

# توزیع ماکسول بولتزمن

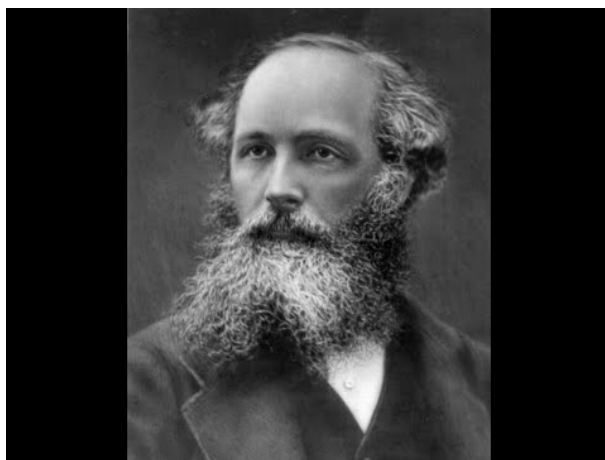
وحید کریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۲۰ فروردین ۱۴۰۴

---

## ۱ مقدمه

اگر در یک گاز ایده آل یک مولکول را به طور تصادفی انتخاب کنیم، سرعت اش چقدر است؟ چه مدت از زمان آخرین برخورد این مولکول گذشته است؟ برخورد بعدی را در چه زمانی انجام می دهد؟ چه فاصله ای را طی می کند تا برخورد بعدی را انجام دهد؟ اگر یک سوراخ به مساحت مثلاً یک سانتی متر در دیواره اتافی که این گاز را نگهداشته است ایجاد کنیم، پس از چه مدت ظرف از گاز خالی می شود؟ اگر یک گاز متفاوت را به درون یک ظرف که محتوی یک گاز دیگر است تزریق کنیم، چه مدت طول می کشد تا این گاز دوم در فضای ظرف پخش شود؟ در این درس سعی می کنیم که پاسخی برای این سوال ها پیدا کنیم یا لاقلاً روشی برای پاسخ گویی به آنها پیدا کنیم.



شکل ۱: جیمز کلرک ماکسول (۱۸۳۱-۱۸۷۹)

بسیاری جیمز کلرک ماکسول را بزرگترین فیزیکدان قرن نوزدهم می دانند که کشفیاتش راه را برای فیزیک قرن بیستم باز کرده است. ماکسول بعد از نیوتن دومین وحدت بزرگ را در نیروها و جلوه های بنیادی طبیعت یعنی وحدت نیروی مغناطیسی و نیروی الکتریکی و هم چنین نور و امواج الکترومغناطیسی کشف کرد. هم چنین او یکی از پیشگامان و بوجود آورندگان نظریه جنبشی گازهاست. علاوه بر این ها، او نقش مهمی در حوزه های دیگر علم نیز ایفا کرده، از جمله ساخت اولین عکس رنگی با دوام در سال ۱۸۶۱، اولین تجزیه تحلیل دقیق از پایداری ساختارهای فلزی مثل پل ها و ساختمان ها، کشف فوتو الاستیسته، ابداع مبانی علم مهندسی کنترل (۱۸۶۸) و کشفیات متنوع در حوزه های دیگر علوم. به عقیده بسیاری او همراز نیوتن و اینشتین است. وی در چهل و هشت سالگی بر اثر سرطان در گذشت. در شهر زادگاه او، ادینبورو در کشور اسکاتلند، اکنون موزه ای به نام او برپاست.

## ۲ یک مقدمه کوچک در باره انتگرال های گاوسی

در طول درس و همچنین برای حل کردن تمرین ها به روابط زیر در مورد انتگرال های گاوسی احتیاج پیدا می کنیم. اثبات همه این روابط ساده است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{2a}}. \quad (1)$$

بنابراین یک تابع گاوسی یک متغیره می تواند به صورت زیر تبدیل به یک تابع توزیع احتمال شود:

$$P(x) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}ax^2}. \quad (2)$$

با مشتق گیری نسبت به  $b$  در تساوی دوم (۱) و سپس قرار دادن  $b = 0$  می توان متوسطهای مختلف را برای تابع توزیع  $P(x)$  حساب کرد و بدست آورد:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{a}, \quad \langle x^4 \rangle = \frac{3}{a^2}, \quad \dots \quad (3)$$

