بسمه تعالی

آشنایی با اصول اولیه یک آزمایش

فهرست

۱- اهمیت و مفهوم خطا و خطای تخمینی یک کمیت

۱-۱- *عدم امکان اندازه گیری دقیق کمیت و تعریف خطا*

اندازه‌گیری دقیق یک کمیت فاقد معناست زیرا عوامل زیادی مانع رسیدن ما به مقدار واقعی کمیت می‌باشد که حذف همه آنها به طور کامل ممکن نیست. بعضی از این عوامل عبارتند از :

۱- وسایل اندازه‌گیری کمیات

۲- شخص آزمایشگر

۳- عوامل پیچیده و متغیر محیط

خطای یک کمیت = مقدار اندازه گیری شده − مقدار واقعی آن کمیت یعنی : $\varepsilon = x - X$

با اینکه اندازه‌گیری دقیق یک کمیت امکان ندارد اما داشتن تخمینی از خطای یک کمیت اهمیت خاصی دارد. شاید بپرسید چرا تخمینی از خطا؟ چون داشتن دقیق خطای یک کمیت معادل داشتن دقیق آن کمیت است.

۱-۲- *خطای تخمینی یک کمیت بیانگر چیست؟*

خطای تخمینی یک کمیت بیان می‌کند که تا چه اندازه می‌توان به مقدار کمیت داده شده اطمینان پیدا کرد.

مثال: اگر طول یک میز ۱۲۰ سانتی‌متر و خطای تخمینی آن ۵ سانتی‌متر گزارش داده شود آن را به این صورت می‌نویسیم: $120 \pm 5cm$.

تعبیر اولیه این عبارت این است که طول واقعی میز عددی بین ۱۱۵ و ۱۲۵ سانتی‌متر (۵-۱۲۰ و ۵ +۱۲۰) می‌باشد اما معنی دقیق‌تر آن می‌گوید طول واقعی میز به احتمال حدود ۶۸ درصد بین ۱۱۵ و ۱۲۵ سانتی‌متر و به احتمال حدود ۹۵ درصد بین ۱۱۰ و ۱۳۰ سانتی‌متر (۵×۲-۱۲۰ و ۵×۲ +۱۲۰) می‌باشد که در ۴-۲ به آن خواهیم پرداخت یعنی *حداکثر چیزی که خطای تخمینی یک کمیت بیان می‌کند این است که مقدار واقعی کمیت با احتمال معینی در داخل گستره‌ای در اطراف مقدار گزارش شده می‌باشد.*

مثال: فرض کنید کمیتی از ۱/۲۴ به ۱/۳۵ تغییر کند. اگر خطای این اعداد حدود ۰/۰۱ باشد این تغییر مهم است ولی اگر خطای آنها در حدود ۰/۱ باشد این تغییرات اهمیتی ندارد.

اصولا کم کردن خطاهای موجود در یک آزمایش همیشه کار ساده‌ای نیست. به این خاطر اگر آزمایشی برای مقاصد خاصی انجام می‌شود باید ببینیم به چه دقتی احتیاج است تا دچار زحمت مضاعف و بیهوده نشویم.

۱-۳- *خطای نسبی و درصد خطای نسبی*

حال با دو تعریف جدید آشنا می‌شویم:

خطای نسبی(انحراف نسبی)

$$\frac{x-X}{X} \cong \frac{x-X}{x} = \frac{\varepsilon}{x}$$

درصد خطای نسبی(درصد انحراف)

$$100 \times \frac{\varepsilon}{x}$$

۲- خطای وسایل اندازه‌گیری

ما با وسایل اندازه‌گیری گوناگونی در کارهای آزمایشگاهی روبرو هستیم مثل خط‌کش، کولیس، ریزسنج، زمان‌سنج، نیروسنج، ترازو، دماسنج و ... که بعضی از آنها هم به صورت دیجیتال(رقمی) هستند. هدف از این بخش این است که بدانیم هر وسیله اندازه‌گیری تا چه دقتی مقدارکمیت مورد نظر را به دست می‌دهد همچنین با بعضی نکات در مورد خواندن درست کمیات آشنا می‌شویم.

۲-۱- *وسایل اندازه‌گیری مدرج*

گروهی از وسایل اندازه‌گیری دارای قسمتی مدرج هستند که باید با چشم خوانده شوند مثل خط کش، کولیس، ریزسنج، ترازو و ... .
نکته اول در خواندن کمیت در این وسایل این است که راستای چشم عمود بر صفحه مدرج باشد.
و اما خطای این وسایل:
یک قانون سردستی می‌گوید که خطای آنها نصف کوچکترین درجه بندی موجود است.
مثال: خواسته شده با خط‌کشی عرض یک میز اندازه گرفته شود. یک طرف میز روی صفر خط‌کش و طرف دیگر خط‌کش بین ۵۸/۲ و ۵۸/۳ سانتی‌متر می‌افتد یعنی عرض میز باید عددی بین این دو عدد باشد پس طول میز برابر $58.25 \pm 0.05cm$ است.
احتمالا باید متوجه شده باشید که این قانون سردستی از کجا آمده است البته اگر شاخص وسیله به یک درجه در روی صفحه مدرج خیلی نزدیک باشد می‌توانیم خطا را باز کاهش دهیم مثلا ربع کوچکترین درجه بندی.
خطایی که برای وسایل اندازه‌گیری مدرج وجود دارد از دو جا ناشی می‌شود:
۱- از خود دستگاه : هر دستگاهی دقتی دارد که در محدوده همان دقت می‌توان به آن اعتماد کرد
۲- از خود شخص اندازه‌گیر: وقتی شاخص وسیله بین دو درجه‌بندی است و بین آنها درجه‌بندی وجود ندارد تشخیص مقدار این که شاخص در چه کسری از فاصله دو درجه‌بندی قرار دارد با چشم مشکل است و بالطبع تولید خطا می‌کند حال ممکن است وسیله‌ای نسبتا دقیق مدرج شده باشد اما خطای چشم مانع از رسیدن به دقت واقعی دستگاه باشد. استفاده از ورنیه (همان چیزی که در کولیس به کار رفته است) ابتکار زیبایی برای رفع این مشکل است.

۲-۲- *وسایل اندازه‌گیری دیجیتال*

این وسایل صفحه‌ای دارند که کمیت مورد نظر را به صورت یک عدد تحویل می‌دهند.
در رقم آخر این وسایل ابهامی وجود دارد پس با یک حساب سردستی می‌توان خطای آنها را برابر کوچکترین مقداری که می‌توانند نشان دهند قرار داد.
مثال: اختلاف پتانسیل یک باطری را با یک مولتی متر دیجیتال ۱/۲۵ ولت می‌خوانیم در نتیجه خطای آن برابر ۰/۰۱ ولت می‌باشد.
$1.25 \pm 0.01V$
ممکن است دقت وسیله بیش از عددی باشد که نشان می‌دهد و عدد نشان داده شده، عددی گرد شده از عدد دقیق‌تر باشد در این حالت خطای کمیت نصف کوچکترین مقدار است در ضمن ممکن است خطای وسیله روی آن نوشته شده باشد. حالتی که خطای وسیله بیشتر از کوچکترین مقدار باشد غیر استاندارد ولی ممکن است.

۲-۳- *دیگر خطاهای وسایل اندازه‌گیری*

تا حالا فرض می‌شد وسایلی که با آنها کار می‌کنیم در حد درجه‌بندی خود عدد درستی را نشان می‌دهند اما همیشه این‌گونه نیست و اکثر اوقات هم مجبور به تعویض وسیله هستیم ولی گاهی اوقات می‌توان با کمی اصلاح عدد درست را از وسیله گرفت. یک نمونه آن خطای صفر است. فرض کنید با نیروسنجی می‌خواهید وزن یک جسم را پیدا کنید. وقتی نیروسنج را قائم نگه می‌دارید بدون آنکه جسم را به آن متصل کرده باشید نیروسنج به شما عددی غیر صفر می‌دهد این همان خطای صفر است. در این حالت خاص شما عدد را یادداشت می‌کنید و از عددی که در موقع وصل کردن جسم مورد نظر خوانده‌اید کم می‌کنید. در بعضی وسایل اندازه‌گیری امکاناتی وجود دارد که صفر دستگاه را تنظیم کنید مثل ترازوهای یک کفه‌ای.

۳- انواع خطاها وعوامل موثر در ایجاد آنها

۱-۳- اندازه‌گیری متعدد یک کمیت و مفهوم خطای کاتوره‌ای و سیستماتیک

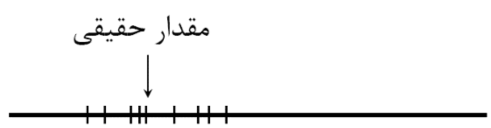
خطاها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱- خطاهای کاتوره‌ای(تصادفی)

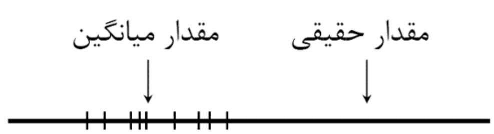
۲- خطاهای سیستماتیک (ذاتی)

کمیتی را چند بار اندازه‌گیری می‌کنیم و اعداد به دست آمده را روی یک محور مشخص می‌کنیم.

