حل تمرین سری پنجم مکانیک کوانتومی ۱

---

۱ - الف : ویژه مقادیر انرژی عبارت اند از :

$$E_{1,2} = \pm E_0$$

ویژه حالت های هامیلتونی به صورت زیر اند :

$$|E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

پس از اندازه گیری بردار حالت سیستم به ویژه بردار متناظر با مقدار بدست آمده فرو می پاشد. ب:یک راه این است که ابتدا اپراتور تحول زمانی

$$\mathbb{U} = e^{\frac{-i\mathbb{H}t}{\hbar}}$$

را بدست آورد و با اعمال آن روی حالت اولیه ، حالت در زمان t را بدست آورد . با استفاده از تجزیه ی طیفی هامیلتونی داریم :

$$\mathbb{H} = E_0(|E_1\rangle\langle E_1| - |E_2\rangle\langle E_2|)$$

$$\mathbb{U}(t,0) = (e^{\frac{-iE_0t}{\hbar}}|E_1\rangle\langle E_1| + e^{\frac{iE_0t}{\hbar}}|E_2\rangle\langle E_2|) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{-iE_0t}{\hbar}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + e^{\frac{iE_0t}{\hbar}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathbb{U}(t,0) = \begin{pmatrix} \cos\frac{E_0t}{\hbar} & -i\sin\frac{E_0t}{\hbar} \\ -i\sin\frac{E_0t}{\hbar} & \cos\frac{E_0t}{\hbar} \end{pmatrix}$$

حالت در زمان t برابر است با :

$$|\psi(t)\rangle = \mathbb{U}(t,0)|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{E_0t}{\hbar} \\ -i\sin\frac{E_0t}{\hbar} \end{pmatrix}$$

یک راه دیگر این است که بطور مستقیم معادله ی تحول حالت را حل کنیم :

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \mathbb{H}|\psi\rangle$$

با فرض :

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

داریم :

$$i\hbar\frac{dx}{dt} = E_0 y(t) \qquad i\hbar\frac{dy}{dt} = E_0 x(t)$$

دستگاه معادلات فوق جفت شده است . با بالا بردن مرتبه معادلات این جفت شدگی را از بین می بریم :

$$i\hbar\frac{d^2x}{dt^2} = E_0\frac{dy(t)}{dt} = \frac{E_0^2}{i\hbar}x(t)$$

پس :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{E_0^2}{\hbar^2}x(t)$$

جواب معادله ی فوق با استفاده از شرایط اولیه به صورت زیر است :

$$x(t) = \cos\frac{E_0 t}{\hbar}$$

بطور مشابه :

$$E_0 y(t) = i\hbar\frac{dx}{dt} = -iE_0\sin\frac{E_0 t}{\hbar} \Longrightarrow y(t) = -i\sin\frac{E_0 t}{\hbar}$$

یک راه دیگر همایین است که حالت اولیه ی سیستم را در پایه ی ویژه بردار های انرژی بنویسیم . در این صورت عملگر تحول ساده می شود .

ب : چون مشاهده پذیر قطری است ، ویژه بردارمتناظر با ویژه مقدار ۲ برابر است با :

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

احتمال بدست آوردن این مقدار برابر مربع اندازه ی تصویر حالت سیستم در زمان t روی ویژه بردار متناظر است :

$$P(a=2) = |\langle\psi(t)|2\rangle|^2 = \sin^2\frac{E_0 t}{\hbar}$$

ت : مقدار چشمداشتی عملگر در زمان t برابر است با :

$$\langle A\rangle_t = \langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \cos^2\frac{E_0 t}{\hbar} + 2\sin^2\frac{E_0 t}{\hbar} = 1 + \sin^2\frac{E_0 t}{\hbar}$$

ث : طبق تعریف عدم قطعیت مشاهده پذیر A برابر است با :

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle_t - \langle A\rangle_t^2}$$

$$\Delta A = \sqrt{1 + 3\sin^2\frac{E_0 t}{\hbar} - (1 + \sin^2\frac{E_0 t}{\hbar})^2} = \sqrt{\sin^2\frac{E_0 t}{\hbar} + \sin^4\frac{E_0 t}{\hbar}}$$

۲ –الف :تابع موج فضای تکانه تبدیل فوریه ی تابع موج مکان است :

