردی اهمیت زیادی درمکانیک کوانتومی دارد و خواننده می بایست به دقت اثبات آنرا فرابگیرد.
اثبات: فرض کنیم که A و B دوعملگرباشند که یک مجموعه ویژه بردارمشترک مثل $\{e_1, e_2, \cdots e_N\}$ داشته باشند. ازآنجا که این دوعملگرهرمیتی هستند این مجموعه را می توان به عنوان پایه فضاانتخاب کرد. دراین پایه داریم

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad Be_i = \mu_i e_i \tag{83}$$

که ازآن نتیجه می گیریم

$$ABe_i = BAe_i \longrightarrow AB = BA \longrightarrow [A, B] = 0. \tag{84}$$

برعکس فرض کنیم که $[A, B] = 0$.
ویژه بردارهای عملگر A را پیدا می کنیم. واگنی ویژه مقدار λ_i را g_i می نامیم. درپایه ویژه بردارهایش، A شکل زیرراپیدامی کند.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{g_1\times g_1} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \lambda_k I_{g_k\times g_k} \end{pmatrix} \tag{85}$$

حال به ترتیب زیرعمل می کنیم: به ازای هر e_i

$$A(Be_i) = B(Ae_i) = B(\lambda_i e_i) = \lambda_i(Be_i), \tag{86}$$

که درآن از جابجاشدن A و B استفاده کرده ایم. رابطه فوق نشان می دهد که بردار Be_i نیز یک ویژه بردار عملگر A با ویژه مقدار λ_i است. بنابراین Be_i نیز برحسب بردارهای پایه ویژه فضای λ_i قابل بسط است. این امر به این معناست که دراین پایه (همان پایه ای که A درآن قطری است) عملگر B به شکل زیر است:

$$B = \begin{pmatrix} B_{1_{g_1\times g_1}} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & B_{k_{g_k\times g_k}} \end{pmatrix}. \tag{87}$$

به عبارت دیگر درپایه‌فوق عملگر A قطری و عمگلر B بلوکه قطری شده است. حال می توان با تبدیل

$$S = \begin{pmatrix} S_{1_{g_1\times g_1}} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & S_{k_{g_k\times g_k}} \end{pmatrix}. \tag{88}$$

که درآن S_i قطری کننده ماتریس B_i است کل ماتریس B راقطری کرد. این تبدیل قطری بودن A را دست نمی زند زیرا $S_i I_i S_i^\dagger = I_i$. پایه جدید پایه ای است که درآن هردوعملگر قطری هستند.

۲.۱۰ نمادگذاری دیراک

پاول دیراک در ابداع نمادگذاری های جدید و ساده کننده ذوق و مهارت ویژه‌ای داشت. وی هم چنین بدون ترس از نارضایتی ریاضیدانان تابعی تعریف کرد که درهمه نقاط خط اعداد حقیقی برابر با صفر بود و فقط در یک نقطه مقدار داشت آن هم مقدار بی نهایت! بعدها هردوی این ابداعات دیراک در کنار ابداعات بسیار مهم او در فیزیک، مبنای محکمی در ریاضیات پیداکردند. می توان از آن پایه های محکم ریاضی شروع کرد و سرانجام به این ابداعات رسید ولی ما ترجیح می دهیم که تقریباً گام های دیراک را دراین موارد دوباره طی کنیم و روشنی و سادگی مفاهیم و قابلیت کاربرد آنها را فدای استحکام ریاضی کنیم. این کاری است که تا کنون فیزیکدان ها انجام داده‌اند و توانسته‌اند در فیزیک و هم چنین ریاضیات گام های شجاعانه‌ای بردارند

که نهایتاً هم به پیشرفت فیزیک ریاضیات منجرشده است و هم به پیشرفت ریاضیات. با این مقدمه در آینده این فصل ما نمادگذاری دیراک، و ضرب تانسوری فضاهای برداری را به روشی که برای محاسبه و کاربرد در مکانیک کوانتومی مفید باشد بیان خواهیم کرد. خواننده علاقمند به دقت ریاضی می تواند به کتاب های جبرخطی رجوع کند.

یک فضای برداری V ِN بعدی با پایه بهنجار $\{e_1, e_2, \cdots e_N\}$ درنظرمی گیریم. هربردار $v \in V$ بسطی ازبردارهای پایه به شکل زیراست:

$$v = \sum_{i=1}^{N} v_i e_i = \sum_{i=1}^{N} e_i v_i. \tag{89}$$

هرگاه از رابطه‌ی $v_i = \langle e_i, v\rangle$ استفاده کنیم می توانیم رابطه بالا را به شکل زیر بنویسیم:

$$v = \sum_{i=1}^{N} e_i \langle e_i, v\rangle. \tag{90}$$

از آنجا که این رابطه برای هر بردار دلخواهِ v درست ااست می توان گفت که عبارت $\sum_{i=1}^{N} e_i\langle e_i, \rangle$ مثل عملگر واحد عمل می کند. البته این گزاره همراه با این قیداضافه است که وقتی این عملگر روی هر برداری مثل v اثر می کند، جمله $\langle e_i, v\rangle$ ضرب داخلی را حساب کرده و مولفه v_i مشخص می شود که پس از قرارگرفتن در کنار e_i و جمع بستن روی همه‌ی i ها، بردار v را تولید می کند. بنابراین می توانیم بنویسیم

$$\sum_i e_i\langle e_i, \rangle = I. \tag{91}$$

این رابطه و بیان فوق را می توان به شکل بهتری نوشت اگر از این به بعد بردار ها را به جای نماد ساده‌ی v با $|v\rangle$ نشان دهیم و همچنین ضرب داخلی دو بردار را به جای $\langle v, w\rangle$ با $\langle v|w\rangle$ نشان دهیم. دراین صورت رابطه بالا به شکل زیر در می آید:

$$\sum_i |e_i\rangle\langle e_i| = I. \tag{92}$$

حال می توان پرسید که اگر $|v\rangle$ یک بردار است $\langle w|$ (در رابطه فوق $\langle e_i|$) چگونه چیزی است؟ پاسخ این است که $\langle w|$ می بایست چیزی باشد که در رابطه یا قرارداد زیر صدق کند:

$$\langle w|v\rangle = \langle w, v\rangle. \tag{93}$$

اگر یک پایه متعامد بهنجار برای فضا انتخاب کرده باشیم و دراین پایه $|v\rangle$ را معادل یک بردار ستونیِ

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \tag{94}$$

بگیریم آنگاه رابطه‌ی بالا نشان می دهد که می توان $\langle w|$ را معادل یک بردار سطری به صورت

$$\langle w| = \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* & \cdot & \cdot & w_n^* \end{pmatrix} \tag{95}$$

بگیریم. بردار $|v\rangle$ را یک بردار ket و بردار $\langle w|$ را یک بردار Bra نام می نهیم.