پراکندگی که در روی محور دیده می‌شود ناشی از خطاهای کاتوره‌ای(تصادفی) موجود می‌باشد. اگر خطاهای موجود در اندازه‌گیری فقط از نوع خطاهای کاتوره‌ای باشند نتایج اندازه‌گیری‌های متوالی در اطراف مقدار حقیقی کمیت مورد نظر گسترده می‌شوند. طبق تعریف خطاهای کاتوره‌ای خطاهایی هستند که احتمال مثبت یا منفی بودن آنها مساوی است پس معقول به نظر می‌رسد که میانگین این اعداد تقریب خوبی از مقدار واقعی کمیت باشد و هرچه تعداد اندازه‌گیری‌ها افزایش پیدا کند به مقدار واقعی نزدیک‌تر شود.



همانطور که گفته شد در حضور خطاهای کاتوره‌ای به تنهایی نقطه میانگین اعداد به دست آمده تقریب خوبی از مقدار حقیقی کمیت مورد نظر می‌باشد. اثر خطاهای سیستماتیک موجود، این است که یک جابجایی از مقدار واقعی در میانگین اعداد به وجود می‌آورد.



تشخیص و رفع خطاهای سیستماتیک در حالت کلی کار نسبتا مشکلی است و معمولا وقتی یک کمیت از طریق آزمایش‌های مختلف به دست می‌آید قابل تشخیص است اما کار با خطاهای کاتوره‌ای و تشخیص درست کمیت نسبتا ساده است* چون اگر در آزمایشی خطاهای کاتوره‌ای بزرگی وجود داشته باشند، به صورت یک مقدار بزرگ در خطای نهایی آشکار خواهند شد ولی حضور ناپیدای یک

* در قسمت ٤ به کمک مفاهیم آماری به این موضوع پرداخته خواهد شد.

خطای سیستماتیک ممکن است به ارائه یک نتیجه ظاهرا معتبر همراه با یک خطای تخمینی کوچک منجر شود که در واقع اشتباهی جدی است. برای مثال به مقداری که میلیکان برای بار الکترون به دست آورده است توجه کرده و با مقدار کنونی آن مقایسه کنید:

مقدار میلیکان: $(1.591 \pm 0.002) \times 10^{-19} C$

مقدار کنونی: $(1.602189 \pm 0.000005) \times 10^{-19} C$

اکنون به حاد بودن چنین خطاهایی پی می‌برید که حتی بهترین آزمایش‌گران هم از آن در امان نبودند در واقع خطاهای سیستماتیک را باید یکی یکی کشف و حذف کرد. این کار قاعده کلی ندارد و با تجربه زیاد به دست می‌آید.

۳-۲- *خطاهای کاتوره‌ای(تصادفی)*

اصولا تمام عوامل موجود که تاثیر آنها مستقل از کمیات موجود در آزمایش است می‌توانند تولید خطای کاتوره‌ای کنند. به همین علت پراکندگی در غیاب خطاهای سیستماتیک حول مقدار واقعی نسبتا یکنواخت است یا به عبارتی دیگر احتمال مثبت یا منفی بودن این خطا یکی است. تغییرات دما، رطوبت، جریانات جوی، تغییرات جریانات برق، خود شخص اندازه‌گیر می‌توانند عامل تولید خطای کاتوره‌ای باشند. فرض کنید زمان تناوب یک آونگ را چندین بار با یک کرنومتر اندازه گرفته‌ایم. خطاهای حاصل در به کار انداختن کرنومتر و توقف آن و بی نظمی‌های کوچک در حرکت آونگ تغییراتی در نتایج اندازه‌گیری متوالی به وجود می‌آورند که می‌توان آنها را به عنوان خطاهای کاتوره‌ای در نظر گرفت.

۳-۳- *خطاهای سیستماتیک(ذاتی)*

خطاهای سیستماتیک معمولا موقعی پیش می‌آیند که واقعیت آزمایش از مفروضات نظری تعدی می‌کند و از ضریب تصحیحی که این تفاوت را اعمال کند چشم پوشی می‌شود.

چند مثال از خطاهای ذاتی

۱- معیوب بودن وسیله اندازه‌گیری: ساده ترین نوع آن خطای صفر می‌باشد، کرنومتری که کمی کند کار می‌کند، ولت سنجی که محور عقربه آن دقیقا در مرکز صفحه مدرجش نباشد (در اینجا یک خطای ذاتی تناوبی وجود دارد).

۲- اندازه‌گیری ارتفاع یک مایع در لوله وقتی از یک مقیاس متصل به لوله استفاده می‌کنیم و لوله دقیقا قائم نباشد: دراین حالت خطای ذاتی مثبت است و با افزایش ارتفاع زیاد می‌شود.

۳- اندازه‌گیری شتاب جاذبه زمین به وسیله یک سطح شیب‌دار که دارای اصطکاک می‌باشد ولی وجود آن فرض نشده باشد.

۴- کمیات اولیه:

یافتن مقدار مناسب و خطای تخمینی از روی اندازه‌گیری‌های متعدد یک کمیت

تعریف کمیات اولیه و ثانویه

مفهوم کمیت اولیه و ثانویه یک مفهوم من درآوردی ولی مفید می‌باشد.

کمیت اولیه: کمیتی که مستقیما از روی وسیله اندازه‌گیری خوانده می‌شود مثل طول یک میز، اختلاف پتانسیل دو سر یک باطری و زمان سقوط یک گلوله فلزی از یک ارتفاع مشخص.

کمیت ثانویه: این نوع کمیت مستقیما از روی وسیله اندازه‌گیری خوانده نمی‌شود بلکه توسط تابعی به کمیات اولیه و ثانویه دیگر ربط پیدا می‌کند مثل چگالی یک جسم که از روی تقسیم جرم بر حجم جسم به دست می‌آید. در این حالت جرم جسم می‌تواند

کمیت اولیه (توسط ترازو) یا ثانویه(g / وزن(توسط نیرو سنج)) باشد. همین طور حجم می‌تواند کمیت اولیه (با حجم مایع جابجا شده مثل آب در یک استوانه مدرج) یا ثانویه (حجم= طول×عرض×ارتفاع (توسط خط کش یا کولیس، اگر مکعبی شکل باشد) باشد.

۱-۴- مقدار مناسب کمیت

در اینجا روی خطاهای کاتوره‌ای معطوف تمرکز کرده و فرض می‌کنیم خطاهای سیستماتیک وجود ندارد*. برای به دست آوردن درست یک کمیت چند بار باید اندازه‌گیری انجام شود. اعداد به دست آمده را $x_1, x_2, \ldots, x_N$ می‌نامیم. هدف نهایی در این قسمت دو چیز است:

۱- یافتن مقدار مناسب کمیت از روی اعداد موجود

۲- یافتن خطای تخمینی این مقدار از روی اعداد موجود

جواب قسمت اول همانطور که قبلا اشاره کرده بودیم میانگین این اعداد می‌باشد.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$$

حال به دنبال جواب قسمت دوم می‌گردیم.

۲-۴- مفهوم پراکندگی

در آزمایش زمان سقوط یک توپ کوچک از یک ارتفاع معین ($90.4 \pm 0.05cm$) چندین بار اندازه‌گیری شده است و اعداد زیر به دست آمده است:

0.47	*0.41*	*0.40*	*0.43*	*0.49*	*0.37*	*0.89*	*0.42*	*0.41*	*0.37*	*0.41*	*0.34*	*t (s)*

در بین این اعداد، عددی که مشخص شده است خیلی پرت به نظر می‌رسد و می‌توان با ملاحظاتی آن را حذف کرد. جالب است بدانید در این آزمایش خاص، علت اینکه این عدد به دست آمده، این است که کرنومتر توسط آزمایشگر صفر نشده واین عدد در واقع مجموع دو نتیجه متوالی می‌باشد.

حال ما ۱۱ عدد داریم (۰/۸۹ را دور انداختیم). میانگین اینها یعنی مقدار مناسب کمیت برابر است با:

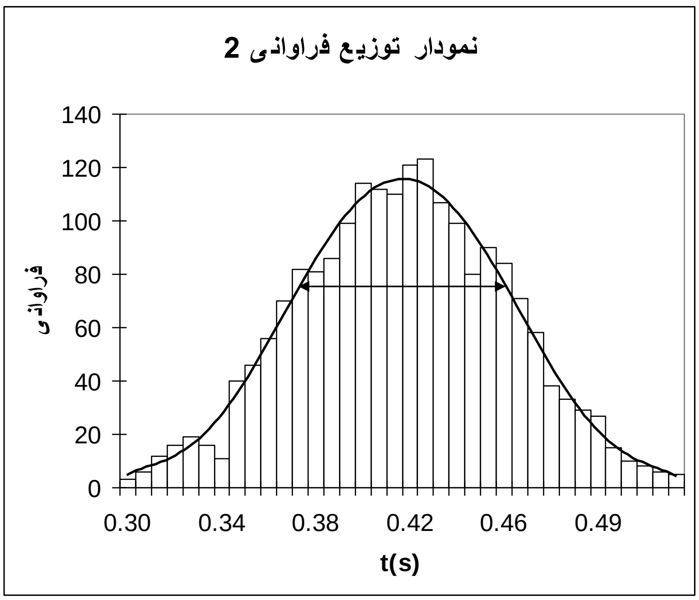
$$\frac{0.34 + 0.41 + \ldots + 0.47}{11} = 0.41s$$

اکنون چهار بازه مساوی متوالی تعریف‌کرده و تعداد اعدادی که در هر بازه هستند را شمرده و در جدولی یادداشت می‌کنیم.

توزیع اعداد (فراوانی)	بازه ها(s)
۳	۰/۰-۳۲/۳۷
۵	۰/۰-۳۷/۴۲
۲	۰/۰-۴۲/۴۷
۱	۰/۰-۴۷/۵۲

* خطاهای سیستماتیک فقط انتقالی در مقدار به دست آمده از کمیت به وجود می‌آورند.