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-ikx}dx = \frac{(\pi d^2)^{-1/4}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2d^2}e^{-ikx}dx$$

$$-(\frac{x^2}{2d^2} + ikx) = -(\frac{x}{d\sqrt{2}} + \frac{ikd}{\sqrt{2}})^2 - \frac{k^2d^2}{2}$$

$$\phi(k) = \frac{(\pi d^2)^{-1/4}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2 d^2}{2}} \times d\sqrt{2\pi} = (\frac{d^2}{\pi})^{1/4} e^{-\frac{k^2 d^2}{2}}$$

ب :

$$\phi(p,t) = \langle p|\phi(t)\rangle = \langle p|\mathbb{U}(0,t)|\phi(0)\rangle = \langle p|e^{-\frac{iP^2 t}{2m\hbar}}|\phi(0)\rangle$$

با اعمال اپراتور تحول از راست به پایه ی تکانه ،چون هر پایه ی تکانه ویژه حالت تکانه و هر تابعی از تکانه است ،پس :

$$\phi(p,t) = e^{-\frac{iP^2 t}{2m\hbar}}\langle p|\phi(0)\rangle = e^{-\frac{iP^2 t}{2m\hbar}}\phi(p,0)$$

پ : برای بدست آوردن نمایش تابع موج در مختصات مکان کافی است تبدیل فوریه نمایش فضای تکانه را حساب کنیم :

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\phi(p,t)e^{\frac{ipx}{\hbar}} = (\pi d^2)^{-1/4}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{it\hbar}{md^2}}}e^{-\frac{x^2}{2d^2}\frac{1}{1+\frac{it\hbar}{md^2}}}$$

ت :

$$\langle P\rangle = \int p|\phi(p)|^2 dp$$

عبارت زیر انتگرال تابعی فرد از تکانه است و حاصل انتگرال صفر می شود .

$$\langle P\rangle = 0$$

$$\langle P^2\rangle = \int p^2|\phi(p)|^2 dp = (\pi d^2)^{-1/2}\int p^2 e^{-\frac{p^2 d^2}{2\hbar^2}}dp = \frac{\hbar^2}{2d^2}$$

$$\Delta P = \frac{\hbar}{\sqrt{2}d}$$

بطور مشابه :

$$\Delta X = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

ث : می دانیم کمینه حاصلضرب عدم قطعیت مکان – تکانه برای بسته موج گاوسی است و برابر است با :

$$\Delta P\Delta X = \frac{\hbar}{2}$$

۳ – با مقایسه ی تابع موج مکان با تعریف عکس تبدیل فوریه ، معلوم می شود که :

$$\phi(k,0) = N\sqrt{2\pi}e^{-|k|/k_0}$$

اما :

$$p = \hbar k$$

$$\phi(p,0) = N\sqrt{2\pi}e^{-|p|/p_0}$$

احتمال یافتن ذره با تکانه ی بین p و $p+dp$ برابر است با :

$$f_P(p)dp = |\phi(p,0)|^2 dp = 2\pi N^2 e^{-2|p|/p_0}dp$$

شرط اینکه عبارت بالا یک تابع چگالی احتمال باشد را می توان با تعیین ضریب نرمال سازی N برقرار نمود . فعلا کاری با آن نداریم .

الف :احتمال مورد نظر برابر است با :

$$P(p_1,0) = \frac{\int_{-p_1}^{P_1} f_P(p)dp}{\int_{-\infty}^{\infty} f_P(p)dp}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_P(p)dp = 4\pi N^2 \int_0^{\infty} e^{-2p/p_0}dp = 2\pi N^2 p_0 \int_0^{\infty} e^{-t}dt = 2\pi N^2 p_0$$

$$\int_{-p_1}^{P_1} f_P(p)dp = 4\pi N^2 \int_0^{P_1} e^{-2p/p_0}dp = 2\pi N^2 p_0 \int_0^{2P_1/p_0} e^{-t}dt = 2\pi N^2 p_0(1 - e^{-2p_1/p_0})$$

$$P(p_1,0) = (1 - e^{-2p_1/p_0})$$

ب :تابع موج فضای تکانه را در زمان های بعدی بدست می آوریم :

$$\phi(p,t) = \langle p|\mathbb{U}|\phi\rangle = e^{-\frac{ip^2t}{2m\hbar}}\langle p|\phi(0)\rangle = e^{-\frac{ip^2t}{2m\hbar}}\phi(p,0)$$

چگالی احتمال به دامنه ی تابع موج بستگی دارد که ثابت است . پس احتمال خواسته شده در همه ی زمان ها برابر است با احتمال در لحظه ی صفر .

موفق باشید .