می توان یک بردار bra مثل $\langle w|$ را در یک بردار ket مثل $|v\rangle$ ضرب کرد و یک عدد بدست آورد که همان ضرب داخلی بین دو بردار است،

$$\langle w|v\rangle = \begin{pmatrix} w_1^*, & w_2^*, & \cdot, & \cdot, & w_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} w_i^* v_i. \tag{96}$$

هم چنین می توان یک بردار ket را در یک بردار bra ضرب کرد و یک ماتریس بدست آورد:

$$|v\rangle\langle w| = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^*, & w_2^* & \cdot & \cdot & w_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1w_1^* & v_1w_2^* & v_1w_3^* & \cdot & v_1w_n^* \\ v_2w_1^* & v_2w_2^* & v_2w_3^* & \cdot & v_2w_n^* \\ v_3w_1^* & v_3w_2^* & v_3w_3^* & \cdot & v_3w_n^* \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_nw_1^* & v_nw_2^* & v_nw_3^* & \cdot & v_nw_n^* \end{pmatrix} \tag{97}$$

رابطه‌ی $\sum_i |e_i\rangle\langle e_i| = I$ که به ازای هر پایه متعامد بهنجاری برقراراست رابطه بسیار مفیدی است و کاربرد آن معمولاً باعث می شود که بسیاری از قضایای جبر خطی تبدیل به اتحادهای بدیهی شوند. به عنوان مثال هرگاه این عبارت را در طرف چپ یک کت $|v\rangle$ به رابطه زیر می رسیم:

$$|v\rangle = \sum_i |e_i\rangle\langle e_i|v\rangle, \tag{98}$$

که درواقع بیان می کند که ضرایب بسط یک بردار $|v\rangle$ عبارتند از $v_i := \langle e_i|v\rangle$. هرگاه آن را در طرف راست یک برای $\langle v|$ قرار دهیم به رابطه زیر می رسیم

$$\langle v| = \sum_i \langle v|e_i\rangle\langle e_i|, \tag{99}$$

که بیان می کند ضرایب بسط برای $|v\rangle$ برحسب پایه‌ی $|e_i\rangle$ ها برابرند با $v_i^* := \langle v|e_i\rangle$. می توانیم آن را هم در طرف راست و هم در طرف چپ یک عملگر مثل $\hat{T}$ قرار دهیم و به رابطه‌ی زیر برسیم:

$$\hat{T} = \sum_{i,j} |e_i\rangle\langle e_i|\hat{T}|e_j\rangle\langle e_j| = \sum_{i,j} T_{ij}|e_i\rangle\langle e_j|, \tag{100}$$

که نشان می دهد ماتریس وابسته به یک عملگر $\hat{T}$ برابراست با T که درایه های آن از رابطه‌ی $T_{ij} := \langle e_i|T|e_j\rangle$ بدست می آیند.

در بسیاری از موارد وقتی که ابهامی پیش نمی آید، به جای نماد $|e_i\rangle$ از نماد ساده ترِ $|i\rangle$ برای نشان دادن یک بردار پایه استفاده می کنیم. دراین صورت نتیجه بالا در مورد ماتریس مربوط به یک عملگر به صورت زیر در می آید:

$$T = \begin{pmatrix} \langle 1|\hat{T}|1\rangle & \langle 1|\hat{T}|2\rangle & . & . & \langle 1|\hat{T}|n\rangle \\ \langle 2|\hat{T}|1\rangle & \langle 2|\hat{T}|2\rangle & . & . & \langle 2|\hat{T}|n\rangle \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \langle n|\hat{T}|1\rangle & \langle n|\hat{T}|1\rangle & . & . & \langle n|\hat{T}|n\rangle \end{pmatrix}. \tag{101}$$

۱۱ نگاشت بین فضای کت ها و فضای برا ها

می توان گفت که با دو فضای برداری مواجه هستیم که یکی از آنها فضای کِت ها و دیگری فضای برا ها ست. با توجه به رابطه‌ی 95 داریم

$$\begin{aligned} |w\rangle = |v\rangle \quad &\longrightarrow \quad \langle w| = \langle v|, \\ |w\rangle = c|v\rangle \quad &\longrightarrow \quad \langle w| = c^*\langle v|, \\ |w\rangle = |u\rangle + |v\rangle \quad &\longrightarrow \quad \langle w| = \langle u| + \langle v|, \\ |w\rangle = \hat{T}|v\rangle \quad &\longrightarrow \quad \langle w| = \langle v|\hat{T}^\dagger. \end{aligned} \tag{102}$$

۱۲ عملگرهای تصویرگر

فضای برداری V ویک زیرفضای آن مثل W درنظرمی گیریم. برای W یک پایه مثل $\{|i\rangle, \quad i=1,\cdots m\}$ درنظرمی گیریم. دراین صورت عملگر

$$P_W := \sum_{i=1}^{m} |i\rangle\langle i| \tag{103}$$

عملگرتصویر[13] روی V خوانده می شود. این عملگربردارهای فضا را بروی W تصویرمی کند. این عملگرهرمیتی است و درشرط $P^2 = P$ صدق می کند. اگر دو زیرفضای W_2 و W_1 داشته باشیم که برهم عمود باشند (یعنی بردارهای آنها برهم عمود باشند) آنگاه بدیهی است که عملگرهای تصویرگر آنها با هم رابطه زیر را دارند:

$$P_1^2 = P_1, \qquad P_2^2 = P_2, \qquad P_1P_2 = 0, \qquad P_2P_1 = 0. \tag{104}$$

۱.۱۲ تجزیه طیفی و عملگرهای تصویری

فرض کنید که A یک عملگر بهنجار باشد . اگر a_1 یک ویژه مقدار این عملگر با درجه واگنی K باشد، و ویژه بردارهای متعامد و یکه‌ی متناظر با این عملگر را با $\langle |e_1^{(1)}\rangle, |e_1^{(2)}\rangle, \cdots |e_1^{(K)}\rangle$ نشان دهیم دراین صورت ویژه فضای مربوط به a_1 با بردارهای یکه و متعامد فوق جاروب می شود و عملگرِ

$$P_1 = \sum_{i=1}^{K} |e_1^i\rangle\langle e_1^{(i)}|, \tag{105}$$

عملگر تصویر روی این ویژه فضاست. طیف عملگرA را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\hat{A}|e_n^{(i)}\rangle = \lambda_n|e_n^{(i)}\rangle, \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots\ g_n, \tag{106}$$

که درآن g_n درجه واگنيِ ویژه مقدارِ λ_n است و بردارهای $\langle |e_n^{(i)}$ یک پایه متعامد بهنجار تشکیل می دهند. عمگلر واحد به شکل زیر نوشته می شود:

$$I = \sum_{n,i} |e_n^{(i)}\rangle\langle e_n^{(i)}|, \tag{107}$$

با قرار دادن عملگر واحد در دو طرف $\hat{A}$ و توجه به رابطه‌ی 106 بدست می آوریم

$$\hat{A} = \sum_{n,i} \lambda_n |e_n^{(i)}\rangle\langle e_n^{(i)}| = \sum_n \lambda_n (\sum_{i=1}^{g_n} |e_n^{(i)}\rangle\langle e_n^{(i)}|) = \sum_n \lambda_n P_n, \tag{108}$$

که درآن P_n عملگر تصویر روی ویژه فضای مربوط به ویژه مقدارِ λ_n است.