### ۳ توزیع ماکسول-بولتزمن

در آزمایش کانونیک می توانیم به سوالات خیلی جزئی تری در باره احتمالات پاسخ دهیم. مثلاً از خود می پرسیم که احتمال این که یک ذره دارای مکان  $r_1$  و تکانه  $p_1$  باشد، چقدر است. این احتمال را با  $f(r_1, p_1)$  نشان می دهیم. می دانیم که احتمال اینکه همه ذرات دارای تکانه ها و مکان های خاص باشند از رابطه زیر تعیین می شود:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2; \dots; \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N) = \frac{1}{Z} e^{-\beta \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}} \quad (4)$$

احتمال  $f(r_1, p_1)$  با انتگرال گیری روی بقیه مختصات و تکانه ها بدست می آید:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) = \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_N P(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots; \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N). \quad (5)$$

واضح است که حاصل این محاسبه برابر است با:

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1) = C e^{-\beta \frac{p_1^2}{2m}} \quad (6)$$

که در آن  $C$  یک ثابت است. این رابطه می گوید که احتمال وجود ذره در نقاط مختلف فضا یکسان است، زیرا طرف راست به  $\mathbf{r}$  بستگی ندارد. احتمال آنکه این ذره تکانه  $\mathbf{p}$  داشته باشد برابر می شود با:

$$f(\mathbf{p}) = C' e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \quad (7)$$

و ثابت  $C'$  از شرط بهنجارش احتمالات بدست می آید:

$$f(\mathbf{p}) = \left( \frac{\beta}{2\pi m} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}. \quad (8)$$

برای آنکه تابع توزیع سرعت را بدست آوریم از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$f(\mathbf{v})d\mathbf{v} = P(\mathbf{p})d\mathbf{p} \quad (۹)$$

و با توجه به این که  $\vec{p} = m\vec{v}$  بدست می آوریم:

$$f(\mathbf{v}) = m^3 f(\mathbf{p}), \quad (۱۰)$$

و یا

$$f(\mathbf{v}) = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2}. \quad (۱۱)$$

این تابع توزیع می گوید که احتمال این که یک ذره سرعت  $\mathbf{v}$  داشته باشد تنها به اندازه سرعت بستگی دارد و نه به جهت آن و این همان چیزی است که انتظار داریم (البته در غیاب نیروهای خارجی). اگر تنها به توزیع یکی از مولفه های سرعت علاقمند باشیم از همین رابطه بدست می آوریم:

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2}. \quad (۱۲)$$

از این تابع توزیع بدست می آوریم:

$$\langle |v_x| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) |v_x| dv_x = 2 \int_0^{\infty} f(v_x) v_x dv_x = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}. \quad (۱۳)$$

برای آنکه تابع توزیع اندازه سرعت ها را بدست آوریم می بایست روی زوایای مختلف انتگرال بگیریم. با توجه به همسانگرد بودن تابع توزیع

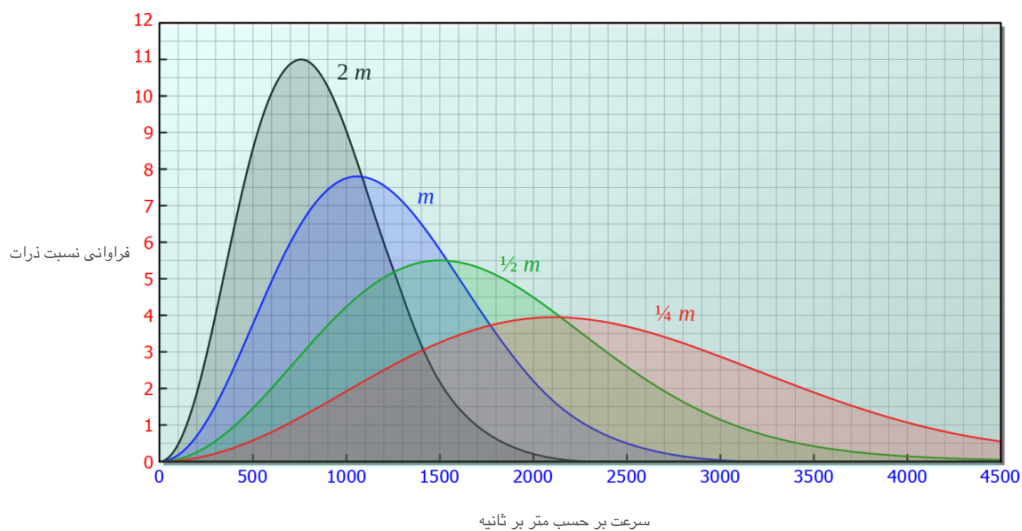
$f(\mathbf{v})$  را بدست می آوریم:

$$f(v)dv = 4\pi v^2 dv f(\mathbf{v}) \quad (۱۴)$$

و یا

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta \frac{1}{2} m v^2}. \quad (۱۵)$$

شکل (۲)



شکل ۲: تابع توزیع سرعت ذرات در یک گاز ایده آل.

تابع توزیع اندازه سرعت را نشان می دهد. محتمل ترین اندازه سرعت یا  $v_m$  جایی است که تابع توزیع بالا ماکزیمم شود. یک محاسبه ساده نشان می دهد که :

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (۱۶)$$

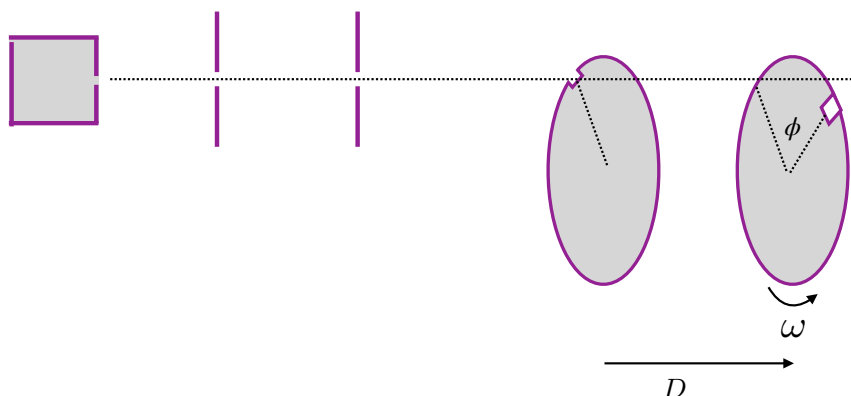
مقدار احتمال در این نقطه برابر است با:  $f_m = f(v_m) = e^{-1} \sqrt{\frac{8\pi m}{kT}}$

■ تمرین: مقدار متوسط سرعت یعنی  $\bar{v}$  و واریانس آن را بدست آورید.

■ تمرین: محتمل ترین مقدار اندازه سرعت، متوسط  $\langle v \rangle$  و هم چنین  $\sqrt{\langle v^2 \rangle} := v_{rms}$  را بدست آورده و مقادیر آنها را با هم مقایسه کنید.

## ۴ تحقیق تجربی توزیع ماکسول-بولتزمن

برای تحقیق درستی تابع توزیع سرعت ها راه های متفاوتی وجود دارد. یک روش ساده در شکل (۳) توضیح داده شده است. آزمایش هایی از این دست نشان می دهند که تابع توزیع ماکسول بولتزمن به خوبی نشان دهنده توزیع احتمالاتی سرعت ذرات در یک گاز ایده آل است.



شکل ۳: تحقیق تجربی توزیع سرعت ها. برای توضیح به متن مراجعه کنید.

