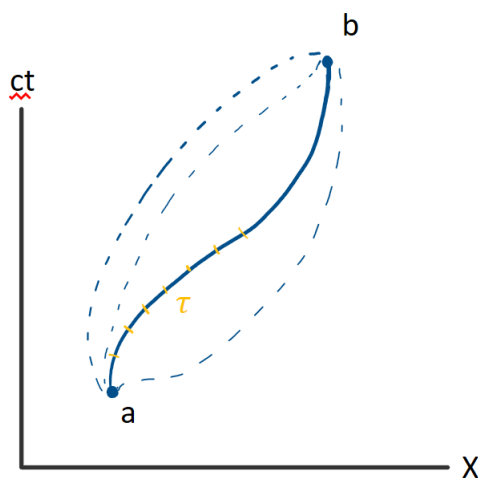


# امواج گرانشی

سونیا سیف آذر نژاد

۷ تیر ۱۴۰۳

مسیر حرکت یک ذره در فضا زمان که آن را به اسم جهان خط نیز میشناسیم؛ در واقع یک خم در فضای مینکوفسکی است. و میتوان این خم را پارامتر دار کرد. به عبارتی خم نشان دهنده‌ی تابعی است که پارامتر  $\tau$  را به یک مختصه‌ی فضا زمانی می‌برد.



حال فرض کنید می‌خواهیم تحول ذره بین دو نقطه‌ی  $a, b$  را بفهمیم؛ و یا به بیان دیگر طول طی شده  $L$  را بسنجیم. میدانیم برای این سنجش نیاز به معیار و سنجه‌ای داریم. که این سنجه همان متریک است. برای این محاسبه یک طول دیفرانسیلی را در نظر بگیرید؛ آن را در متریک فضا زمانی مورد نظر (که اینجا همان فضای تخت مینکوفسکی است) ضرب کنید و روی ابتدا تا انتهای بازه انتگرال بگیرید. این کار را در زیر به شکل ریاضیاتی نشان داده‌ایم.

$$L = \int_a^b \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

منظور از  $\eta$  ماتریس زیر است.

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

از نسبیت خاص به خاطر داریم که طول بالا، کمیتی ناورد است. اگر این نکته برای شما واضح نیست؛ کافیت با دقت بیشتری به ریاضیات آن نگاه کنید. این فرمول معرف دو جمع به ازای دو اندیش تکرار شده است؛ دو اندیسی که ماهیت خاصی از خودشان ندارند. پس عبارت حاصل نیز اسکالری خواهد بود که ناوردایی آن نسبت به دستگاه های مختلف برای ما روشن است.

دوست داریم در عبارتی که بدست آوردیم پارامتر  $\tau$  را هم وارد کنیم. به سادگی با ضرب طرف راست در  $\frac{d\tau}{d\tau}$  به عبارت زیر می‌رسیم.

$$L = \int_a^b d\tau \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

اما در نظر داشته باشید که متریک میتواند شکل های مختلفی داشته باشد و فقط محدود به فضای تخت نیست. از این رو اگر بخواهیم رابطه‌ای کلی برای اندازه‌گیری مسیر در نظر بگیریم، نگارش زیر شیوه‌ی بهتری است.

$$L = \int_a^b d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

از اصل کمترین کنش می‌دانیم مسیر فیزیکی‌ای که ذره انتخاب می‌کند مسیری با طول کمینه است. (اصطلاحاً مسیر ژئودزیک). پس اگر بخواهیم تحول ذره بین دو نقطه‌ی  $a, b$  باید کمینه‌ی مقداری که بعنوان طول بدست آوردیم را محاسبه کنیم. یعنی  $\delta L = 0$

$$\delta L = \int_a^b d\tau \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right)^{-1/2} \left\{ \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\delta x^\beta}{d\tau} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \frac{d\delta x^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right\}$$