Projection Operator[13]

۲.۱۲ توابع عملگرهای نرمال

درمکانیک کوانتومی اغلب نیازداریم که توابعی از عملگرهای هرمیتی را تعریف کنیم. فرض کنید که T یک عملگر دلخواه و $f : C \longrightarrow C$ تابعی بابسط زیرباشد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \tag{109}$$

دراین صورت تابع $f(T)$ نیز باهمین بسط تعریف می شود.

$$f(T) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n T^n. \tag{110}$$

از آنجا که عملگر T نرمال و در نتیجه قطری پذیراست می توان نوشت $T = \Omega D \Omega^{-1}$ که درآن D قطری شدهٔ T و Ω ماتریس قطری کنندهٔ T است. هرگاه به این نکته توجه کنیم که $T^n = \Omega D^n \Omega^{-1}$ آنگاه رابطه بالا به شکل زیر درمی آید:

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Omega D^n \Omega^{-1} = \Omega \sum_{n=0}^{\infty} f_n D^n \Omega^{-1} = \Omega f(D) \Omega^{-1}, \tag{111}$$

که درآن

$$f(D) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n D^n. \tag{112}$$

دقت کنید که ماتریس $f(D)$ براحتی محاسبه می شود. فرض کنید که T یک ماتریس N بعدی با مقادیر ویژهٔ $\lambda_1, \cdots \lambda_N$ باشد. دراین صورت

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ & & & & \lambda_N \end{pmatrix} \tag{113}$$

و با توجه به تعریف 112

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & & \\ & f(\lambda_2) & & & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ & & & & f(\lambda_N) \end{pmatrix}. \tag{114}$$

رابطه 111 درواقع تعریف کلی تری از تابع یک عملگر بدست می دهد که برای وقتی که تابع بسط تایلور نیز ندارد بکار می رود. این تعریف عبارت است از:

$$f(T) := \Omega f(D) \Omega^{-1}. \tag{115}$$

مثال: هرگاه $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ باشد، $\sqrt{\sigma_x}$ را پیدا کنید.

حل: پس از قطری کردن σ_x می فهمیم که

$$\sigma_x = H \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} H^{\dagger} \tag{116}$$

که درآن ماتریس قطری کننده برابراست با

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{117}$$

دراین جا ماتریس قطری شده یعنی D دارای ۴ تا ریشه‌ی دوم متفاوت است. یکی از آنها مثلاً $\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ را در نظر می گیریم و بدست می آوریم

$$\sqrt{\sigma_x} = H\sqrt{D}H^{\dagger} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}. \tag{118}$$

مثال: با همین شیوه می توان نشان داد که اگر A یک عملگر نرمال باشد با خاصیتِ $A^2 = I$، آنگاه

$$e^{i\theta A} = \cos\theta + iA\sin\theta. \tag{119}$$

برای اثبات این رابطه کافی است به این نکته توجه کنیم که ویژه مقدارهای A برابرند با ± 1. اگر یک ویژه مقدار را با λ نشان دهیم براحتی معلوم می شود که

$$e^{i\theta\lambda} = \cos\theta + i\lambda\sin\theta. \tag{120}$$

هرگاه ماتریس قطری شده را با D نشان دهیم از این رابطه بدست می آوریم

$$e^{i\theta D} = \cos\theta + iD\sin\theta. \tag{121}$$

که در نتیجه رابطه‌ی 119 اثبات می شود.

۱۳ جمع مستقیم دو فضا

تعریف : فرض کنید که V و W دوفضای به ترتیب m بعدی و n بعدی باشند جمع مستقیم این دوفضا به شکل زیر تعریف می شود

$$V \oplus W := \{\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, |\, v \in V, \quad w \in W\}. \tag{122}$$

جمع دوبرداروضرب یک برداردریک اسکالر به شکل زیرتعریف می شود:

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v+v' \\ w+w' \end{pmatrix},$$
$$\alpha \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v \\ \alpha w \end{pmatrix}. \tag{123}$$

خواننده براحتی می تواند تحقیق کند که $V\oplus W$ با جمع و ضرب تعریف شده دربالا واقعاً یک فضای برداری است. فرض کنید که $\{e_i\}_{i=1,\cdots m}$ یک پایه برای V و $\{f_j\}_{j=1,\cdots n}$ پایه‌ای برای W باشد. دراین صورت

$$\{\begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f_j \end{pmatrix}\}_{i=1,\cdots m}, j=1,\cdots n \tag{124}$$

یک پایه برای $V\oplus W$ است. اثبات این امر به عهده خواننده‌است . به این ترتیب معلوم می شود که فضای برداری $V\oplus W$ دارای بعد $m+n$ است. دقت کنید که فضای $V\oplus W$ دارای دو زیر فضا به شکل زیراست:

$$\{\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, |\, v\in V\}, \qquad \{\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}, |\, w\in W\}, \tag{125}$$

این دو زیر فضا به ترتیب از چپ به راست با فضاهای V و W یکسان هستند. با توجه به این یکسانی و هم چنین با توجه به این که می توانیم بنویسیم

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} \tag{126}$$

می توانیم بگوییم که هر بردار از فضای $V\oplus W$ مجموعی از بردارهای فضای V و W است. دقت کنید که مجموعه بردارهای از نوعِ $\{\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}\}$ و مجموعه‌ی بردارهای $\{\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}\}$ هیچ اشتراکی ندارند.

هرگاه فضای V مجهز به ضرب داخلی $\langle,\rangle_V$ و فضای W مجهز به ضرب داخلی $\langle,\rangle_W$ باشند، می توان فضای برداری $V\oplus W$ را به یک ضرب داخلی مجهز کرد:

$$\langle\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix}\rangle = \langle v, v'\rangle_V + \langle w, w'\rangle_W. \tag{127}$$

اثبات این که این رابطه واقعاً یک ضرب داخلی را تعریف می کند به عهده خواننده است.

مثال: خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که $R^3 = R^2\oplus R$، یا بطور کلی $R^{m+n} = R^m\oplus R^n$.

حال دسته ای ازتبدیلات خطی روی $V\oplus W$ وجود دارند که به شکل زیرهستند:

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}. \tag{128}$$

این نوع تبدیلات خطی درواقع روی فضای V مثل تبدیل خطی A وروی فضای W مثل تبدیل خطی B عمل می کنند. به همین جهت بهتراست که آنهارا با $A \oplus B$ نشان دهیم. رابطه (128) نشان می دهد که اگر برای فضای برداری V و W پایه انتخاب کنیم و تبدیلات روی آنهارا با ماتریس نشان دهیم، ماتریس تبدیل T بصورت بلوکه قطری درخواهد آمد. البته همه تبدیلات روی فضای $V \oplus W$ به صورت (128) نیستند.