همان‌طور که می‌بینید چون تعداد اندازه‌گیری‌ها کم بوده است(در اینجا یازده تا) طول بازه‌ها طوری انتخاب شده‌اند که دارای تعداد فراوانی معقولی باشند. در نمودار توزیع فراوانی ۱ ، این فراوانی‌ها را به تصویر کشیده است. حال فرض کنید تعداد اندازه‌گیری‌ها افزایش پیدا کنند مثلا به دو هزار بار برسند. اکنون نمودار توزیع فراوانی ۲، فراوانی این اندازه‌گیری‌ها را نشان می‌دهد.



در اینجا طول بازه ها ۰/۰۱ در نظر گرفته شده است (طول بازه‌ها نباید کمتر از خطای وسیله اندازه‌گیری باشد) که می‌توان این مقدار را با طول ۰/۰۵ برای نمودار ۱ مقایسه کرد.

اگر اندازه‌گیری‌هایمان را باز ادامه دهیم به توزیعی هموار می‌رسیم که در نمودار توزیع فراوانی ۲ مشخص شده است. این توزیع همواره با تقریب خوبی یک توزیع گاوسی می‌باشد. البته چون تعداد اندازه‌گیری‌ها به بی‌نهایت میل می‌کند از مفهوم فراوانی نسبی (به جای فراوانی) که عبارت است از فراوانی هر بازه تقسیم بر تعداد کل اندازه‌گیری‌ها، استفاده می‌شود.

یعنی توزیع یا تابع گاوسی یک توزیع فراوانی نسبی می‌باشد و به همین علت مساحت زیر نمودار آن برابر ۱ می‌باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$f(x)$ تابع گاوسی می‌باشد و منظور از منفی و مثبت بی‌نهایت جمع روی همه اعداد می‌باشد. این تابع در واقع یک تابع احتمال است و $f(x)dx$ بیان کننده احتمال وجود نتیجه یک اندازه‌گیری در بازه x تا $x+dx$ می باشد. این تابع یک تابع متقارن حول $x = X$ می‌باشد که ماکزیمم مقدار آن هم در همین نقطه می‌باشد(X مقدار واقعی کمیت است). میانگین اعداد اندازه‌گیری شده وقتی

اندازه‌گیری‌ها به سمت بی‌نهایت میل کند برابر X می‌شود. این تابع به شکل $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}}$ می‌باشد. این تابع دو نقطه بحرانی در نقاط $x=X-\sigma$ و $x=X+\sigma$ دارد که پیکان دوسر موجود در نمودار ۲ این نقاط بحرانی و بازه بین آنها را مشخص می‌کند. σ(سیگما) معیار خوبی برای بیان پراکندگی حول میانگین دسته‌ای از اعداد (در اینجا مقادیر اندازه‌گیری شده) می‌باشد به روابط زیرتوجه کنید:

$$\int_{X-\sigma}^{X+\sigma} f(x)dx \approx 0.68$$ و $$\int_{X-2\sigma}^{X+2\sigma} f(x)dx \approx 0.95$$

این روابط بیان می‌کند که هر اندازه‌گیری به احتمال حدود ۶۸ درصد در بازه $\bar{x}-\sigma$ تا $\bar{x}+\sigma$ و به احتمال حدود ۹۵ درصد در بازه $\bar{x}-2\sigma$ تا $\bar{x}+2\sigma$ می‌باشد.

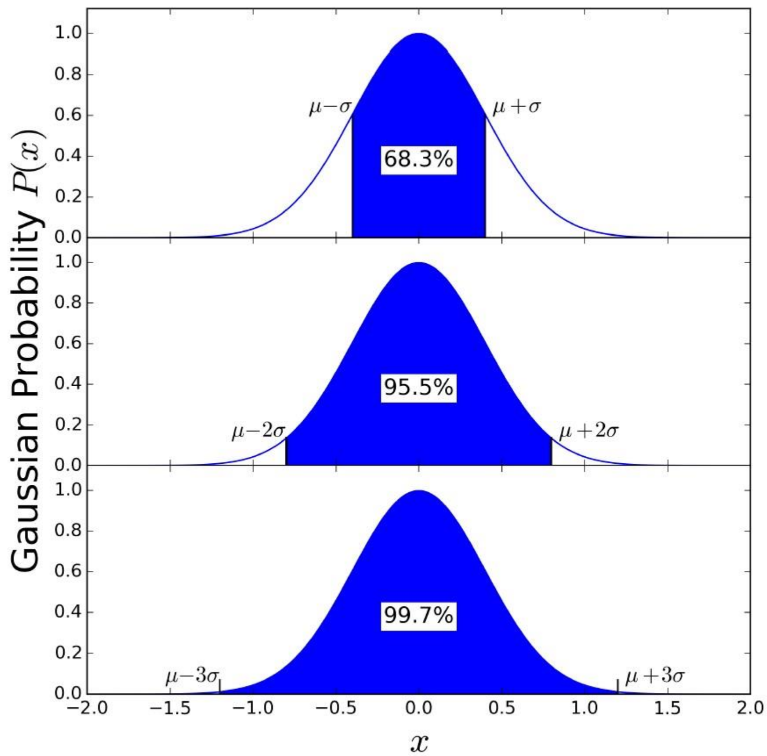
به طور کلی مساحت زیر منحنی توزیع احتمال برای محدوده بین دو مقدار از پارامتر x برابر خواهد بودبا ، احتمال اینکه هر اندازه گیری روی پارامتر x بین آن دومقدار قرار گیرد. عدم قطعیت هر آزمایش از همین حقیقت نشات می گیرد. مساحت زیر منحنی هرگاه ، انحراف معیار از میانگین$\pm\sigma, \pm ۲\sigma, \pm ۳\sigma$ باشد به صورت زیر بدست می آید:

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} P(x)dx = 0.683$$

$$\int_{-2\sigma}^{2\sigma} P(x)dx = 0.955$$

$$\int_{-3\sigma}^{3\sigma} P(x)dx = 0.977$$

این مقادیر بدست آمده برای مساحت در شکل زیر قابل مشاهده است.



مساحت زیر نمودار تابع گاوسی برای محدوده های مختلف

σ را انحراف معیار، انحراف استاندارد* یا خطای معیار در یک تک مشاهده می‌نامیم. علت نامگذاری خطای معیار در یک تک مشاهده این است که σ به تنهایی، خطای تخمینی هر اندازه‌گیری را از مقدار واقعی کمیت به ما می‌دهد. اما چیزی که مطلوب ماست خطای تخمینی میانگین اندازه‌گیری‌های معدود ما از مقدار واقعی کمیت می‌باشد.

کمیتی N بار اندازه‌گیری شده است . می توانیم فرض کنیم که ما مجموعه بزرگی از تعداد بسیار زیادی اندازه‌گیری داریم و آن را M می‌نامیم و این N اندازه‌گیری یک زیرمجموعه N عضوی از مجموعه M می‌باشد. σ در واقع خطای معیار اعضای مجموعه M که هر کدام یک اندازه‌گیری می‌باشد را نشان می‌دهد. حال ما مجموعه جدیدی به نام M' می‌سازیم که اعضای آن میانگین زیرمجموعه‌های N عضوی از مجموعه M می‌باشد. انحراف استاندارد یا خطای معیار این مجموعه را σ_m* می‌نامیم که به آن خطای استاندارد یا خطای معیار میانگین می‌گویند. این مقدار در واقع آن چیزی است که ما به دنبال آن بودیم. σ_m می‌تواند خطای تخمینی خوبی برای میانگین مقادیر اندازه‌گیری شده می‌باشد.

تعاریف کلی σ و σ_m به شرح زیر می‌باشد:

$$\sigma^2 = <\varepsilon^2> = <(x-X)^2>$$

که علامت $< >$ به معنی متوسط‌گیری می‌باشد بین تمامی مقادیر موجود داخل آن می‌باشد که در اینجا بین همه مقدارهای اندازه‌گیری شده x (اعضای مجموعه M) است.

$$\sigma_m{}^2 = <(\bar{x}-X)^2>$$

---

* Standard Deviation

* Standard Error

در اینجا متوسط‌گیری بین همه اعضای مجموعه M' می‌باشد.

ثابت می‌شود که

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{x})^2}{N-1}} \quad \text{و} \quad \sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

و از آنجا نتیجه می‌شود که

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N}(x_n - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

در این روابط x_n ، n امین مقدار اندازه‌گیری شده از بین N اندازه‌گیری انجام شده است. در صورتی که N کمتر از ۱۳ تا باشد می‌توان σ_m را از رابطه ساده‌تر $\sigma_m = \frac{r}{N}$ که r تفاوت بین کمترین و بیشترین مقدار در بین x_n ها می‌باشد، به دست آورد*. ما به هدفمان در این فصل رسیدیم σ_m خطای تخمینی یک کمیت اولیه می‌باشد. این کمیت را در نهایت بدین صورت می‌نویسیم: $\bar{x} \pm \sigma_m$

حال به سراغ مثال اول این بخش برمی‌گردیم:

$$\bar{x} = \frac{0.34 + 0.41 + \ldots + 0.47}{11} \approx 0.41s$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{(0.34-0.41)^2 + (0.41-0.41)^2 + \ldots (0.47-0.41)^2}{11(11+1)}} \approx 0.013s$$

$$\sigma_m = \frac{0.49 - 0.34}{11} \approx 0.014s \approx 0.013s$$

مقدار نهایی به صورت $0.41 \pm 0.013s$ یا $0.41 \pm 0.01s$ نوشته می‌شود.

