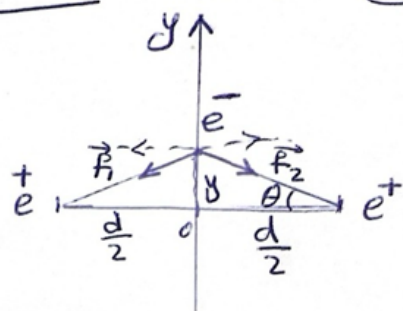


الف ① پاسخ سوال



با توجه به تقارن شکل مؤلفه‌های افقی نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ حذف می‌شوند و صرفاً مؤلفه عمودی نیروها در جهت $\hat{y}$ باقی می‌ماند.

$$\vec{F} = \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(\frac{d^2}{4} + y^2)} \sin\theta (-\hat{y}) \quad (۱ نمره)$$

$$\sin\theta = \frac{y}{(\frac{d^2}{4} + y^2)^{1/2}} \Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^2 y}{(\frac{d^2}{4} + y^2)^{3/2}} (-\hat{y})$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^2 y}{\frac{d^3}{8} (1 + (\frac{2y}{d})^2)^{3/2}} (-\hat{y}) \quad (۱ نمره) \quad (ب)$$

$$y \ll d \Rightarrow |F| \simeq \frac{8e^2 y}{2\pi\epsilon_0 d^3} = \frac{4e^2}{\pi\epsilon_0 d^3} y \quad (۱ نمره)$$

نیروی تناسب با فاصله (نوسانه‌گر هارمونیک)

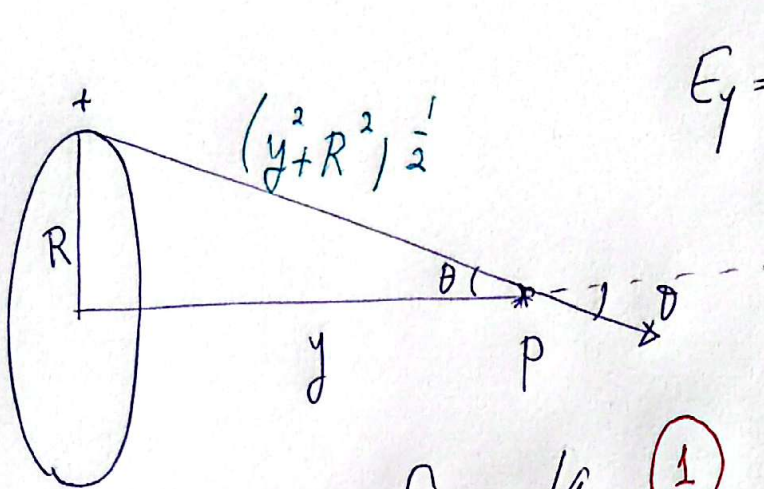
$$\vec{F} = -ky, \quad k = \frac{4e^2}{\pi\epsilon_0 d^3} \quad (۱ نمره)$$

$$F = m a_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} \Rightarrow m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2 = \frac{4e^2}{\pi\epsilon_0 d^3 m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4e^2}{\pi\epsilon_0 d^3 m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4e^2}{\pi\epsilon_0 d^3 m}} \quad (۱ نمره)$$

الف) با توجه به تقارن میدان الکتریکی در جهت y نخواهد بود.



$$E_y = E \cos \theta$$

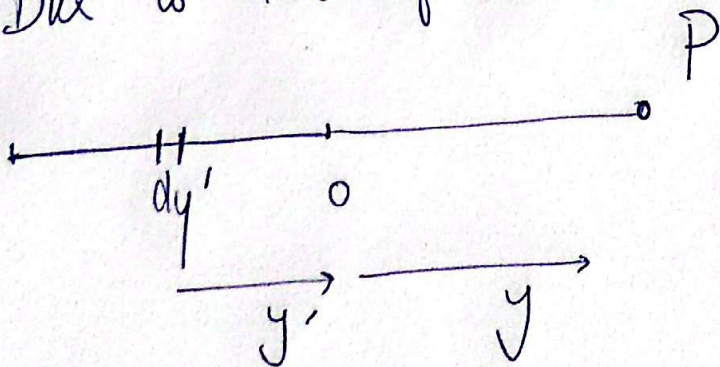
$$\cos \theta = \frac{y}{(y^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$|E_y|_{\text{Ring}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{y dq}{(y^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{y}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + R^2)^{3/2}} \int dq$$

↑ مقدار نیتا داخل انتگرال

$$|E_y|_{\text{ring}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(y^2 + R^2)^{3/2}}$$