۱۴ ضرب تانسوری فضاهای برداری

تعریف دقیق ضرب تانسوری فضاها، طوری که دارای استحکام ریاضی باشد برای منظور ما که کاربرد آن در مکانیک کوانتومی است، ممکن است که چندان مفید نباشد. ارایه این تعریف دقیق ممکن است ما را از فهم شهودی این مفهوم دور کند و هم چنین باعث شود که در کاربردهای محاسباتی آن ناتوان شویم. به جای این کار ما سعی می کنیم که تعریفی از این مفهوم ارائه کنیم که توانایی ما را برای کار با ضرب تانسوری فضاها گسترش دهد. نخست به تعریف ضرب تانسوری دو ماتریس دلخواه می پردازیم.

تعریف: هرگاه $(A)_{m\times n}$ و $(B)_{p\times q}$ دو ماتریس با ابعاد داده شده باشند می توان ضرب تانسوری آنهارا که ماتریسی با ابعاد $(mp \times nq)$ است به شکل زیرتعریف کرد:

$$(A\otimes B)_{ij,kl} := A_{ik}B_{jl} \tag{129}$$

به لحاظ عملی ضرب این دو ماتریس به شکل زیر انجام می شود:

$$A\otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdot & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdot & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdot & a_{mn}B \end{pmatrix} \tag{130}$$

درماتریس فوق نحوه شمارش سطرها به ترتیب زیراست:

$$\{11, 12, 13, \cdots 1p, 21, 22, 23, \cdots 2p, \cdots m1, m2, m3, \cdots mp\}, \tag{131}$$

و نحوه شمارش ستون ها نیز به شکل زیراست:

$$\{11, 12, 13, \cdots 1q, 21, 22, 23, \cdots 2q, \cdots n1, n2, n3, \cdots nq\}. \tag{132}$$

این ضرب دارای خواص زیراست که خواننده می تواند با استفاده از تعریفِ (129) صحت آنها را تحقیق کند:

$$A\otimes (B+C) \;\; = \;\; A\otimes B + A\otimes C$$

$$\begin{aligned} A\otimes(\alpha B) &= (\alpha A)\otimes B=\alpha(A\otimes B)\\ (A\otimes B)\otimes C &= A\otimes(B\otimes C)\\ (A\otimes B)(C\otimes D) &= AC\otimes BD\\ (A\otimes B)^\dagger &= A^\dagger\otimes B^\dagger \end{aligned} \tag{133}$$

نکته‌ی مهم این است که دراین نوع ضرب، هیچ نوع محدودیتی روی ابعاد ماتریس ها وجود ندارد و هردو نوع ماتریسی را می توان در هم ضرب کرد. بنابراین می توان دو بردار Ket مثل $|v\rangle$ و $|w\rangle$ را در هم ضرب کرد و بردار جدیدی که آن را با $|v,w\rangle$ نشان می دهیم بدست آورد:

$$|v,w\rangle := |v\rangle\otimes|w\rangle. \tag{134}$$

هم چنین می توان دو بردار bra مثل $\langle x|$ و $\langle y|$ را نیز در هم ضرب کرد و یک بردار برای جدید بدست آورد که آن را با $\langle x,y|$ نشان می دهیم:

$$\langle x,y| = \langle x|\otimes\langle y|. \tag{135}$$

با استفاده از رابطه‌ی سوم در 133 بدست می آوریم:

$$\langle x,y|v,w\rangle = (\langle x|\otimes\langle y|)(|v\rangle\otimes|w\rangle) = \langle x|v\rangle\langle y|w\rangle. \tag{136}$$

حال برای فضای برداری V یک پایه با بردارهای $\{|i\rangle,\ i=1,\cdots m\}$ و برای فضای برداری W یک پایه با بردارهای پایه $\{|j\rangle, j=1\cdot n\}$ درنظر می گیریم. به این ترتیب ما کاری کرده ایم که V با C^m و فضای W نیز با C^n یکسان باشند. می توان ضرب تانسوری بردارهای پایه را مطابق با تعریف بالا بدست آوریم. به این ترتیب mn بردار پایه به شکل $|i\rangle\otimes|j\rangle$ بدست می آوریم که آنها را به اختصار با $|i,j\rangle$ نمایش می دهیم:

$$|i,j\rangle := |i\rangle\otimes|j\rangle \qquad i=1\cdots m,\ j=1\cdots n. \tag{137}$$

با توجه به رابطه‌ی 136 این بردارهای متعامد و یکه هستند.

مثال: هرگاه V یک فضای برداری با پایه

$$\{|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$$

باشد آنگاه $V\otimes V$ یک فضای برداری ۴ بعدی با پایه های زیراست:

$$|0,0\rangle := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad |0,1\rangle := \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad |1,0\rangle := \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad |1,1\rangle := \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{138}$$

حال فضای $V \otimes W$ را فضایی تعریف می کنیم که از ترکیب خطی تمام این نوع بردار ها با ضرایب مختلط تشکیل شده باشد، یعنی

$$V \otimes W = \{\sum_{i,j} z_{ij}|i,j\rangle, \quad | \quad z_{ij} \in C\}. \tag{139}$$

بنابرتعریف بردارهای $\{|i,j\rangle\}$ یک پایه برای این فضا تشکیل می دهند و این به این معناست که بعد فضای $V \otimes W$ برابراست با mn. بازهم با استفاده از روابطِ 133 براحتی معلوم می شود که

$$|v,w\rangle = |v\rangle \otimes |w\rangle = (\sum_i v_i|i\rangle) \otimes (\sum_j w_j|j\rangle) = \sum_{i,j} v_i w_j|i,j\rangle. \tag{140}$$

دقت کنید که یک بردار دلخواه در فضای $V \otimes W$ را الزاما نمی توان به صورت $|v\rangle \otimes |w\rangle$ نوشت مثل بردار زیر

$$|\psi\rangle := |0,0\rangle + |1,1\rangle, \tag{141}$$

زیرا هرگاه آن را مساوی $(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$ قرار دهیم معلوم می شود که هیچ جوابی برای ضرایبِ a, b, c و d وجود ندارد. چنین بردارهایی را درهم تنیده [14] می گوییم.