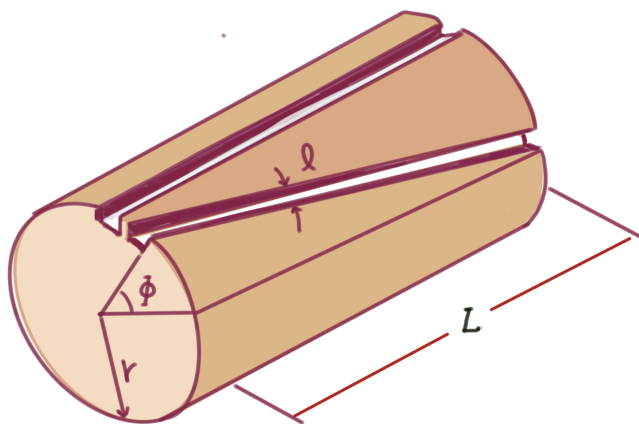
مولکول های گاز از درون محفظه ای در دمای  $T$  به بیرون فرار می کنند. دو صفحه موازی به عنوان یک سو کننده عمل می کنند و باریکه از مولکولها به سمت چرخ های گردان حرکت می کنند. چرخ اول ثابت است اما چرخ دوم با سرعت زاویه ای  $\omega$  می چرخد. هر دو چرخ یک شیار دارند و فاصله زاویه ای آنها برابر با  $\phi$  است. یک ذره وقتی از هر دو شکاف عبور می کند و به دستگاه آشکارساز می رسد که در فاصله زمانی ای که ذره اول از شکاف چرخ اول عبور می کند، شکاف چرخ دوم درست روبروی آن قرار گرفته باشد. اگر زمان عبور برابر با  $t$  باشد، این شرط وقتی برقرار می شود که داشته باشیم:

$$\phi = \omega t. \quad (17)$$

از طرفی می دانیم که  $D = vt$  از ترکیب این رابطه می توان سرعت ذرات را بدست آورد:

$$v = \frac{D}{t} = \frac{D\omega}{\phi} \quad (18)$$

با تغییر فاصله بین دو چرخ و ثبت تعداد ذرات برای سرعت های مختلف می توان تابع توزیع سرعت ذرات را بدست آورد. با الهام از همین ایده چیدمان دیگری از آزمایش به صورت نشان داده شده در شکل (۴) مورد استفاده قرار می گیرد.



شکل ۴: مولکولهای گاز پس از عبور از یکسو کننده سرعت، از شیار ایجاد شده روی یک استوانه چرخان عبور می کنند. زاویه ابتدا و انتهای شیار برابر با  $\phi$  است. استوانه با سرعت زاویه ای  $\omega$  می چرخد. بنابراین مدت زمان  $t = \frac{\phi}{\omega}$  طول می کشد تا انتهای شیار درست در مقابل جایی که اکنون ابتدای شیار قرار است، قرار بگیرد. یک مولکول تنها در صورتی از شیار عبور می کند که در این فاصله زمانی خود را به انتهای شیار برساند. این مولکولها سرعت شان برابر است با:  $v = \frac{L}{t} = \frac{L\omega}{\phi}$ . در واقع برای این مولکولها شیار اریب نیست بلکه در مسیر مستقیم قرار دارد. با تغییر فرکانس چرخش استوانه (به طریق الکترونیک) می توان تعداد مولکولها با سرعت های مختلف را ثبت کرد.

نتیجه این آزمایش ها نشان می دهد که تابع توزیع سرعت به جای آنکه مثل تابع توزیع ماکسول-بولتزمن متناسب با  $v^2 e^{-\beta \frac{mv^2}{2}}$  باشد متناسب با  $v^4 e^{-\beta \frac{mv^2}{2}}$  است. این عدم تطابق ناشی از دو چیز است. نخست این که مولکولهایی که از محفظه حاوی گاز در دمای  $T$  به بیرون فرار می کنند نماینده همه مولکولهای درون ظرف نیستند بلکه نماینده مولکولهایی هستند که سرعت آنها یا به عبارت بهتر مولفه سرعت آنها در جهت  $x$  از بقیه بیشتر است و به همین دلیل موفق به فرار می شوند، به همان معنایی که سرعت دویدن یک فوج از کودکان از کلاس درس (در هنگام زنگ تفریح) نماینده سرعت متوسط کودکان نیست بلکه نشان دهنده سرعت شیطان ترین کودکان است. در آینده نشان خواهیم داد که این تابع توزیع نسبت به تابع توزیع ماکسول یک فاکتور سرعت اضافه  $v$  به صورت ضربی دارد. به عبارت دیگر اگر تابع توزیع ماکسول را با  $P(v)$  نمایش بدهیم،