Due to line of charge



از نقطه P

$$|E_y|_{\text{line}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dq}{(y + y')^2}$$

$$\lambda = \frac{-Q}{L} \quad dq = \lambda dy'$$

چگالی خطی
بار

$$|E_y|_{ine} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dy'}{(y+y')^2}$$

$$y+y' = u \quad \int_y^{y+L} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+L}$$

$dy' = du$

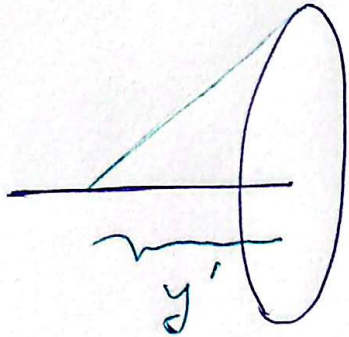
$$|E_y|_{ine} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+L} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 y(y+L)} \quad (1)$$

↓
اندازه میدان

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{y}{(y^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{1}{y(y+L)} \right]$$

توضیح
• برای حده ۲ نهی برای سه ۲ نهی - با توجه به نزول پتانسیل در ی سه $\vec{E}$

دلیل دی' واریاسیون



$$dF = E_{y, \text{ring}} dq$$

$$dq = \frac{Q}{L} dy'$$

(0.5)

$$dF = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{(y'^2 + R^2)^{3/2}} \frac{Q}{L} dy' \quad (1)$$

دلیل دی' واریاسیون

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \int_0^L \frac{y' dy'}{(y'^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + R^2}} \right] \quad (0.5)$$

$$y'^2 + R^2 = u$$

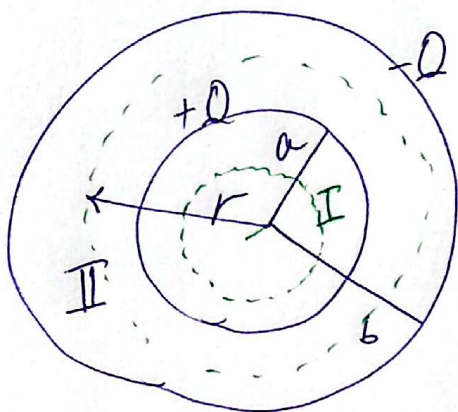
$$2y' dy' = du$$

$$\int_{R^2}^{L^2 + R^2} \frac{\frac{1}{2} du}{u^{3/2}} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{u^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{R} - \frac{1}{(R^2 + L^2)^{1/2}}$$

ج سوال ۳

الف) با توجه به تقارن مسئله سطح کروی را به عنوان سطح گاوسی انتخاب می‌کنیم

I: Gaussian Surface. $r < a$ 

$$\oint_{\text{Surface}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{enclosed}}$$

$$\text{I: } r < a \quad E(4\pi r^2) = 0$$

$$E = 0 \quad (1)$$

II: Gaussian Surf. $a < r < b$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (1) \quad \text{! شعاع کروی به کار رود}$$

III: Gaussi Surf. $r > b$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} (Q - Q) = 0$$

$$E = 0 \quad (1)$$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

» هر دو صفحه ۱ انتخاب

b)

2

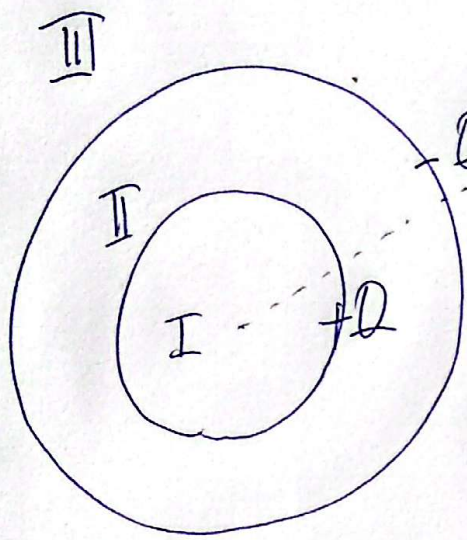
ب. سنجیدگی

تولف

در این حالت به سمت بیرون

تولف می‌شود

$$V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



III در $r > b$

$$V_r - V_\infty = - \int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow V(r) = 0$$

1

$$V_\infty = 0$$

II در

$$V_r - V_\infty = - \left(\int_\infty^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^r \vec{E} \cdot d\vec{l} \right)$$

$$V_r = - \int_b^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{1}{r} \right|_b^r$$

1

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

3

III

$r < a$

$$V_r - V_{\infty} = - \left(\int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_a^r \vec{E} \cdot d\vec{l} \right)$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 0 0 0