بعد از ضرب تانسوری بردارها می توانیم ضرب تانسوری عملگر ها را نیز تعریف کنیم. هرگاه $\hat{A} : V \longrightarrow V$ و $\hat{B} : W \longrightarrow W$ دو عملگر باشند، عملگرِ $\hat{A} \otimes B : V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$ را به عنوان عملگری تعریف می کنیم که ماتریس آن ضرب تانسوری ماتریس های مربوط به $\hat{A}$ و $\hat{B}$ باشد. به عبارت دیگر

$$\langle i,j|\hat{A} \otimes \hat{B}|k,l\rangle = \langle i|\hat{A}|k\rangle\langle j|\hat{B}|l\rangle. \tag{142}$$

به این ترتیب وقتی که علمگر$\hat{A} \otimes \hat{B}$ روی بردار $|v\rangle \otimes |w\rangle$ اثر می کند، بعد از کمی محاسبه خواهیم داشت:

$$(\hat{A} \otimes \hat{B})(|v\rangle \otimes |w\rangle) = (\hat{A}|v\rangle) \otimes (\hat{B}|w\rangle). \tag{143}$$

بحث ما در باره‌ی ضرب تانسوری دو فضای برداری دراینجا به پایان می رسد. همانطور که در ابتدا گفتیم معرفی ما از این مفهوم به چند دلیل فاقد استحکام ریاضی بود. نخست آنکه هردو فضا را محدود بعد گرفتیم. دوم آنکه از همان ابتدا یک پایه برای هر دو فضا معرفی کردیم و به این ترتیب هردو فضا را در آن پایه خاص به فضای بردارهای مختلط یعنی C^m و C^n تقلیل دادیم. به این ترتیب همه چیز را از تعریف ضرب تانسوری دو ماتریس با بعد دلخواه 129 آغاز کردیم. و پیش رفتیم. دراین

[14] Entangled States

چارچوب ممکن است کسی بپرسد که چگونه ضرب تانسوری دو فضای برداری مثل $C^m \otimes M_{p,q}(C)$ که بردارهای اولین فضا بردار های m بعدی مختلط و بردار های دومین فضا به صورت ماتریس ها هستند را انجام می دهیم؟ پاسخ این است که وقتی برای دومین فضا نیز یک پایه انتخاب کنیم آنگاه هر ماتریس به صورت یک بردار مختلطِ pq بعدی درخواهد آمد و ما می توانیم از تعاریف ارائه شده در بالا استفاده کنیم. هم چنین اگر کسی بپرسد که چگونه ضرب تانسوری دو فضا مثل $C[a,b] \otimes C^n$ که بردارهای اولی تابع و بردارهای دومی n تایی های مرتب هستند را انجام می دهیم بازهم می گوییم که گسسته کردن فاصله‌ی $[a,b]$ می توان هر تابع $f \in C[a,b]$ را به صورت یک N تایی مرتب در نظر گرفت که در آن N یک عدد بسیار بزرگ است و بازهم مسئله به ضرب دو بردار مختلط چند بعدی تقلیل پیدا می کند. علاوه به این مشکلات مفهومی که به این روش نه چندان دلچسب رفع و رجوع می شوند این اشکال نیز وجود دارد که باید نشان دهیم وقتی که پایه‌ی دو فضای برداری را عوض می کنیم موجوداتی که تعریف کرده‌ایم مثل ضرب دو بردار یا ضرب دو عملگر تغییر نمی کنند. می بینیم که روش بکاررفته برای تعریف ضرب تانسوری دو فضا اگر چه سرراست و ساده‌است ولی از مشکلات مفهومی رنج می برد. خواننده‌ای که مایل است از این رنج رهایی یابد می تواند به یک کتاب درسی در زمینه جبرخطی مراجعه کند. شاید هم در ویراست های آینده این درسنامه تعریف دقیق به صورت یک ضمیمه آورده شود.

۱۵ تابع دلتای دیراک

یکی از مهمترین ابداعات فرعی دیراک معرفی تابعی بود که اکنون به نام خود او تابع دلتای دیراک نامیده می شود. درنگاه اول می توان گفت که تابع دلتای دیر اک در همه نقاط محور حقیقی برابر صفر است بجز در یک نقطه که مقدار آن بی نهایت است. بر خلاف نام اش، تابع دلتا یک تابع نیست بلکه می توان آن را به صورت حدّ یک دنباله از توابع پیوسته در نظر گرفت.

تابع پیوسته زیر را درنظرمی گیریم که درآن $0 < \epsilon << 1$.

$$\delta_\epsilon(x) := \begin{cases} 0 & x \leq -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} & -\epsilon \leq x \leq \epsilon \\ 0 & \epsilon \leq x \end{cases} \tag{144}$$

این تابع دارای خاصیت های زیراست:

الف:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x)dx = 1, \tag{145}$$

ب: برای هرتابعی که درفاصله $(-\epsilon,\epsilon)$ متناهی باشد،

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\epsilon(x)f(x)=f(0)+O(\epsilon) \tag{146}$$

که درآن $O(\epsilon)$ کمیتی از مرتبه ϵ است.

حد تابع $\delta_\epsilon(x)$ را وقتی که $\epsilon\longrightarrow 0$ با تابع $\delta(x)$ نشان می دهیم وقرارمی دهیم

$$\delta(x):=\lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\delta_\epsilon(x). \tag{147}$$

و آن را تابع دلتای دیراک می نامیم. به خودی خود $\delta(x)$ یک تابع نیست بلکه می توان به آن به عنوان یک عملگر نگاه کرد که تنها درزیر یک انتگرال معنادارد.

درنتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)=f(0). \tag{148}$$

می توان تابع $\delta(x-b)$ را به طور مشابه تعریف کرد. این تابع دارای خاصیت های زیراست:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-b)dx=1,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-b)f(x)dx=f(b), \tag{149}$$

تابع دلتای دیراک را می توان به عنوان حد دنباله های دیگری ازتوابع نیز گرفت. درزیر چند تااز این دنباله هارا معرفی می کنیم.

دنباله اول : قرارمی دهیم

$$g_\sigma(x):=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \tag{150}$$

که نشان دهندهٔ تابعی گاووسی باپهنای σ وماکزیمم $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ درنقطه $x=0$ است. سطح زیرمنحنی آن نیز برابر است با۱.

دراینجا داریم

$$\delta(x):=\lim_{\sigma\longrightarrow 0}g_\sigma(x). \tag{151}$$

دنباله دوم: قرارمی دهیم

$$\delta_T(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} e^{ix}dt = \frac{\sin Tx}{\pi x}. \tag{152}$$

داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_T(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} D_T(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y}dy = 1. \tag{153}$$

برای این دنباله داریم

$$\delta(x) := \lim_{T\longrightarrow\infty} D_T(x). \tag{154}$$

وازآنجا به رابطه بسیارمهم زیرمی رسیم:

$$\delta(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}dt. \tag{155}$$

بعضی دیگرازخواص تابع دلتا به شرح زیرهستند:

$$\begin{aligned}&\delta(x-x') = \delta(x'-x)\\ &\int \delta'(x-x')f(x')dx' = -\frac{df}{dx}(x).\end{aligned} \tag{156}$$