در بخش های بعدی نشان خواهیم داد که تابع توزیع ذراتی که از ظرف فرار می کنند چنین است:

$$P_1 dv \propto vP(v)dv. \quad (19)$$

دوم این که شیاری که روی استوانه تعبیه شده است شیار با پهنای صفر نیست بلکه یک پهنای محدود دارد و این پهنای محدود اجازه می دهد که ذراتی با سرعت های متفاوت از شیار عبور کنند. برای درک این نکته فرض کنید که پهنای شیار برابر با  $l$  باشد. در این صورت زاویه بین دو انتهای شیار بین یک مقدار  $\phi_+ := \phi + \frac{l}{2r}$  و  $\phi_- := \phi - \frac{l}{2r}$  قرار دارد. در این صورت ذراتی که سرعت آنها بین  $v_+ := \frac{L\omega}{\phi_-}$  و  $v_- := \frac{L\omega}{\phi_+}$  قرار دارد از شکاف عبور می کنند. تفاوت این دو سرعت برابر است با:

$$v_+ - v_- = \frac{L\omega}{\phi_-} - \frac{L\omega}{\phi_+} \approx \frac{L\omega l}{\phi^2 r} = v \frac{l}{\phi r} \quad (20)$$

در نتیجه تابع توزیع ذراتی که از شکاف عبور می کنند برابر است با:

$$P_2(v)dv = \int_{v_-}^{v_+} P_1 dv = P_1(v)(v_+ - v_-) \propto P_1(v)v dv \approx P(v)v^2 dv. \quad (21)$$

به این دلیل است که تابع توزیع  $P_2 \sim v^4 e^{-\beta \frac{1}{2}mv^2}$  دلیلی برای درستی تابع توزیع ماکسول-بولتزمن است.

## ۱.۴ پهن شدگی دوپلر

مولکولهای یک گاز با سرعت های گوناگون در جهات مختلف حرکت می کنند. این سرعت باعث پهن شدگی خطوط طیفی می شود که به آن پهن شدگی دوپلری<sup>۱</sup> می گویند. می توان تخمینی از پهن شدگی دوپلری خطوط طیفی بدست آورد و از آن برای تخمین سرعت متوسط مولکولها و در نتیجه دمای گازی که از این مولکول ها تشکیل شده استفاده کرد. از این روش می توان در کنار دیگر روش ها برای تخمین دمای گازهای میان ستاره ای یا دمای اتمسفر سیارات استفاده کرد. مولکولی را در نظر بگیرید که با سرعت  $v$  به طرف شما می آید. در این صورت اگر فرکانس نوری که تابش می کند برابر با  $\omega_0$  باشد، در اثر پدیده دوپلر، فرکانس آن به صورت

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

دید خواهد شد که در آن  $c$  سرعت نور است. اما همه مولکول ها مستقیما به طرف ما نمی آیند یا مستقیما از ما دور نمی شوند. اگر ما در راستای محور  $x$  ایستاده باشیم، مولفه سرعتی که در روابط بالا می بایست وارد شود برابر است با  $v_x$ . بنابراین اگر چگالی احتمال اینکه فرکانس  $\omega$  را

<sup>1</sup>Doppler Broadening



مشاهده کنیم را با  $P_f(\omega)$  نشان دهیم و تابع توزیع ماکسول-بولتزمن را برای سرعت ها در راستای  $x$  با  $P_x$  نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$P_f(\omega)d\omega = P(v_x)dv_x \quad (22)$$

و از آنجا

$$P_f(\omega) = \frac{\omega_0}{c} P_x\left(\frac{c}{\omega_0}(\omega - \omega_0)\right) = \frac{\omega_0}{c} A e^{-\frac{mc^2}{2kT} \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2}}. \quad (23)$$

از آنجا که شدت خطوط طیفی در هر فرکانسی متناسب با تابع توزیع در آن فرکانس است، خواهیم داشت

$$I(\omega) \propto e^{-\left(-\frac{mc^2(\omega_0 - \omega)^2}{2kT\omega_0^2}\right)} \quad (24)$$

می دانیم که یک تابع توزیع گاوسی همواره به این صورت است:

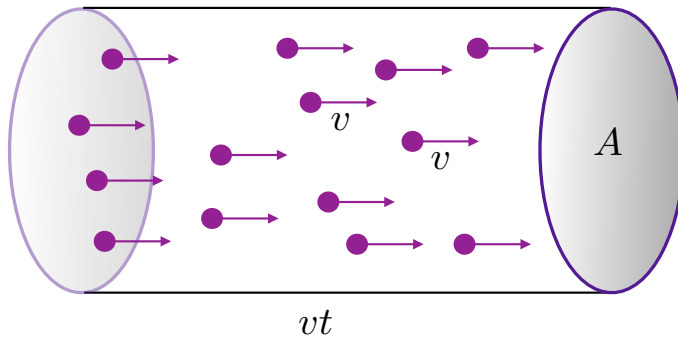
$$P(x) = A e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (25)$$

که در آن  $x_0$  مقدار متوسط و  $\sigma$  مقدار واریانس است. بنابراین نشان داده ایم که دما باعث پهن شدن شدگی خطوط طیفی مطابق با رابطه زیر می شود:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{kT}{mc^2}} \quad (26)$$

## ۵ فشار و معادله حالت

مولکولهایی در ظرف گاز حرکت می کنند به دیواره ها برخورد می کنند و منعکس می شوند. در هر برخورد مقداری تکانه به دیواره ها منتقل می کنند که باعث فشار به دیواره ظرف می شود. این فشار همان فشار گاز است. چگونه می توان این فشار را حساب کرد. اولین کار و بهترین کار این است که یک حساب سرانگشتی انجام دهیم. همیشه این حساب های سرانگشتی مقدم بر هر نوع محاسبه پیچیده ای هستند چرا که بدون زحمت خیلی زیاد اغلب اوقات جوابی بدست می دهند که خصوصیات اصلی جواب دقیق نهایی را در خود دارند و فقط ممکن است از نظر ضرایب عددی کمی با جواب دقیق تفاوت داشته باشند.



شکل ۵: در یک زمان  $t$  تمام مولکولهای نشان داده شده در استوانه به دیواره برخورد می کنند و به آن فشار وارد می کنند. تعداد این مولکولها  $1/6$  تعداد کل مولکولهای درون استوانه هستند. اندازه سرعت همه مولکولهای گاز مساوی است.

پس از این محاسبه سرانگشتی، می توانیم یک محاسبه دقیق انجام دهیم. برای این محاسبه یک قسمت از دیواره را به مساحت  $A$  در راستای عمود با محور  $z$  در نظر می گیریم. فرض می کنیم که همه ذرات با سرعت متوسطی که آن را  $v$  می نامیم حرکت می کنند. به طور سرانگشتی فرض می کنیم که  $1/6$  این ذرات در جهت مثبت  $z$  حرکت می کنند و بقیه هم در جهات دیگر. حال اگر زمان  $t$  صبر کنیم تمام مولکولهایی که در استوانه نشان داده شده در شکل (۵) قرار دارند و به سمت دیواره حرکت می کنند به این دیواره برخورد می کنند. تعداد این ذرات برابر است با:

$$\frac{1}{6}n \times vt \times A \quad (27)$$

که در آن  $n$  چگالی تعداد ذرات است. میزان کل تکانه ای که این ذرات به دیواره وارد می کنند برابر است با:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{6}n \times vt \times A \times 2mv \quad (28)$$

بنابراین فشار وارد شده به سطح را می توان حساب کرد. داریم:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\mathcal{P}}{tA} = \frac{1}{3}nmv^2 \quad (29)$$

اما می دانیم که انرژی متوسط مولکولها برابر است با:

$$\epsilon = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT \quad (30)$$

بنابراین بدست می آوریم:

$$P = \frac{2}{3}U \quad (31)$$

که در آن  $U = N\epsilon$  انرژی داخلی گاز است و یا

$$PV = NkT. \quad (32)$$

به این ترتیب با حساب سرانگشتی ساده معادله حالت گاز را بدست آوردیم.