نکته مهم: خطای وسیله اندازه‌گیری (در اینجا کرنومتر) برابر ۰/۰۱s می‌باشد و چون این خطا کمتر از $\sigma_m \approx 0.013s$ است مشکلی پیش نمی‌آید اما اگر در آزمایشی σ_m کوچکتر از خطای وسیله اندازه‌گیری کمیت مورد نظر بود به جای σ_m از خطای وسیله اندازه‌گیری استفاده می‌کنیم برای مثال اگر $\sigma_m = 0.006s$ باشد آنگاه نتیجه به جای $0.41 \pm 0.006s$ برابر $0.41 \pm 0.01s$ است.

انحراف میانگین: تعریفی است که ممکن است استفاده شود. $\frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{N}$

۵- کمیات ثانویه:

اندازه‌گیری مقدار مناسب و خطای تخمینی از روی کمیات اولیه و ثانویه مرتبط

کمیت ثانویه ما توسط تابعی به کمیات اولیه و ثانویه دیگر ربط پیدا می‌کند یعنی $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. در اینجا y کمیت ثانویه مورد نظر ما (کمیت وابسته) و $x_1, x_2, \ldots, x_N$ کمیات اولیه و ثانویه مرتبط(کمیات مستقل) می‌باشند که خطاهای تخمینی آنها برابر $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_N$ * است. هدف نهایی این قسمت دو چیز است:

* برای اثبات این روابط به مرجع(۱) فصل ۳ مراجعه کنید.

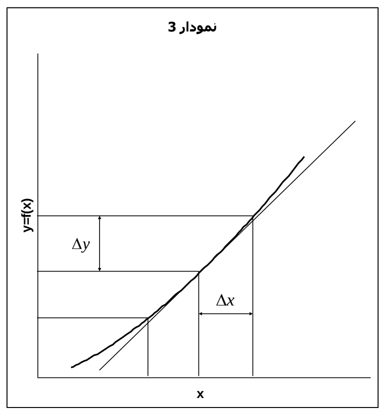
* اینها در واقع σ_m کمیات $x_1, x_2, \ldots, x_N$ می‌باشند.

۱- یافتن مقدار مناسب کمیت از روی کمیات مستقل
۲- یافتن خطای تخمینی این مقدار (Δy) از روی کمیات مستقل

جواب قسمت ۱ ساده است کافیست مقادیر مختلف $x_1, x_2, ..., x_N$ را در تابع f قرار دهیم تا مقدار مناسب کمیت به دست آید.
$y = f(x_1, x_2, ..., x_N)$

۵-۱- محاسبه خطا در توابع یک متغیره

ما حالتی در نظر می‌گیریم که تابع f تابعی از یک کمیت باشد یعنی $y = f(x)$.



همان طور که در نمودار ۳ دیده می‌شود وقتی x به اندازه Δx تغییر کند y به اندازه Δy تغییر می‌کند.
به خط مماس در نقطه x توجه کنید. شیب این خط طبق تعریف برابر مشتق تابع f در نقطه x می‌باشد که به صورت df / dx می‌نویسند. اگر Δx کوچک باشد همانطور که از روی شکل دیده می‌شود Δy از رابطه $\Delta y \approx \frac{df}{dx}\Delta x$ به دست می‌آید.

چند مثال:

$$y = ax + b \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a \Rightarrow \Delta y = a\Delta x$$

$$y = x^n \Rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \Rightarrow \Delta y = nx^{n-1}\Delta x \Rightarrow \Delta y = \frac{n}{x} y\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = n\frac{\Delta x}{x}$$

$$y = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \Delta y = \frac{\Delta x}{x}$$

$$y = e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \Rightarrow \Delta y = e^x\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \Delta x$$

۵-۲- محاسبه خطا در توابع چند متغیره

در اینجا f تابعی از چند کمیت می‌باشد $y = f(x_1, x_2, ..., x_N)$. مقدار Δy در اینجا بدون اثبات آمده است*.

* برای دیدن اثبات به مرجع (۱) فصل ۳ مراجعه کنید.

$$(\Delta y)^2=(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1)^2+(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2)^2+...(\frac{\partial f}{\partial x_N}\Delta x_N)^2=(\Delta y_1)^2+(\Delta y_2)^2+...+(\Delta y_N)^2$$

$\frac{\partial f}{\partial x_n}$ به مشتق جزیی تابع f نسبت به x_n معروف است یعنی مشتق تابع f نسبت به کمیت مستقل x_n می‌باشد و فرض می‌کنیم دیگر کمیات تغییری نمی‌کنند. Δy_n هم بیان کننده تغییرات تابع f نسبت به کمیت x_n می‌باشد وقتی x_n به اندازه Δx_n تغییر کند و دیگرکمیات مستقل تغییری نکنند.

چند مثال مهم:

$$y=x_1+x_2\Rightarrow(\Delta y)^2=(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2$$
$$y=x_1-x_2\Rightarrow(\Delta y)^2=(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2$$
$$y=x_1\times x_2\Rightarrow(\frac{\Delta y}{y})^2=(\frac{\Delta x_1}{x_1})^2+(\frac{\Delta x_2}{x_2})^2$$
$$y=\frac{x_1}{x_2}\Rightarrow(\frac{\Delta y}{y})^2=(\frac{\Delta x_1}{x_1})^2+(\frac{\Delta x_2}{x_2})^2$$

محاسبه مستقیم Δy_n:

$$\Delta y_n=f(x_1,x_2,...,x_n+\Delta x_n,...x_N)-f(x_1,x_2,...,x_n,...x_N)$$

یا

$$\Delta y_n=\frac{f(x_1,x_2,...,x_n+\Delta x_n,...x_N)-f(x_1,x_2,...,x_n-\Delta x_n,...x_N)}{2}$$

به کمک این روش دیگر احتیاجی به مشتق گیری ندارید(البته معادل آن است).

مثال:

$$y=f(x_1,x_2)=\frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos(x_2)}\Rightarrow\Delta y_1=\frac{\sin(x_1+\Delta x_1+x_2)}{\cos(x_2)}-y,\Delta y_2=\frac{\sin(x_1+x_2+\Delta x_2)}{\cos(x_2+\Delta x_2)}-y$$
$$(\Delta y)^2=(\Delta y_1)^2+(\Delta y_2)^2$$

حال به آزمایش اشاره شده در ابتدای ۴-۲ بر می‌گردیم. توپ از ارتفاع $h=90.4\pm0.05cm$ رها می‌شود و پس از $t=0.41\pm0.01s$ ثانیه به زمین می‌رسد هدف، مقدار و خطای g می‌باشد.

$$h=\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow g=\frac{2h}{t^2}\Rightarrow(\frac{\Delta g}{g})^2=(\frac{\Delta h}{h})^2+(\frac{\Delta t^{-2}}{t^{-2}})^2\Rightarrow(\frac{\Delta g}{g})^2=(\frac{\Delta h}{h})^2+4(\frac{\Delta t}{t})^2$$
$$g=\frac{2\times90.4cm}{(0.41s)^2}=1.07\times10^3\frac{cm}{s^2}=10.7\frac{m}{s^2}$$
$$\frac{\Delta g}{g}=\sqrt{(\frac{0.05cm}{90.4cm})^2+4(\frac{0.01s}{0.41s})^2}\approx\sqrt{4(\frac{0.01s}{0.41s})^2}\approx0.05\Rightarrow\Delta g\approx0.5\frac{m}{s^2}$$

پس نتیجه آزمایش به صورت $10.7\pm0.5\frac{m}{s^2}$ می‌باشد. همانطور که می‌بینید آزمایش بسیار بد انجام شده است و نتیجه اصلا خوب نیست چون علاوه بر خطای کاتوره‌ای زیاد خطای سیستماتیک قابل ملاحظه‌ای دارد چون مقدار مقدار واقعی g در بازه آن قرار نمی‌گیرد*.

* جمله ای زیبا از لانسلات هاگین: پژوهش‌گرانی که با تجربه سر و کار دارند آمار را به عنوان عذری برای انجام آزمایش‌های بد تلقی نمی‌کنند از مرجع(۲)

در اینجا بیشترین خطای موثر در خطای نهایی، خطای زمان سقوط یعنی Δt می‌باشد علت هم کم بودن t و در نتیجه بزرگ بودن خطای نسبی $\frac{\Delta t}{t}$ می‌باشد. شاید حالا متوجه شده باشید چرا گالیله از سطح شیب‌دار برای محاسبه g استفاده کرد چون با این کار زمان t افزایش پیدا می‌کند البته وجود اصطکاک در آزمایش سطح شیبدار معضل بزرگی است. امروزه برای اندازه‌گیری دقیق g از زمان‌سنج‌های بسیار دقیق استفاده می‌کنند*. آونگ کاتر هم مقدار دقیقی را نتیجه می‌دهد.

۶- مفهوم ارقام معنادار به عنوان روشی سردستی برای محاسبه خطای کمیات ثانویه

در عمل محاسبه خطای کمیات ثانویه از روی روابط بخش ۵-۲ ممکن است خسته کننده باشد. در اینجا می‌خواهیم با یک مفهوم رایج یعنی ارقام معنادار و قوانینی که بر آن حاکم است آشنا شویم. برای آنکه دقت کمیتی را بیان کنیم به همراه مقدار کمیت خطای آن را هم می‌نویسیم $x \pm \Delta x$ اما با به کار بردن مفهوم ارقام معنادار دقت یک کمیت در مقدار بیان شده آن مستتر است. برای مثال وقتی می‌گوییم که وزن یک توپ ۲۳۵ gr است به خطای آن که برابر ۱ gr می‌باشد هم اشاره کرده‌ایم به عبارتی وزن توپ $235 \pm 1gr$ می‌باشد.