مشتق  $L$  را در بالا محاسبه کردیم. درباره‌ی تغییری که در اندیس‌ها داده‌ایم باید توجه کنید که عبارت اول مشتق عبارت رادیکالی است، و مولفه‌های آن صرفاً در مولفه‌های عبارت دوم ضرب خواهند شد. اندیس‌های دامی ممکن است به اشتباه نشان‌دهنده‌ی جمع باشند؛ به همین خاطر میتوان با تغییراندیس از این اشتباه جلوگیری کرد. همانطور که معلوم است مشتق  $L$  عبارت بزرگ (گنده) ایست! اما نگران نباشید در ادامه ساده خواهد شد. و یکی از ترفندهای ما برای این ساده‌سازی استفاده از آزادی پیمانه است. برای توضیح آن از شما می‌خواهم توضیح دهید چرا در مثال ذره پارامتر  $\tau$  را استفاده کردید؟ چرا از پارامتر دیگری استفاده نکردید؟ شما آزاد بودید از هر پیمانه‌ی دلخواهی در آنجا استفاده کنید. همانطور که در اینجا نیز آزادید! میتوانید به پیمانه‌ای بروید (از پارامتری استفاده کنید)، که متغیر زیر در آن یک باشد.

$$\left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right)^{-1/2} = 1$$

و این کار محاسبه‌ی شما را آسان‌تر خواهد کرد.

$$\delta L = \int_a^b d\tau \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\delta x^\beta}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right)$$

برای ادامه‌ی محاسبه نیاز به ترفند دیگری داریم، و آن هم اینکه جمله‌ی اول را به شکل مشتق کل جمله‌ی اول منهای مشتق دو جمله‌ی دیگر ببینیم.

$$\frac{d}{d\tau} \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \sigma x^\beta \right) - \frac{d}{d\tau} \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \sigma x^\beta$$

حال به جمله‌ی  $\int \frac{d}{d\tau} \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \sigma x^\beta \right)$  نگاه کنید. جواب این جمله وردش متغییر در نقطه‌ی ابتدا و انتهای بازه‌ی انتگرال گیری است. اما روشن است که به ازای هر مسیر، وردش دو این دو نقطه صفر است. (اگر براستان واضح نیست دوباره شکل را نگاه کنید)

عبارت را دوباره بازنویسی می‌کنیم.

عبارت را دوباره بازنویسی می‌کنیم و مشتق را نیز اثر می‌دهیم. اندیس سیگما هم یک اندیس دامی است که به ترتیب زیر نوشته شده است.

$$\frac{dg_{\alpha\beta}}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \delta x^\beta = \frac{dg_{\alpha\beta}}{dx^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \delta x^\beta$$

$$\delta L = \int_a^b d\tau \left\{ \left( -g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \delta x^\beta - \frac{dg_{\alpha\beta}}{dx^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \delta x^\beta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \delta x^\sigma \right\}$$

حال به جمله‌ی دوم عبارت نگاه کنید. اگر دقت کنید می‌بینید که هر سه اندیس  $\alpha, \beta, \sigma$  اندیس‌های تکراری هستند؛ یعنی مشخصه‌ی خاصی از خود ندارند و صرفاً معرف یک جمع اند. پس تغییر دادن اسم دو تای

آنها چیزی را عوض نخواهد کرد؛ چرا که صرفاً یک اسم است. پس دو اندیس  $\sigma, \beta$  را جابه‌جا میکنیم.

$$\delta L = \int_a^b d\tau \left\{ -g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} - \frac{dg_{\alpha\beta}}{dx^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right\} \delta x^\beta = 0$$

معنای عبارت بالا این است که انتگرال یک انتگرال ده در یک وردش دلخواه از متغییر صفر شده است. تنها حالتی که این شرایط را برقرار می‌کند صفر بودن انتگرال ده است.

$$-g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

و نهایتاً بعد از انجام یکسری شاده سازی‌ها به معادله‌ی ژئودزیک میرسیم.

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} \left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta} \right) \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$$

برای اینکه حس بهتری به این معادله پیدا کنیم میتوانیم فرم آن را در فضای تخت مینکوفسکی ببینیم. در فضای تخت مشتقات  $g_{\mu\nu}$  ها وجود ندارند و فقط جمله‌ی اول باقی می‌ماند. و جمله‌ی اول همان معادله‌ی خط راست است؛ ما انتظار داریم کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه در فضای تخت، خط راست باشد و جواب معادله مطابق انتظار ماست.