پس از این محاسبه سرانگشتی یک محاسبه دقیق انجام می دهیم. می دانیم که چگالی ذراتی که با سرعت  $v$  حرکت می کنند برابر است با

$$n(\mathbf{v}) = nP(\mathbf{v})$$

که در آن  $n$  چگالی ذرات و  $P(\mathbf{v})$  تابع توزیع ماکسول - بولتزمن است. این تابع توزیع احتمال این را به دست می دهد که ذره ای سرعت  $v$  را داشته باشد. برای این دسته از ذرات چگالی جریان برابر است با:

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}) = nP(\mathbf{v})\mathbf{v}. \quad (33)$$

هرگاه یک المان سطح  $\Delta \mathbf{A}$  داشته باشیم که سطح آن برابر با  $A$  و جهت عمود بر آن با بردار یکه  $\hat{z}$  مشخص شود، آنگاه

$$\mathbf{J}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A} = nP(\mathbf{v})\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = nP(\mathbf{v})v_z A$$

تعداد ذراتی است که در واحد زمان به این سطح برخورد می کنند و دارای سرعت  $v$  هستند. هر کدام از این ذرات تکانه  $2mv_z$  را به سطح منتقل می کنند. بنابراین کل تکانه وارد شده به این سطح در جهت عمود بر آن و در واحد زمان (یعنی نیروی وارد بر این سطح) در جهت عمود بر آن برابر است با:

$$F = \int_+ d^3\mathbf{v} nP(\mathbf{v})v_z A \times 2mv_z = n A 2m \int_+ d^3\mathbf{v} P(\mathbf{v})v_z^2 \quad (34)$$

از آنجا که انتگرال را فقط روی  $v_z$  های مثبت محاسبه کرده ایم عبارت بالا برابر می شود با:

$$F = n A \langle mv_z^2 \rangle \quad (35)$$

در نتیجه با تقسیم این نیرو برو سطح میزان فشار محاسبه می شود:

$$P = n \langle mv_z^2 \rangle \quad (36)$$

اما می دانیم که به دلیل همسانگردی  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$  و در نتیجه

$$P = n \frac{1}{3} \langle mv^2 \rangle = n \frac{2}{3} \langle \frac{1}{2} mv^2 \rangle = n \frac{2}{3} \frac{3}{2} kT = nkT \quad (37)$$

و یا

$$PV = NkT. \quad (38)$$

## ۶ فرار مولکول ها

همان محاسبه ای که برای تعیین فشار یک گاز انجام دادیم با کمی تغییر برای محاسبه یک کمیت مهم دیگر نیز به کار می رود، البته با اندکی تغییر. این پدیده مربوط به فرار یا نشت  $\gamma$  یک گاز است. فرض کنید که در دیواره ظرف یک سوراخ کوچک به مساحت  $A$  ایجاد شده باشد. سوال این است که نرخ فرار مولکولهای گاز از این ظرف چقدر است؟ برای این کار کافی است از همان رابطه (۳۴) استفاده کنیم، بدون اینکه تکانه وارد شده به سطح را وارد کنیم. در نتیجه تعداد ذراتی که در زمان  $\Delta t$  از سوراخ به مساحت  $A$  می گریزند عبارت است از:

$$\Delta \mathcal{N} = \int dv_x \int dv_y \int_+ dv_z n P(\mathbf{v}) v_z A \Delta t \quad (39)$$

در نتیجه تعداد مولکولهایی که از واحد سطح در واحد زمان عبور می کنند برابر است با:

$$\varepsilon = n \int_{v_z > 0} P(\mathbf{v}) v_z = n \frac{1}{2} \langle |v_z| \rangle. \quad (40)$$

---

Efussion\*

با جایگذاری  $\langle |v_z| \rangle$  از رابطه (۱۳) بدست می آوریم:

$$\varepsilon = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}. \quad (41)$$

اگر تمرین های این درس را تا اینجا حل کرده باشید متوجه شده اید که

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

با در نظر گرفتن این رابطه می توان نرخ گریز مولکولها را به شکل ساده زیر نوشت:

$$\varepsilon = \frac{1}{4} n \langle v \rangle. \quad (42)$$

رابطه (۳۹) در عین حال نشان می دهد که تعداد ذراتی که با سرعت  $v$  در واحد زمان که از واحد سطح فرار می کنند، متناسب با  $P(v)$  نیست، بلکه متناسب با  $P(v)v$  است (چون  $v_z$  متناسب با  $v$  است). این رابطه آن چیزی را توضیح می دهد که در تطبیق نتایج آزمایش برای سنجش توزیع ماکسول بولترمن به آن نیاز داشتیم.