چند مثال:

$3.25s \rightarrow$ سه رقم معنادار $\rightarrow 3.25 \pm 0.01s$

$3.0gr \rightarrow$ دو رقم معنادار $\rightarrow 3.0 \pm 0.1gr$

$0.042\,A \rightarrow$ دو رقم معنادار (صفرهای قبل از ۴۲ ارقام معنادار محسوب نمی‌شوند) $\rightarrow 0.042 \pm 0.001A$

بهتر است این کمیت بدین صورت نمایش داده شود(عدد نویسی علمی) $4.2 \times 10^{-2}\,A = 42\,mA$

$30cm \rightarrow$ یک رقم معنادار (قرارداد مرجع(۳) فصل ۱) $\rightarrow 30 \pm 10cm \rightarrow 3 \times 10^1 cm$

$30.cm \rightarrow$ دو رقم معنا دار(قرارداد مرجع(۳) فصل ۱) $\rightarrow 30 \pm 1cm \rightarrow 3.0 \times 10^1 cm$

این دو شیوه نوشتن اصلا توصیه نشده است و بهتر است به دو شکل سمت راست نوشته شود تا گیج کننده نباشد.

۶-۱- قوانین حاکم بر ارقام معنادار

همان‌طور که می‌بینید در مفهوم ارقام معنادار خطای هر کمیت توانی از ۱۰ می‌باشد یا در واقع به این شکل ساده شده است. این ساده‌سازی قوانین ساده‌ای را به دنبال خواهد داشت.

قانون ۱: تعداد رقم‌های اعشار مجموع یا تفاوت دو کمیت برابر تعداد رقم‌های اعشار کمیتی است که کمترین رقم اعشار را دارد.

مثال:

$$22.0cm + 35cm = 57cm$$
$$42.1s + 2.12s = 44.2s$$
$$12.6gr - 2gr = 11gr$$

که ۱۰/۶ به ۱۱ گرد شده است.

اثبات:

* فصل ۷ بخش ٤ مرجع(۱) به تحلیل آزمایشی برای اندازه گیری دقیق g تا ۷ رقم اعشار می پردازد.

از بخش ۵-۲ داشتیم:

$$y = x_1 + x_2 \Rightarrow (\Delta y)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2$$
$$y = x_1 - x_2 \Rightarrow (\Delta y)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2$$

Δx_1 و Δx_2 یا مساوی‌اند یا حداقل به اندازه ضریب ۱۰ با هم تفاوت دارند (فرض می‌کنیم $\Delta x_1 > \Delta x_2$ یعنی x_1 کمیتی است که رقم اعشاری کمتری دارد) که در حالت اول $\Delta y = \sqrt{2}\Delta x_1 \approx \Delta x_1$ و در حالت دوم Δx_2 قابل صرف نظر است $(\Delta x_1)^2 \geq 100(\Delta x_2)^2$ که نتیجه می‌شود $\Delta y = \Delta x_1$ یعنی قانون ۱.

__قانون ۲__: تعداد ارقام معنادار حاصل‌ضرب یا نسبت دو کمیت برابر تعداد ارقام معنادار کمیتی است که کمترین ارقام معنادار را داراست.

__مثال__:

$$5.1cm \times 2.42cm = 12cm$$
$$\frac{5m}{24s} = 0.2\frac{m}{s}$$

__اثبات__: از بخش ۵-۲ داشتیم:

$$y = x_1 \times x_2 \Rightarrow (\frac{\Delta y}{y})^2 = (\frac{\Delta x_1}{x_1})^2 + (\frac{\Delta x_2}{x_2})^2$$
$$y = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow (\frac{\Delta y}{y})^2 = (\frac{\Delta x_1}{x_1})^2 + (\frac{\Delta x_2}{x_2})^2$$

فرض کنید $x_1 = 2.35s$ درنتیجه $\frac{\Delta x_1}{x_1} = \frac{0.01s}{2.35s} \approx 10^{-2}$ در واقع می‌خواهیم بیان کنیم که در حالت کلی $\frac{\Delta x}{x} \approx 10^{N-1}$ که N تعداد ارقام معنادار کمیت x می‌باشد حال اگر فرض کنیم $\Delta x_1 > \Delta x_2$ با همان استدلال اثبات قبلی ثابت می‌شود که $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1}$ یعنی قانون ۲.

__۲-۶- چند نکته مهم__

۱- در محاسبات طولانی شامل چندین جمع و تفریق و ضرب و تقسیم محاسبات را به طور کامل انجام می‌دهیم و قوانین را روی نتیجه نهایی اعمال کرده و در صورت لزوم گرد می‌کنیم.

__مثال__: محاسبه زیر با ماشین حساب ...۲۱۹۷/۴۱۴۵ به دست آمده که به مقداری که می بینیدگرد شده است.

$$\frac{161.032s + 5.6s + 32.45s}{2.12kg} \times 23.4m = 2.20 \times 10^3 \frac{m.s}{kg}$$

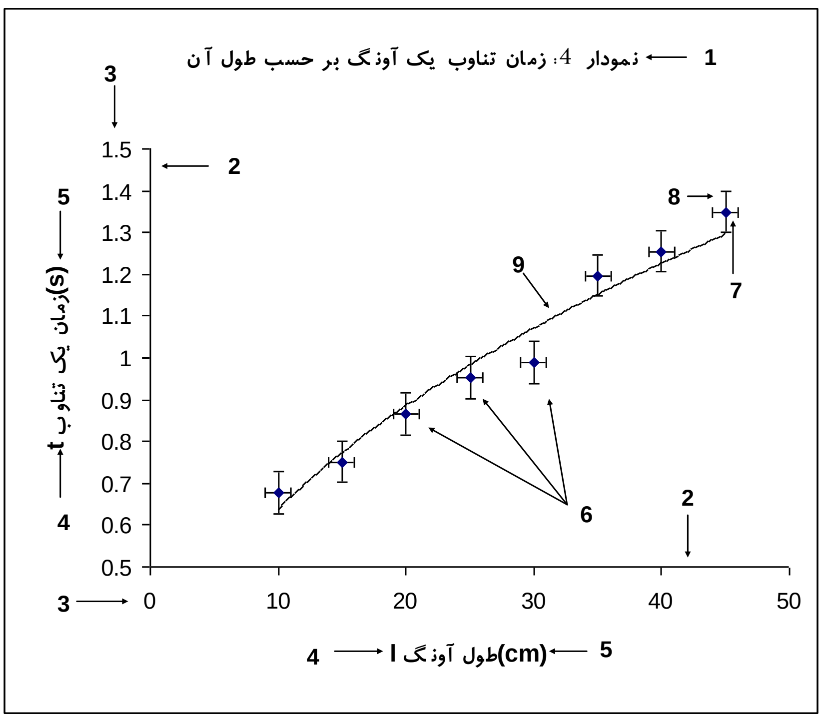
۲- بعضی اعداد در محاسبات دقت کامل دارند مثل $\frac{1}{2}$ در معادله $h = \frac{1}{2}gt^2$ که یک مقدار تجربی نمی‌باشد. با آنها طوری برخورد می‌شود گویا تعداد ارقام معنا دار آن بی‌نهایت است مثلا در اینجا $\frac{1}{2} = 0.500000...$.

۷- نمودار

ضرب‌المثلی چینی با این مضمون وجود دارد که "کاری که یک تصویر می‌کند هزار صفحه نوشته نمی‌کند". نمودار نمایش دهنده رابطه یک کمیت وابسته با یک یا دو کمیت مستقل است که در حالت اول نمودار دوبعدی و در حالت دوم سه بعدی می‌باشد*. طبق یک بینش فلسفی، یک کل، اطلاعات بیشتری از مجموع اطلاعات اجزاء آن دارد منظور اینکه یک نمودار به عنوان یک کل نمایش دهنده کمیات، اطلاعاتی را به ما می‌دهد که اگر مقادیرکمیات را در جدولی می‌نوشتیم نمی‌توانستیم به دست آوریم. دیدن رفتارهای کلی کمیات در مقادیر مختلف مثل انتقال فازها، رفتارهای آشوبناک، خطی و غیرخطی بودن و ... در نمودارها کار متداولی است. به کمک نمودارها همچنین می‌توان روابط بین کمیات را در محدوده‌های مختلف حدس زد. حال ببینیم یک نمودار از چه بخش‌هایی تشکیل شده است.

۱-۷- *بخش‌های مختلف یک نمودار*

برای بررسی بخش‌های یک نمودار، از یک مثال استفاده می‌کنیم. نمودار زیر رابطه دوره تناوب یک آونگ را بر حسب طول آن به نمایش می‌گذارد. این نمودار حاصل جدول زیر است:



طول آونگ $l(cm)\pm 1cm$	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵
زمان یک تناوب $t(s)\pm 0.05s$	۰/۶۸	۰/۷۵	۰/۸۷	۰/۹۵	۰/۹۹	۱/۲۰	۱/۲۶	۱/۳۴

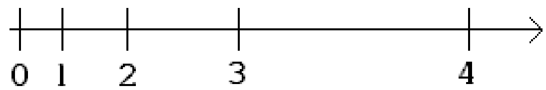
یک نمودار نشان دهنده رابطه یک کمیت وابسته با یک کمیت مستقل است $y = f(x)$. حال به قسمت‌های مختلف نمودار ۴ می‌پردازیم:

۱- عنوان: شامل شماره نمودار و توضیحی در مورد آن است.

* ما در اینجا فقط با نمودارهای دو بعدی کار می کنیم. تعمیم مطالب این بخش به نمودارهای سه بعدی کار ساده ای است.