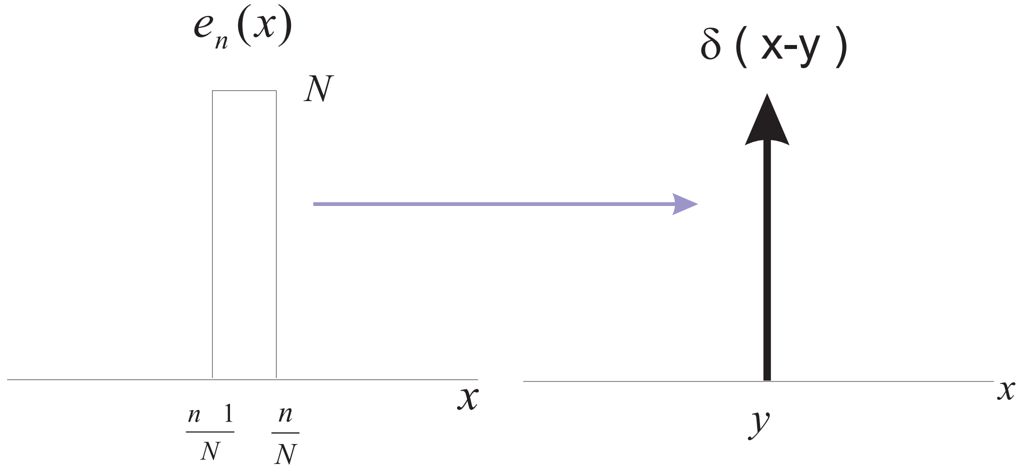
۱.۱۵ توابع دلتا به عنوان پایه ای برای فضای توابع

دراین قسمت می خواهیم نشان دهیم که توابع دلتارامی توان به عنوان یک پایه برای فضای توابع درنظرگرفت. فضای توابع $F[0,1]$ را درنظر می گیریم. هیچ نوع فرض بخصوصی درباره این توابع نظیرپیوستگی یا مشتق پذیری نمی کنیم. این فضایک فضای بی نهایت بعدی است. حال به ازای هر عدد بزرگ N برای این فضا یک پایه درنظرمی گیریم که باتقریب خوبی می تواند فضای توابع را جاروب کند. سپس حد $N\longrightarrow\infty$ را درنظرمی گیریم که درآن توابع فضا با دقت توسط پایه تعریف شده نمایش داده می شوند. فاصله $[0,1]$ رابه N قسمت تقسیم می کنیم. به این ترتیب داریم

$$[0,1] = \Delta_1\cup\Delta_2\cup\cdots\Delta_N \tag{157}$$

که درآن

$$\Delta_n := [\frac{n-1}{N},\frac{n}{N}] \tag{158}$$



شکل ۳: درحد $N \longrightarrow \infty$، شاخص گسسته $\frac{n}{N}$ به سمت شاخص پیوسته y و تابع $e_n(x)$ به تابع $\delta(x-y)$ میل می کند.

توابع زیر را تعریف می کنیم:

$$e_n(x) := \{ \begin{array}{ll} N & x \in \Delta_n \\ 0 & x \notin \Delta_n \end{array} \tag{159}$$

سطح زیراین توابع مساوی بایک است. این توابع بریکدیگرعمودند اما بهنجارنیستند:

$$\langle e_n, e_m \rangle \equiv \int_0^1 e_n^*(x) e_m(x) dx = N\delta_{m,n}. \tag{160}$$

هم چنین این خاصیت رادارند که به ازای هرتابع $f \in F[0,1]$ داریم :

$$\langle e_n, f \rangle \equiv \int_0^1 e_n^*(x) f(x) dx = N \int_{x\in\Delta_n} f(x) dx =: N(\frac{1}{N} f(x_n)) = f(x_n), \tag{161}$$

که درآن $x_n \in \Delta_n$ نقطه ای درون Δ_n است که باتقریب خوبی نشان دهنده مقدارتابع در ناحیه Δ_n است، به عبارت دیگر:

$$f(x_n) := \frac{\int_{x\in\Delta_n} f(x) dx}{\frac{1}{N}} \tag{162}$$

حال N را به سمت بی نهایت میل می دهیم. دراین حالت اندیس n نیز جای خود را به یک اندیس پیوسته مثل $y := \frac{n}{N}$ می دهد. تابع $e_n(x)$ نیز مطابق با نمایشی که قبلاً درمورد توابع دیراک دیدیم به تابع دلتای دیراک یعنی $\delta(x-y)$ میل می کند، شکل (۳)

نحوه تبدیل کمیت ها درحد $N \longrightarrow \infty$ به شکل زیراست.

$$\begin{array}{rcl} \frac{n}{N} & \longrightarrow & y \\ e_n(x) & \longrightarrow & \delta(x-y) \\ |e_n\rangle & \longrightarrow & |y\rangle \\ \langle x|e_n\rangle & \longrightarrow & \langle x|y\rangle \\ \langle e_n|e_m\rangle = \delta_{n,m} & \longrightarrow & \langle y|y'\rangle = \delta(y-y'). \end{array} \tag{163}$$

تابع e_n را دراین حالت به صورت برداری $\langle y|$ نشان می دهیم که نمایش برای آن به صورت $|y\rangle$ است. رابطه (161) به شکل زیردرمی آید.

$$\langle y|f\rangle = \int_0^1 \delta(y-x)f(x)dx = f(y), \tag{164}$$

هرگاه‌دراین حدّ $N\delta_{m,n}$ را به عنوان تابع $K(y,y')$ نشان دهیم که درآن $y=\frac{n}{N}$ و $y'=\frac{m}{N}$ هستند، از تساوی

$$\sum_n N\delta_{m,n}\frac{1}{N} = 1 \tag{165}$$

نتیجه می گیریم که

$$\int K(y,y')dy' = \lim_{N\longrightarrow\infty}\sum_m N\delta_{m,n}\frac{\Delta y}{\Delta m} = \sum_m N\delta_{m,n}\frac{1}{N} = 1. \tag{166}$$

بنابراین $K(y,y')$ همان تابع دلتای دیراک است ورابطه (160) را می بایست به صورت زیرنوشت:

$$\langle y|y'\rangle = \delta(y-y'). \tag{167}$$

یا

$$\int_0^1 dx\delta(x-y)\delta(x-y')dx = \delta(y-y'). \tag{168}$$

آنچه که می خواهیم درپایان این بخش روی آن تاکید کنیم آن است که یک تابع $f\in F[0,1]$ را به صورت یک بردارکت $|f\rangle$ یا بِرای $|f\rangle$ نمایش می دهیم. مقداراین تابع یعنی $f(x)$ تصویرآن روی بردارپایه $|x\rangle$ است ، یعنی

$$f(x)=\langle x|f\rangle. \tag{169}$$

رابطه (168) نیز به شکل زیردرمی آید:

$$\int_0^1 \langle y|x\rangle\langle x|y'\rangle dx=\langle y|y'\rangle, \tag{170}$$

ویابابرداشتن $\langle y|$ و $|y'\rangle$ ازدوطرف

$$\int_0^1 |x\rangle\langle x|dx=I, \tag{171}$$

که درآن I عملگرهمانی است.
باید تاکید کنیم که تنهابرای سادگی فاصله $[0,1]$ رادرنظرگرفتیم. این پایه برای فضای توابع $F[a,b]$ ویا $F(-\infty,\infty)$ نیز برقراراست. هم چنین براحتی این روابط به بیشترازیک بعد نیز تعمیم می یابند.