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} \Gamma_{\alpha\sigma}^\gamma \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$$

ممکن است معادله‌ی ژئودزیک را به فرم مقابل نیز ببینید. گاما در آن متغییری است برای به اختصار نوشتن

عبارت داخل پرانتز و به گاما (کوچک) آلفا و سیگما بستگی دارد. (اندیس‌های غیر تکراری)

به گاما سمبل کریستوفر نیز میگویند.

در ادامه عناصری را معرفی میکنیم. علت این کار کمی بعد مشخص خواهد شد. در ضمن کنجکاوی دربارهی خود این مفاهیم نخواهیم کرد و علت معرفی آنها صرفاً ورود به مفهوم مورد نظر است. یعنی آنچه انیشتین در ذهن داشت؛ اما به زبان ریاضی. یکی از آن مفاهیم تانسور ریمان است. اگر نماد کریستوفر را به طرز عجیب غریبی که در زیر نوشته شده با هم ترکیب کنیم به تانسور ریمان میرسیم.

تانسور ریمان:

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} - \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma}$$

و اگر دو تا از مولفه های تانسور ریمان را یکی در نظر بگیریم به تانسور ریچی میرسیم.

تانسور ریچی:

$$R_{\mu\nu}^{\nu} = R_{\mu\rho}$$

اگر دوباره اینکار را بکنیم به اسکالر ریچی میرسیم که همانطور که از اسمش پیداست یک اسکالر است.

اسکالر ریچی:

$$R_{\mu}^{\mu} = R$$

و اگر ترکیب خاصی از خانواده ی ریچی! (تانسور و اسکالر) را در نظر بگیریم به تانسور انیشتین میرسیم.

تانسور انیشتین:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = G_{\mu\nu}$$

و آنچه انیشتین در نظر داشت تساوی زیر است.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{C^4} T_{\mu\nu}$$

تساوی دو موجود که یکی از جنس هندسه و نمایانگر متریک آن فضا زمان است و دیگری تانسور انرژی تکانه که نمایانگر توزیع ماده در فضا زمان است. در واقع آنچه انیشتین سعی در نشان دادنش داشت تناسب بین هندسه و توزیع ماده بود. به بیان دیگر اینکه وقتی از جاذبه‌ی یک جسم سنگین صحبت میکنیم، در واقع از انحنایی که در فضا زمان ایجاد کرده است صحبت میکنیم. و اینکه میگوییم «ما تحت نیروی جاذبه‌ی جسم سنگین به سمت آن کشیده می‌شویم»؛ در واقع بیان غلطی از این واقعیت است که ما درگیر انحنای ایجاد شده توسط جرم آن جسم در فضا زمان شده‌ایم!

حال می‌خواهیم با انحنای کمی در فضای تخت شروع کنیم و معادله‌ی موج را بررسی کنیم. برای این کار ماتریس متریک را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$

اگر این عبارت را در معادله انیشتین قرار داده و تا مرتبه‌ی اول اختلال آن را حل کنیم به معادله‌ی موج میرسیم. (بدست آوردن معادله‌ی موج در این مقوله نمی‌گنجد).

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu} = \partial_2 h_{\mu\nu} = 0$$

در ادامه سعی داریم درباره‌ی ماهیت فیزیکی این موج صحبت کنیم. برای شهود بهتر دریاچه‌ای را تصور کنید که سنگی در آن انداخته‌ایم و بدین واسطه اعوجاجاتی در محیط مادی دریاچه ایجاد کرده‌ایم. به این اعوجاجات محیط دریاچه موج می‌گوییم؛ و متناظراً به اعوجاجات فضا زمان نیز موج می‌گوییم. موج گرانشی!