۲- محورها: محور افقی متعلق به کمیت مستقل x و محور عمودی متعلق به کمیت وابسته $y = f(x)$ می‌باشد.

۳- درجه‌بندی محورها: هر محور باید دارای مبدا و مدرج باشد البته ممکن است مبدا آن در نمودار قرار نگیرد مثل محور عمودی همین نمودار. مکان مبدا و درجه‌بندی محورها باید به گونه‌ای باشد که نقاط نمودار(داده‌های آزمایش) قسمت اعظم نمودار را اشغال کند تا اطلاعات دقیق‌تری را از آنها بتوان گرفت. یک نکته قابل توجه این است که ما عادت کرده‌ایم که فاصله بصری درجات یک محور از هم یکی باشد اما این کار هیچ لزومی ندارد شکل زیر نمونه‌ای از این تخطی می‌باشد:



حال چه لزومی دارد از این خرق عادت‌ها صورت بگیرد؟ کمی صبر کنید دلیلش را خواهید فهمید.

۴- نام کمیت متعلق به هر محور

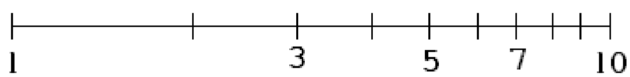
۵- واحد هر کمیت

۶- داده‌های تجربی ما

۷و۸- خطوط خطا: این خطوط خطای هر مقدار را نمایش می‌دهد. ۷ خطای کمیت مستقل و ۸ خطای کمیت وابسته می‌باشد و اندازه آنها دو برابر اندازه خطای هر مقدار می‌باشد. رسم این خطوط همیشه لزومی ندارد اما برای تعیین معادلات حاکم بر نمودار سودمند هستند.

۹- بهترین منحنی یا تابع عبوری: این منحنی یک منحنی هموار است که از میان نقاط نمودار عبور داده شده است و بهترین تابعی است که می‌توان برای این کمیات در محدوده مشخص حدس زد.

حال برمی‌گردیم به سوالی که چند خط پیش مطرح شد. جواب این است که آزمایشگران دوست دارند نمودارهایشان خطی باشد یا حداقل از لحاظ بصری به شکل خط باشد اما مشکل اینست که همه نمودارها خطی نیستند. می‌توان کلکی زد و درجه‌بندی محورها را طوری دستکاری کرد تا نمودار حاصل ظاهرا به شکل یک خط درآید. راستش را بخواهید این کلک به ندرت سودمند می‌باشد ولی برای برای تابع‌هایی که به دو شکل $y = ae^{bx}$ و $y = ax^b$ می‌باشد کارآیی خوبی دارد اما چگونه؟ ما یک محور بدین شکل می‌سازیم که فاصله بصری هر دوعدد متناسب با تفاضل لگاریتم آنها می‌باشد به این محور، محور لگاریتمی گفته می‌شود.



کاربرد های نمودارهای نیم لگاریتمی و تمام لگاریتمی:

اگر در نمودار هر دو محور لگاریتمی باشد به آن نمودار تمام لگاریتمی گفته می‌شود و توابع به شکل $y = ax^b$ در آن خطی دیده می‌شوند و اگر فقط محور عمودی لگاریتمی باشد به آن نمودار نیم لگاریتمی گفته می‌شود و توابع به شکل $y = ae^{bx}$ خطی دیده می‌شوند. دو نوع کاغذ رسم برای رسم این نمودارها وجود دارد به نام کاغذ لگاریتمی و کاغذ نیم لگاریتمی. کاغذ میلی‌متری هم برای رسم منحنی‌های معمولی می‌باشد.

نمودار نیم لگاریتمی:

$y = ba^x$

$$\ln y = \ln a \, x + \ln b$$

پس اگر وابستگی کمیت وابسته به کمیت مستقل به صورت نمایی (توانی) باشد، وابستگی لگاریتم کمیت وابسته به کمیت مستقل بهصورت خطی خواهد بود. علاوه بر این به کمک شیب نمودار نیم لگاریتمی می توان پایه ی نما را به دست آورد.

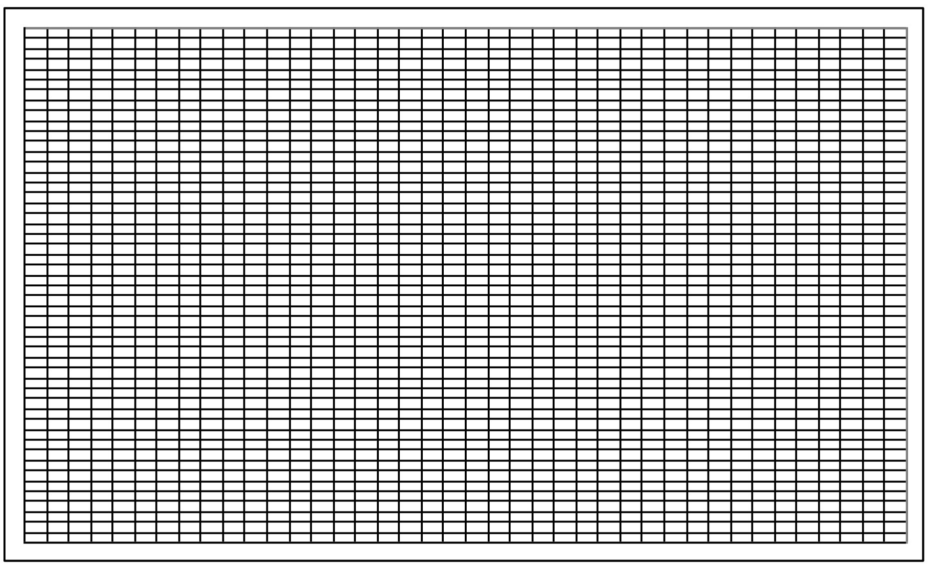
نمودار تمام لگاریتمی:

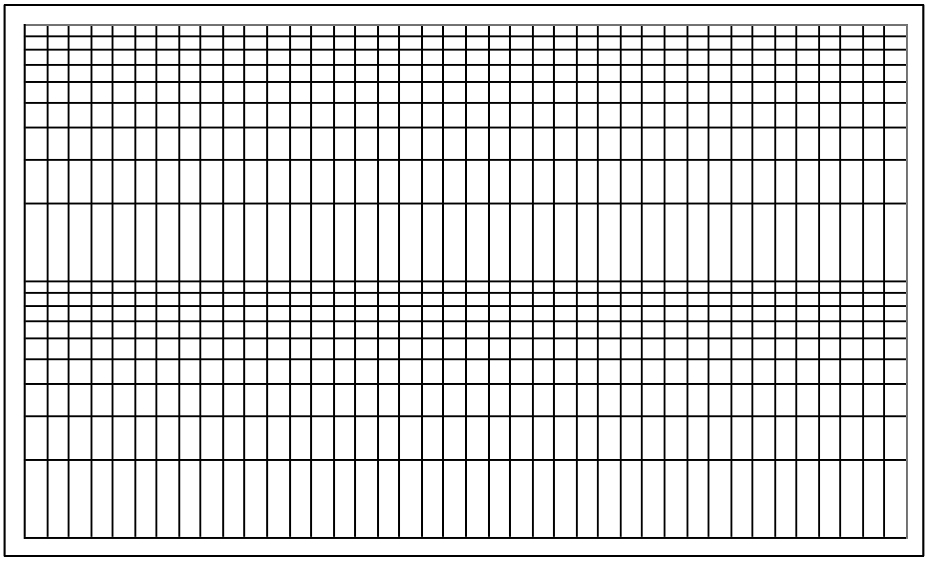
$$y = bx^a$$

$$\ln y = a \ln x + \ln b$$

پس اگر وابستگی کمیت وابسته به کمیت مستقل به صورت چند جمله ای باشد، وابستگی لگاریتم کمیت وابسته به لگاریتم کمیت مستقل به صورت خطی خواهد بود. علاوه بر این به کمک شیب نمودار لگاریتمی می توان توان را به دست آورد. به عنوان مثال برای تعیین وابستگی نیروهای کولنی و گرانشی به فاصله از نمودارهای تمام لگاریتمی استفاده می کنند .

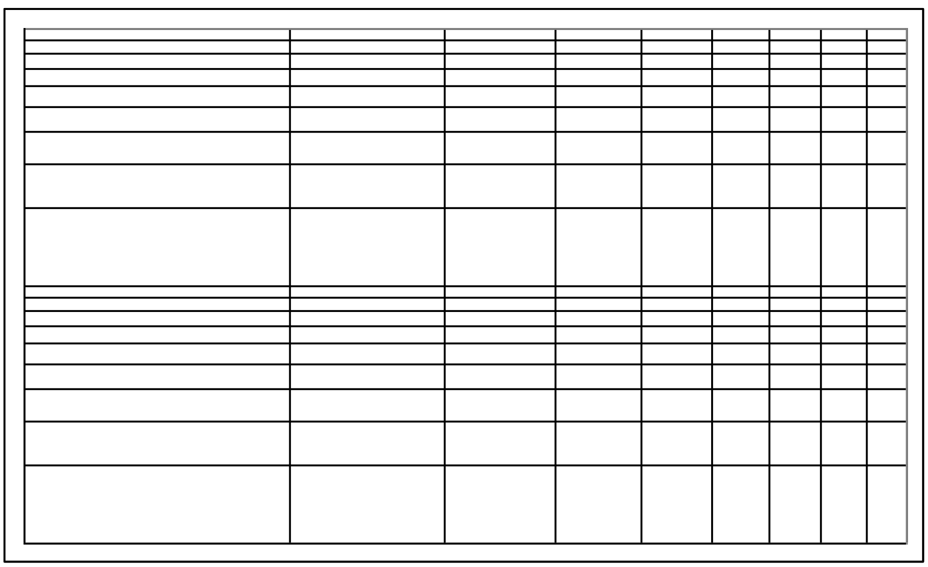
کاغذ میلی‌متری





کاغذ نیم لگاریتمی

کاغذ تمام لگاریتمی



۲-۷- بهترین خط عبوری و روش کمترین مربعات

در نمودارهایی که خط نسبتا راستی می‌توان از میان نقاط آن عبور داد شیب و عرض از مبدا کمیت‌های مهمی هستند .