۱۶ تبدیل فوریه

فضای توابع مختلط درفاصله $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$ رادرنظرمی گیریم. این فضارا با $C[\frac{-L}{2},\frac{L}{2}]$ نشان می دهیم. ضرب داخلی روی این فضا به شکل $\langle f,g\rangle=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)g^*(x)dx$ تعریف شده است. توابع

$$e_n(x):=\frac{1}{\sqrt{L}}e^{\frac{2\pi inx}{L}},\quad n\in Z \tag{172}$$

را درنظرمی گیریم. این توابع بریکدیگر عمود بوده ونرم همه آنهابرابرباواحداست:

$$\langle e_n,e_m\rangle=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e_n^*(x)e_n(x)dx=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{\frac{-2\pi inx}{L}}e^{\frac{2\pi imx}{L}}dx=\delta_{n,m}. \tag{173}$$

علاوه براین، هرتابع دلخواه را می توان برحسب این توابع بسط داد:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x). \tag{174}$$

ضرایب f_n را می توان به ترتیب زیربدست آورد:

$$f_n = \langle e_n, f\rangle = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e_n^*(x) f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} f(x) dx. \tag{175}$$

بنابراین مجموعه توابع $\{e_n\}$ تشکیل یک پایه برای این فضا می دهند. باجایگزینی (175) در رابطه (174) بدست می آوریم

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e_n^*(y) f(y) dy e_n(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (\sum_{-\infty}^{\infty} e_n(y)^* e_n(x)) f(y) dy \tag{176}$$

مقایسه ای بارابطه (156) نشان می دهد که

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(y)^* e_n(x) = \delta(x-y). \tag{177}$$

این رابطه را رابطه کامل بودن پایه های $\{e_n\}$ می گوییم.

حال L را به سمت بی نهایت میل می دهیم. دراین حالت توابع $e_n(x)$ بخاطر عامل $\frac{2\pi i n}{L}$ بسیاربه هم نزدیک می شوند و درنتیجه بهتراست که آنهارا بایک شاخص پیوسته یعنی $k := \frac{2\pi n}{L}$ مشخص کنیم. علاوه برآن اگربه همین شکل دراین توابع حدِ $L \longrightarrow \infty$ رااعمال کنیم، به خاطر عامل $\frac{1}{\sqrt{L}}$ این توابع همگی صفرخواهند شد. بنابراین می بایستی توابع پایه جدیدرا ضمن جایگزینی شاخص گسستهٔ $\frac{2\pi n}{L}$ با شاخص پیوسته k درتوابع اولیه درضریب مشخصی نیز ضرب کنیم. توابع جدید را با $\hat{e}_k(x)$ نشان می دهیم وقرارمی دهیم

$$\hat{e}_k(x) := A e_n(x) \qquad k := \frac{2\pi n}{L} \tag{178}$$

که درآن ضریب A می بایست تعیین شود. بهترین راه برای این کارتوجه به کامل بودن پایه یعنی رابطه (177) است. این رابطه را به صورت زیرمی توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(y)^* e_n(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_n(y)^* e_n(x) \frac{\Delta n}{\Delta k} \Delta k \\ = \quad & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{C^2} \hat{e}_k(y)^* \hat{e}_k(x) \frac{L}{2\pi} \Delta k = \delta(x-y). \end{aligned} \tag{179}$$

این رابطه به مامی گوید که می بایست C را برابر با $\sqrt{\frac{L}{2\pi}}$ بگیریم. بااین جایگزینی خواهیم داشت:

$$\hat{e}_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx} \tag{180}$$

ورابطه (179) به شکل زیردرمی آید:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{e}_k^*(x)\hat{e}_k(y)dk \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ik(x-y)}dk = \delta(x-y). \tag{181}$$

بااین جایگزینی روابط قبلی یک به یک تغییرمی کنند. نخست به رابطه (174) نگاه می کنیم: ازآنجا که شاخص n جای خود را به یک شاخص پیوسته $k = \frac{2\pi n}{L}$ داده است این رابطه به صورت زیردرمی آید:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x)\frac{\Delta n}{\Delta k}\Delta k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_n e_n(x)\frac{L}{2\pi}\Delta k = \int_{-\infty}^{\infty} dk\hat{f}(k)\hat{e}_k(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\hat{f}(k)dk. \end{aligned} \tag{182}$$

که درآن $\hat{f}(k) := \sqrt{\frac{L}{2\pi}}f_n$. ازرابطه بالا می توانیم باتوجه به رابطه (175)، $\hat{f}(k)$ را برحسب $f(x)$ بدست آورد:

$$\hat{f}(k) \equiv \sqrt{\frac{L}{2\pi}}f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}f(x)dx. \tag{183}$$

جفت روابطِ

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\hat{f}(k)dk \\ \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}f(x)dx. \end{aligned} \tag{184}$$

رایک تبدیل فوریه درفضای توابع یک متغیره می گویند. این روابط به صورت زیر به فضای n بعدی تعمیم می یابند.

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\cdot x}\hat{f}(k)d^nk \\ \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\cdot x}f(x)d^nx. \end{aligned} \tag{185}$$

دراین جا مبانی ریاضی لازم برای درک ساختار مکانیک کوانتومی به پایان می رسد. در ضمیمه هایی که در صفحات بعد آمده‌اند، خواننده بعضی مطالب اختیاری را خواهد آموخت.

۱۷ ضمیمه: یک قضیه در مورد توابع عملگرهای بهنجار

در متن درس دیدیم که چگونه می توان یک تابع از یک عملگر نرمال را تعریف کرد. دراین ضمیمه یک قضیه خیلی جالب در مورد توابع این نوع عملگرها ثابت می کنیم که در وهله اول دور از ذهن به نظر می رسد.

قضیه: اگر T یک عملگربهنجارباشد تابع $f(T)$ همواره یک چند جمله ای خواهد بود. (دور از ذهن بودن این قضیه از اینجا معلوم می شود که مثلاً تابع $f(T)=\sin(T)$ یک چند جمله ای برحسب T است و نه آنطور که در مورد اعداد می دانیم یک سری بی نهایت.)