$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$

2)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

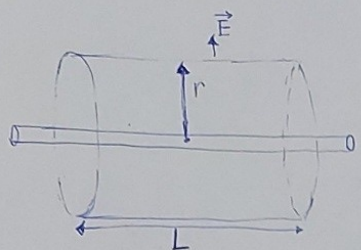
3

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

0.5
1
0.5

الف) برای بدست آوردن پتانسیل، ابتدا میدان الکتریکی یک میله باردار بی نهایت را در حاصل r از آن با استفاده از قانون گاوس بدست می آوریم:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc} \Rightarrow \epsilon_0 E (2\pi r L) = \lambda L \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{نمره})$$

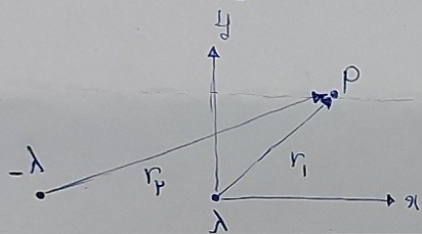
حال می توانیم با استفاده از انتگرال گیری از E ، پتانسیل الکتریکی را حساب کنیم.

می دانیم که: ثابت $\int \frac{dr}{r} = \ln|r| + C$ حال با توجه به این که $\ln(r=\infty) \rightarrow \infty$ و نامشخص $\ln(r=0)$ است، نقاط بی نهایت

و نقاط روی میله برای انتخاب به عنوان مبدأ پتانسیل الکتریکی مناسب و خوشتر تعریف نیستند. اما می توانیم هر نقطه $r=r_0$ غیر از این نقاط را به عنوان مبدأ پتانسیل در نظر بگیریم. بنابراین برای پتانسیل یک میله دار بی نهایت با چگالی بار λ داریم:

$$V = - \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{r_0}^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln|r| \Big|_{r_0}^r = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (\text{نمره ۱/۵})$$

پتانسیل مجموعه دو میله در نقطه P حاصل جمع پتانسیل هر یک از میله ها در آن نقطه است. بنابراین:



$$V_P = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r'_0}\right) \quad (\text{نمره ۵/۵})$$

از آنجا که مبدأ پتانسیل هر دو میله جهت مقایسه باید یکسان باشد،

مبدأ پتانسیل هر دو میله را در حاصل مساوی از هر دو در نظر می گیریم تا $r'_0 = r_0$ باشد.

$$V_P = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln(r_2) - \ln(r_0) - \ln(r_1) + \ln(r_0)] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln(r_2) - \ln(r_1)] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x+d)^2 + y^2 + z^2$$

از آنجا که با توجه به تقارن مساله، میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی به z بستگی ندارد، برای راحتی کار $z=0$ در نظر می گیریم.

$$V_P = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (\text{نمره})$$

ب) برای سطوح هم پتانسیل داریم:

$$V_P = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \text{Constant} \quad (\text{نمره ۱/۵})$$

$$\Rightarrow \frac{r_1^p}{r_1^p} = \frac{(x+d)^p + y^p}{x^p + y^p} = \frac{1}{m^p} \quad m \text{ یک ثابت است}$$

۵/۵ شماره

اگر $m=1$ باشد، داریم:

$$(x+d)^p + y^p = x^p + y^p \Rightarrow x^p + pdx + d^p + y^p = x^p + y^p \Rightarrow$$

$$pdx + d^p = 0 \Rightarrow d(px + d) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{d}{p}}$$

۵/۵ شماره

اگر $m \neq 1$ باشد، داریم:

$$\frac{r_1^p}{r_1^p} = \frac{(x+d)^p + y^p}{x^p + y^p} = \frac{1}{m^p} \Rightarrow x^p + y^p = m^p x^p + m^p d^p + pmdx + m^p y^p \Rightarrow$$

$$(m^p - 1)x^p + pmdx + (m^p - 1)y^p = -m^p d^p \Rightarrow x^p + \frac{pmd}{m^p - 1}x + y^p = \frac{m^p d^p}{1 - m^p} \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{md}{m^p - 1}\right)^p + y^p = \frac{m^p d^p}{1 - m^p} - \frac{m^p d^p}{(m^p - 1)^p} = \frac{m^p d^p (-1 - m^p + 1)}{(m^p - 1)^p} = \frac{m^p d^p}{(m^p - 1)^p} \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(x + \frac{md}{m^p - 1}\right)^p + y^p = \frac{m^p d^p}{(m^p - 1)^p}}$$

۵/۵ شماره

(ج) رسم خط هم پتانسیل وسط میله ها

شماره

رسم دایره هم پتانسیل

شماره