مثال: در آزمایش آونگ رابطه روبرو برقرار است: $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow t^2 = \frac{4\pi^2}{g} l$

پس انتظار می‌رود از روی شیب نمودار t^2 بر حسب l یعنی $\frac{4\pi^2}{g}$ بتوان مقدار g را حساب کرد.

به کمک معادلات زیر از روی مجموعه مختصات نقاط موجود آزمایش یعنی (x_i, y_i) (که x_i ،iامین کمیت مستقل و y_i کمیت وابسته مرتبط می‌باشد) می‌توان شیب بهترین خط عبوری (a)، خطای آن (Δa)، عرض از مبدا (b) و خطای آن (Δb) را محاسبه کرد*:

* برای اثبات این روابط به فصل ٤ مرجع(١) مراجعه کنید

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}, b=\bar{y}-a\bar{x}, \Delta a\approx\sqrt{\frac{1}{D}\frac{\sum_{i=1}^{N}{d_i}^2}{N-2}}, \Delta b\approx\sqrt{(\frac{1}{N}+\frac{\bar{x}^2}{D})\frac{\sum_{i=1}^{N}{d_i}^2}{N-2}}$$

که $d_i=y_i-ax_i-b, D=\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2$

اگر بهترین خطی که از مبدا می‌گذرد مورد نظر باشد، شیب خط و خطای آن از معادله زیر به دست می‌آید:

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_iy_i}{\sum_{i=1}^{N}{x_i}^2}, \Delta a\approx\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}{x_i}^2}\frac{\sum_{i=1}^{N}{d_i}^2}{N-1}}$$

مثالی از این حالت همین نمودار t^2 بر حسب l می باشد که در بالا بررسی شد.

در ضمن بدست آوردن این مقادیر از روی خود نمودار هم ممکن است کافیست بهترین خطی که با چشم تشخیص داده می‌شود از میان نقاط عبور داده و با انتخاب دو نقطه با فاصله نسبتا زیاد شیب خط عبوری که برابر $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ می‌باشد را حساب کرد. در ضمن چون درجه‌بندی‌های دو محور افقی و عمودی از یک جنس و اندازه نیست استفاده از $tg\theta$ برای محاسبه شیب کار درستی نیست.

در قسمت ۹-۲ نحوه محاسبه این مقادیر توسط کامپیوتر بیان می‌شود.

۲-۸- محاسبه رگراسیون

فرض کنید دو سری کمیت اندازه گیری شده در اختیار دارید(کمیت x و y). می خواهیم رابطه ای بین این دو کمیت برقرار کنیم.بعد از برازش داده ها (fit کردن) ،یک منحنی به صورت $Y=f(x)$ به دست می آید.حال سه ستون داریم که به صورت x وy (اندازه گیری شده) وY (پیش بینی شده) هستند. کمیت r^2 همبستگی بین y وY را می سنجد.برای محاسبه ی r^2 به صورت زیر عمل کنید:

۱) ابتدا متوسط y رامحاسبه کنید ($\bar{y}$)

۲) مجموع $S_1=\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{Y})^2$ را حساب کنید.

۳- مجموع $S_2=\sum_{i=1}^{N}(Y_i-\bar{y})^2$ را حساب کنید.

۴-کمیت r^2 به صورت $r^2=\frac{S_2}{S_1}$ است.

ملاحضه می شود که در صورتی که y_i و Y_i یکسان باشند مقدار r^2 برابر یک خواهد بود یعنی در حالت $r^2=1$ بهترین برازش به دست می آید.

۸- قواعد نوشتن گزارش کار

هر آزمایش از جهت نظم و ترتیب و ماندگاری نتایج به دست آمده، نیاز به یک گزارش مکتوب دارد که باید بر طبق نظم و قواعد خاصی استوار باشد. در زیر به موارد لازم در هر گزارش کار آزمایشگاهی اشاره می‌کنیم:

۱- مشخص کردن عنوان و هدف از انجام هر بخش آزمایش و ذکر وسایل مورد استفاده

۲- رسم شکل که نحوه انجام آزمایش را نشان می‌دهد(شکل هایی که طرز چیدن وسایل را نشان می‌دهد): شکل در حد ممکن ساده باشد پس نقاشی نکنید.

۳- ارائه توضیح مختصر اما کافی درباره نحوه آزمایش و نکات اندازه‌گیری

۴- ارائه جدول‌های اندازه‌گیری : کمیت و واحد آن یادتان نرود.

۵- به دست آوردن کلیه روابط لازم برای انجام محاسبات (در صورتی که روابط واضح نباشد)

۶- رسم نمودارهای لازم برای تحلیل آزمایش.

۷- محاسبات عددی لازم برای محاسبه مجهولات.

۸- محاسبه خطاهای کمیت‌های موجود که اندازه‌گیری یا محاسبه شده‌اند.

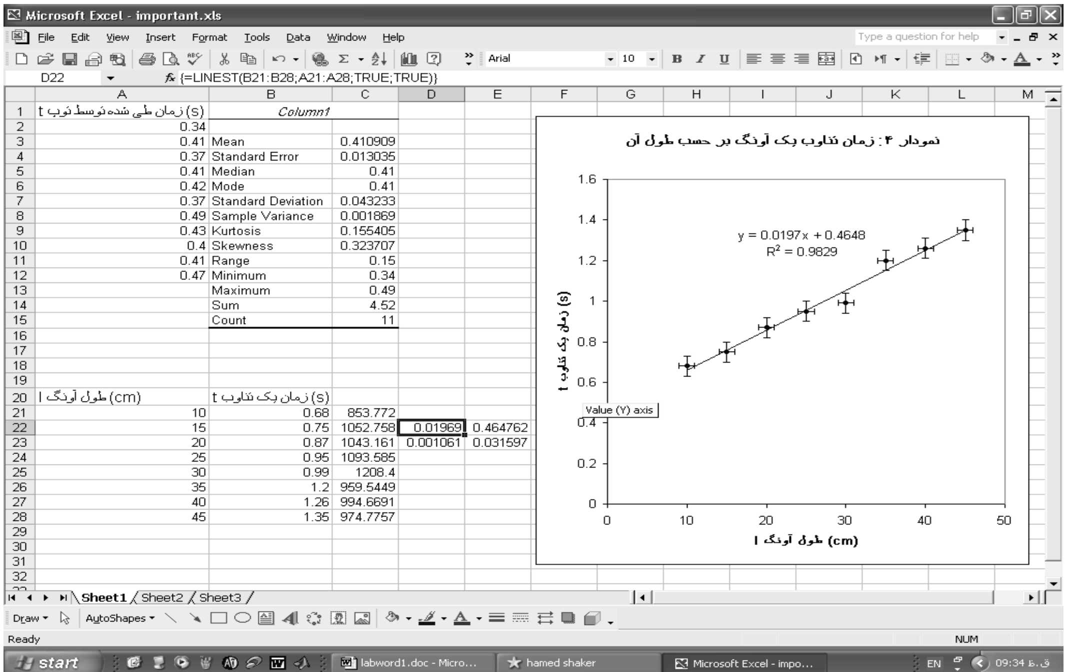
۹- ذکر عوامل خطاهای آزمایش به صورت مجزا و ارائه پیشنهادهای عملی برای رفع آنها و در صورت لزوم انجام آن

۹- کار با نرم افزار *Excel*

Excel جزء آن دسته از نرم افزارهایی است که به نرم افزارهای صفحه گسترده معروفند. شما می‌توانید در محیط *Excel* تمامی گزارش کار خود را بنویسید کافیست مقادیر آزمایش را بنویسید، *excel* به شما امکاناتی می‌دهد تا اطلاعات لازم را از آنها بگیرید، محاسبات لازم را روی آنها انجام دهید، نمودارهای مربوط به آنان را رسم کنید و ... .

۹-۱- گرفتن اطلاعات آماری از مجموعه‌ای از مقادیر

می‌خواهیم اطلاعات لازم را از داده‌های آزمایش ابتدای ۴-۲ بگیریم. اعداد را در ستون *A* از ردیف ۲ تا ۱۲ وارد کرده (خانه های *A2* تا *A12*) سپس از منوی *Tools* گزینه *Data Analysis* را انتخاب کنید (اگر چنین گزینه‌ای وجود نداشت گزینه *...Add-Ins* را انتخاب کرده و در پنجره‌ای که باز می‌شود *Analysis Toolpak* را علامت بزنید سپس دکمه *OK* را فشار دهید. احتمالا از شما خواسته می‌شود سی دی *Office* را درون درایو قرار دهید). حال در پنجره *Data Analysis* گزینه *Descriptive Statistic* را انتخاب کنید.