اثبات: چون T بهنجاراست داریم

$$T=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i P_i, \tag{186}$$

وازآنجا

$$f(T)=\sum_{i=1}^{k}f(\lambda_i)P_i. \tag{187}$$

حال می توانیم عملگرهای تصویرگر P_i را برحسب T و توان های آن بنویسیم. فرض کنید که $P_j=g_j(T)$ که درآن $g_j(x)$ تابعی است که می خواهیم فرم آن را پیدا کنیم. . دراین صورت خواهیم داشت

$$P_j:=g_j(T)=g_j(\sum_i\lambda_iP_i)=\sum_i g_j(\lambda_i)P_i \tag{188}$$

که ازآن نتیجه می گیریم $g_j(\lambda_i)=\delta_{ij}$. بنابراین هرتابع $g_j(x)$ می بایست چنان باشد که‌به ازای $x=\lambda_j$ مقدارآن برابربا ۱ و به ازای $x\neq\lambda_j$ مقدارآن برابرباصفرباشد. چنین تابعی فرم زیررادارد:

$$g_j(x)=\prod_{k\neq j}\frac{x-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k} \tag{189}$$

درنتیجه

$$P_j\equiv g_j(T)=\prod_{k\neq j}\frac{T-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k}. \tag{190}$$

این رابطه نشان می دهد که هرعملگرتصویرگر چیزی نیست جزیک چندجمله ای برحسب T ودرنتیجه تابع $f(T)$ نیز چیزی جزیک چند جمله ای برحسب T نخواهد بود. به عبارت بهتر می توانیم بنویسیم

$$f(T)=\sum_{i=1}^{k}f(\lambda_i)\prod_{k\neq i}\frac{T-\lambda_k}{\lambda_i-\lambda_k}. \tag{191}$$

۱۸ مسئله ها

۱ – یک عملگر بهنجار مثل T درنظرمی گیریم. این عملگردارای این خاصیت است که $T^2 = I$. نشان دهید که

$$e^{\alpha T} = \cosh\alpha I + \sinh\alpha T. \tag{192}$$

۲ – عملگر $T : R^2 \longrightarrow R^2$ را درنظربگیرید که مطابق بارابطه زیرتعریف می شود:

$$T(x, y) = (-y, x)e \tag{193}$$

نشان دهید که

$$e^{\alpha T} = \sin\alpha T + \cos\alpha I. \tag{194}$$

اثر $e^{\alpha T}$ را بر نقطه (x, y) حساب کنید.

۳ – S عملگربهنجاری است که در رابطه $S^3 = I$ صدق می کند. عملگر $e^{i\alpha S}$ زیررا به صورت ترکیبی خطی از عملگرهای I، S و S^2 بنویسید.

۴ – فرض کنید که A و B دوعملگر بهنجار باشند. تابع

$$f(\lambda) := e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} \tag{195}$$

را درنظرمی گیریم. حال می توانیم این تابع را به عنوان یک تابع تحلیلی حول $\lambda = 0$ بسط دهیم وبنویسیم

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n. \tag{196}$$

الف: بامحاسبه مشتقات متوالیِ $f(\lambda)$ طرف راست را برحسب B و تعویضگرهای متوالی $[A, B]$ ، $[A, [A, B]]$ ، $[A, [A, [A, B]]]$ و $\cdots$ بنویسید.

ب: هرگاه داشته باشیم $[A, B] = \alpha I$ عبارت $e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$ را حساب کنید.

۵ – ماتریس های پاوولی رابه ترتیب زیر در نظر بگیرید:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{197}$$

اگر $\mathbf{n} := (n_x, n_y, n_z)$ یک بردار یکه باشد عبارتِ $\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma}$ برابراست با $\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z$.

الف : اتحاد های زیر را ثابت کنید:

$$\begin{aligned} \sigma_k\sigma_l &= \delta_{kl} + i\epsilon_{klm}\sigma_m \\ (n\cdot\vec{\sigma})(m\cdot\vec{\sigma}) &= m\cdot n\, I + i(m\times n)\cdot\vec{\sigma} \\ (n\cdot\vec{\sigma})(n\cdot\vec{\sigma}) &= I. \end{aligned} \tag{198}$$

ب: ویژه مقدارها و ویژه بردارهای عملگرهای پاوولی را پیدا کنید.

ج: ویژه بردارها و ویژه بردارهای عملگر $\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma}$ را حساب کنید.

٦ — دریک فضای n بعدی که بابردارهای پایه $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \cdots |n-1\rangle$ تعریف می شود عملگرهای زیرتعریف شده اند:

$$\begin{array}{llll} S|0\rangle = |1\rangle, & S|1\rangle = |2\rangle, & \cdots & S|n-1\rangle = |0\rangle \\ T|0\rangle = |0\rangle, & T|1\rangle = \xi|1\rangle, & \cdots & T|n-1\rangle = \xi^{n-1}|2\rangle \end{array} \tag{199}$$

که درآن ξ ریشه n امِ یک است یعنی $\xi^n = 1$.

الف: رابطه جابجایی زیرراحساب کنید:

$$[S, T] \tag{200}$$

ب: طرف راست عبارت زیرراحساب کنید:

$$e^{i\alpha S}Te^{-i\alpha S} \tag{201}$$

ج: اثر $e^{\frac{2\pi i}{n}S}$ روی یک حالت $|k\rangle$ چه حالتی است.

د: ویژه مقادیر و ویژه بردارهای عملگر S را حساب کنید.

ه: هرگاه تعریف کنیم $H = S + S^{-1} - 2$، ویژه مقادیر و ویژه بردارهای عملگر H را بدست آورید.

۷ − عملگرهای A و B دررابطه $[A,B]=I$ صدق می کنند. طرف راست عبارت های زیرراحساب کنید:

$$e^{\alpha A}Be^{-\alpha A}$$
$$e^{\alpha A}e^{\beta B}e^{-\alpha A}. \tag{202}$$

۸ − نشان دهید که برای هرعملگر A رابطه زیر که درآن ϵ پارامتربی نهایت کوچکی است، تامرتبه اول از ϵ برقراراست:

$$det(I+\epsilon A)=1+\epsilon Tr(A) \tag{203}$$

حال نشان دهید که

$$det(e^A)=e^{Tr(A)}. \tag{204}$$

۹ − ماتریس $A=\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ رادرنظربگیرید.

الف: به ازای چه مقادیری از a این ماتریس یک ماتریس مثبت است؟

ب: به ازای آن مقادیر ماتریس $\sqrt{A}$ را بدست آورید.

ج: ماتریس $\sqrt{A}$ را برحسب ماتریس های I و A بنویسید.

۱۰− هرگاه B یک عملگرباشد

الف: ثابت کنید که عملگر $BB^\dagger$ همواره مثبت است.

ب : ماتریس زیر را درنظربگیرید:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{205}$$

ماتریس $\sqrt{B}$ راحساب کنید .

ج: ماتریس $\sqrt{B}$ را برحسب توان های صحیح B بنویسید.

۱۱ − عملگرهای زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\sum_{n=0}^{N}\sqrt{n+1}|n\rangle\langle n+1|, \qquad A^\dagger=\sum_{n=0}^{N}\sqrt{n+1}|n+1\rangle\langle n|. \tag{206}$$

الف: جابجاگر این دو عملگر را حساب کنید.

ب: ردّ دو طرف تساوی ِ$[A, A^\dagger]$ و نشان دهید که ردّ هر دو طرف مساوی صفراست.

ج: حال فرض کنید که $N \longrightarrow \infty$ و نشان دهید که $[A, A^\dagger] = I$. دراین حالت رد دو طرف را حساب کنید.