البته قبل از اینکه به این شهود تکیه کنیم باید مشخص کنیم که تفاوتی اساسی بین موج گرانشی و موجی که در محیط مادی منتشر می شود وجود دارد. در محیط مادی، ماده ای وجود دارد که آن را مختصه بندی و یا پارامتریزه کرده ایم. در این محیط اعوجاجات در ماده اتفاق می افتد و صرفاً به واسطه ی مختصه بندی ما قابل اندازه گیری است؛ و تفاوت اساسی اینکه موج گرانشی، اختلال و اعوجاجی در خود فضا زمان است؛ نه در محیطی مادی!

به روند اختلالی حل مسئله ادامه میدهیم و اینبار سعی داریم موج گرانشی حاصل از اختلال کوچک ایجاد شده در فضا زمان را اندازه گیری کنیم. در ادامه ماتریس اختلال را میبینید:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(t-z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f(t-z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

این ماتریس نمایانگر موج تختی در صفحه ی  $x, y$  است که در راستای  $z$  حرکت میکند. همانطور که قبلاً هم گفتیم اختلالات کوچک اند و  $|f| < 1$

اگر ناوردایی طول را برای متریک  $g_{\mu\nu}$  در نظر بگیریم و با متریک فضا زمان تخت مقایسه کنیم متوجه می شویم تغییراتی در مختصه ی به وجود آمده اند. مجدداً تکرار میکنیم که این اعوجاجات در خود فضا زمان اتفاق می افتند و نه در پارامتریزه کردن ما.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1 + f(t-z))dx^2 + (1 + f(t-z))dy^2 + dz^2$$

حال فرض کنید که می‌خواهیم امواج گرانشی را با دو جسم ساکن  $A, B$  که در مختصات زیر هستند پیدا کنیم. برای پاسخ دادن به این سوال لازم است ابتدا بدانیم که اثر موج گرانشی بر معادله‌ی ژئودزی چیست؟ اعوجاج فضا زمان باعث تغییر در کدام بخش این معادله می‌شود؟ قبلتر اعوجاجات را تغییر در خود فضا زمان دانستیم. خود هندسه فضا زمان! پس انتظار داریم ماهیت هندسی‌ای که در این معادله وجود دارد دستخوش تغییر شود. یعنی نماد کرستوفر.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} t_B & x_B & y_B & z_B \end{pmatrix}$$

پس در حل معادله‌ی ژئودزی فقط تغییرات متریک وجود دارند. توجه شود از آنجایی که ضرایب نماد کریستوفر همان سرعت‌های دو جسم هستند و سرعت اجسام ساکن فقط مولفه‌ی زمانی دارد؛ نماد کریستوفر فقط به  $t$  بستگی خواهد داشت. اما اگر این مقدار را محاسبه کنیم، تغییرات را صفر بدست خواهیم آورد.

$$\frac{d^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} = -\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

$$\rightarrow -\delta \Gamma_{tt}^\mu$$

$$-\delta \Gamma_{tt}^\mu = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \left( \partial_t h_{\nu t} + \partial_t h_{\nu t} - \partial_\nu h_{tt} \right)$$

$$\rightarrow \left( \frac{d^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} \right) = 0$$

نکته اینجاست که باید به فاصله‌ی بین دو نقطه نگاه کنیم؛ و نه تغییرات هر نقطه به تنهایی (و شاید این نکته تاکید بهتر و دقیق تر بر این موضوع باشد که اعوجاج در خود فضا زمان اتفاق افتاده). اگر این نکته را لحاظ کنیم و دوباره طول مورد نظر را اندازه بگیریم؛ تغییرات قابل مشاهده خواهند بود. در واقع موج گرانشی به شکل تغییرات طول در فضا زمان در حال انتشار است.

$$L = \int_0^{L_0} \sqrt{1 + h_{xx}} dx = \int_0^{L_0} (1 + f(t - z))^{-1/2} dx \approx L_0 (1 + \frac{1}{2} f(t - z))$$

$$\frac{\delta L}{L_0} \approx \frac{1}{2} f(t - z)$$

منبع: لکچر استاد فرجی در زمینه آشنایی اولیه با امواج گرانشی