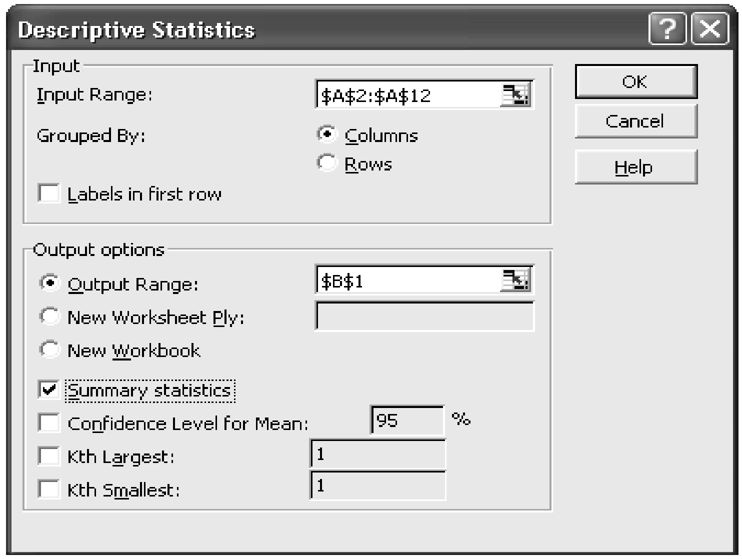
در قسمت *Input Range* آیکون را انتخاب کنید. اشاره‌گر ماوس را روی *A2* آورده و دکمه سمت چپ را نگه داشته سپس اشاره‌گر را به *A12* برده و دکمه ماوس را رها کنید. دوباره آیکون را انتخاب کنید تا به پنجره اولیه برگردید. حال در قسمت *Output options* گزینه *Output Range:* را علامت زده سپس آیکون مربوطه را انتخاب کنید سپس *B1* را انتخاب کرده و دوباره آیکون را انتخاب کنید(*B1* محل شروع اطلاعات است). حال *Summary statistics* را علامت زده سپس *OK* را فشار دهید. اکنون می‌توانید اطلاعات را ببینید.

می‌توانید ستون *B* را برای دیدن اطلاعات بزرگ کنید به خط بین *B* و *C* که در شکل مشخص شده است بروید

ماوس به این شکل در می‌آید حال دکمه سمت راست را نگه داشته و اندازه این ستون را تغییر دهید.

Mean : میانگین ، *Standard Error* : خطای استاندارد σ_m، *Standard Deviation* : انحراف استاندارد σ

Minimum: کمترین مقدار موجود ، *Maximum*: بیشترین مقدار موجود، *Sum*: مجموع ، *Count*: تعداد ارقام



۲-۹- *رسم نمودار*

می‌خواهیم نمودار ۴ بخش ۷-۱ را رسم کنیم.

طول آونگ را در ستون *A* (*A21-A28*) و زمان یک تناوب را در ستون *B* (*B21-B28*) مقابل طول متناظر نوشته سپس علامت  در بالای صفحه یا گزینه *Chart* از منوی *Insert* را انتخاب کنید. در قسمت *Standard types* گزینه *XY(Scatter)* را انتخاب کرده و دکمه *Next>* را فشار دهید. سپس در قسمت *Data range* آیکون مربوطه را انتخاب کنید. حال ماوس را روی *A21* آورده، دکمه سمت چپ را نگه داشته و ماوس را تا *B28* حرکت دهید و دکمه ماوس را رها کنید. با انتخاب آیکون به حالت اول برگشته و دکمه *Next>* را فشار دهید.

در قسمت *Titles* می‌توانید عنوان نمودار و نوشته های هر محور را مشخص کنید.

انتخاب‌های زیر را انجام می‌دهیم:

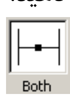
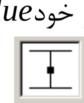
Chart title : " نمودار۴: زمان تناوب آونگ بر حسب طول آن "

Value (X) axis : "*l* طول آونگ (*cm*) "

Value (Y) axis : "*t* زمان یک تناوب (*s*)"

حال دکمه *Next>* و سپس دکمه *Finish* را فشار دهید. نمودار کشیده می‌شود. شما هر تغییری که لازم دیدید می‌توانید روی نمودار انجام دهید مثلا هر قسمت را که نخواستید آن را انتخاب کرده و دکمه *Delete* را فشار دهید.

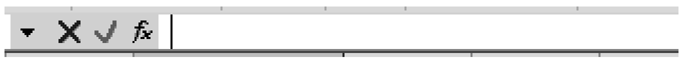
قرار دادن خطوط خطا روی نقاط نمودار

ماوس را روی یکی از نقاط روی نمودار برده و دکمه سمت راست ماوس را فشار دهید. در منویی که باز می‌شود گزینه *Format Data Series...* را انتخاب کنید. حال به قسمت *X Error Bars* رفته و  را انتخاب کرده و مقدار خطا را در قسمت *Fixed Value* بنویسید که برابر ۱ *cm* می‌باشد و خود*Fixed Value* را علامت بزنید. همین کار را با *Y Error Bars* انجام داده که خطای آن برابر ۰/۰۵*s* می‌باشد و این دفعه  را انتخاب می‌کنیم.

رسم منحنی های عبوری مختلف از نقاط نمودار

روی یکی از نقاط نمودار رفته و دکمه سمت راست را فشار دهید سپس گزینه *...Add Trendline* را انتخاب کنید. در قسمت *Type* ، *Linear* را انتخاب کنید یعنی می‌خواهید یک خط از میان نقاط عبور دهید. حال به قسمت *Options* رفته و *Display equation on chart* و *Display R-squared value on chart* را علامت بزنید سپس دکمه *OK* را فشار دهید. خط عبوری و معادله آن و مقدار R^2 که معیاری برای میزان تطبیق کمیات با نمودار می‌باشد را مشاهده می‌کنید. می‌توانید منحنی‌های دیگری مثل منحنی توانی (*Power*) هم عبور دهید فقط کافیست در قسمت *Type* آن را مشخص کنید.

اگر می‌خواهید خطای a و b در خط عبوری پیدا کنید($y = ax + b$) ماوس را به *D22* برده و دکمه سمت چپ را نگه داشته تا *E23* می‌کشیم حال در قسمت بالای صفحه که در شکل زیر مشخص شده است  را انتخاب می‌کنیم.

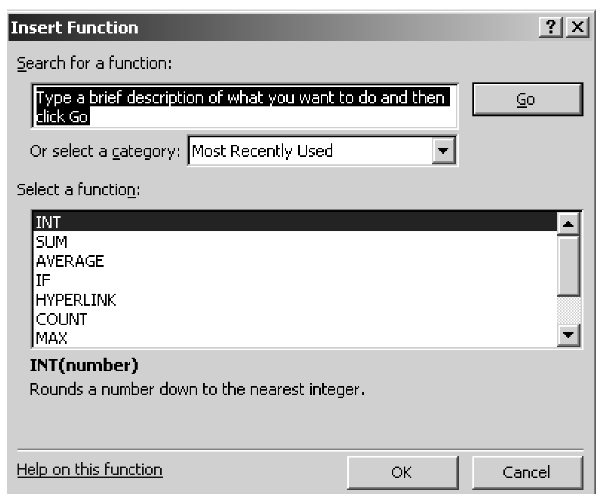


در قسمت *Select a function* تابع *LINEST* را انتخاب کرده و *OK* را فشار دهید. در *Known_y's* خانه *B21* تا *B28* را انتخاب کرده (به همان طریقی که قبلا آشنا شده اید) و در *Known_x's* خانه *A21* تا *A28* را انتخاب می‌کنید. قسمت *Const* و *Stats* را برابر *true* قرار دهید. حال کلیدهای *ctrl+shift+enter* را با هم فشار دهید. ستون اول مقدار و خطای a و ستون دوم مقدار و خطای b می‌باشد.

نکته: اگر *Const* را برابر *false* قرار دهید بیان کرده‌اید که خط از مبدا عبور می‌کند.

محورهای لگاریتمی

روی یکی از محورها که می خواهید لگاریتمی بشود بروید و دکمه سمت راست ماوس را فشار دهید. حال گزینه *...Format Axis* را انتخاب کنید. در قسمت *Scale* گزینه *Logarithmic scale* را علامت زده و *OK* را فشار دهید.



۳-۹- *بعضی کارهای محاسباتی*

در آزمایش آونگ طبق تئوری می‌دانیم $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = 4\pi^2 \frac{l}{t^2}$. می‌خواهیم به ازای هر طول و زمان g مربوطه را حساب کنیم. ماوس را به خانه *C21* برده و بنویسید *=4*PI^2*A21/B21^2* و دکمه *enter* را فشار دهید. مقدار g در سطر ۲۱ محاسبه می‌شود. حالا ماوس را روی *C21* برده و دکمه سمت راست ماوس را فشار داده و گزینه *Copy* را انتخاب کنید. حال ماوس را روی *C22* برده و دکمه سمت چپ ماوس را نگه داشته تا *C28*

کشیده و سپس رها کنید. روی قسمت انتخاب شده دکمه سمت راست را فشار داده و گزینه *Paste* را انتخاب کنید. همه g ها محاسبه می شوند طبق واحد $\frac{cm^2}{s}$.

در انتها توصیه می‌شود برای استفاده‌های بیشتر و کامل‌تر به کتاب‌هایی که در زمینه *Excel* نوشته شده اند مراجعه کنید.

مراجع

۱- فیزیک عملی، ج.ل. اسکوایرز، ترجمه محمد علی شاهزمانیان و محمد حسن فیض، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول ۱۳۷۰
۲- خطاهای مشاهده و محاسبه آن، تاپینگ ج. ، ترجمه محسن تدین، مرکز نشر دانشگاهی ۱۳۶۴
۳- شیمی عمومی جلد اول، چارلز مورتیمر، ترجمه علی پورجوادی،... مرکز نشر دانشگاهی، چاپ پنجم ۱۳۷۸