## ۷ پوش آزاد میانگین

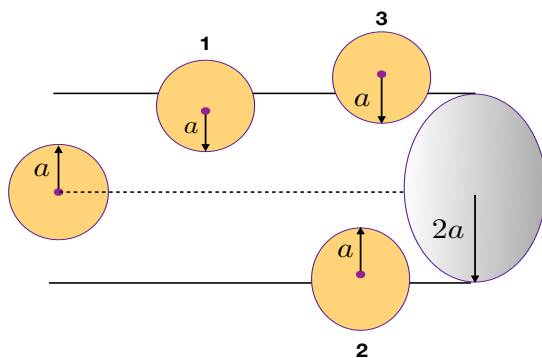
در این بخش می خواهیم به این سوال ها پاسخ دهیم که متوسط زمان بین دو برخورد برای یک ذره چقدر است؟ در این فاصله زمانی یک ذره چه مسافتی را طی می کند؟ برای پاسخ به این سوالات نخست احتیاج به مفهوم سطح مقطع پراکندگی<sup>۳</sup> داریم.

### ۱.۷ سطح مقطع پراکندگی

گازی را در نظر بگیرید که مولکولهای آن کره هایی سخت<sup>۴</sup> با شعاع  $a$  هستند. مولکول های دیگری که بر سر راه این مولکول قرار می گیرند آن را به شکل یک دایره به شعاع  $\pi a^2$  می بینند. سطح مقطع این مولکول بنابراین  $\pi a^2$  است. اما سطح مقطع پراکندگی از این بزرگتر است چرا که خود مولکولهایی که بر سر راه این مولکول قرار گرفته اند نیز حجم و سطح دارند. در واقع همانطور که شکل (۶) نشان می دهد سطح مقطع پراکندگی برای این مولکول ها برابر است با  $\sigma = \pi(2a)^2$ . اگر دقیق تر بخواهیم سطح مقطع پراکندگی کمی از این مقدار هم بزرگ تر است زیرا مولکول ها نیازی به تماس فیزیکی با یکدیگر ندارند تا بتوانند بر هم نیرو وارد کنند و یک دیگر را از مسیر راست منحرف کنند. محاسبه دقیق

<sup>۳</sup>Scattering Cross Section  
<sup>۴</sup>Hard Spheres

سطح مقطع پراکندگی می بایست با توجه به پتانسیل بین دو مولکول و با استفاده از مکانیک کوانتومی صورت پذیرد ولی هر چه هست همواره عبارت نهایی ضریبی از  $\pi a^2$  است که در آن  $a$  شعاع موثر یک مولکول است.



شکل ۶: برای مولکوهایی که شعاع آنها برابر با  $a$  است، سطح مقطع پراکندگی برابر است با  $\sigma = \pi(2a)^2 = 4\pi a^2$ .

## ۲.۷ پویش آزاد میانگین و زمان آزاد میانگین

مولکول های گاز دایما با هم برخورد می کنند و مسیرشان عوض می شود. بین برخوردها هر مولکولی یک مسیر راست را طی می کند. می خواهیم بینیم زمان متوسط بین برخوردها چقدر است؟ این زمان را زمان آزاد میانگین<sup>۵</sup> می نامیم. در این فاصله زمانی نیز یک ذره مسافتی را طی می کند بدون اینکه با ذره دیگری برخورد کند و مسیرش عوض شود. این مسافت را پویش آزاد میانگین<sup>۶</sup> می نامیم. این کمیت ها چه ربطی به دما و چگالی دارند. این ها سوالاتی هستند که در این بخش در جستجوی پاسخ آنها هستیم. نخست یک محاسبه سرانگشتی و ساده انجام می دهیم. مثل هر مسئله دیگری، جواب هایی که بدست می آوریم خصلت های کلی جواب دقیق نهایی را به ما نشان خواهند داد. نخست پویش آزاد میانگین را محاسبه می کنیم. این مسافت را با  $\lambda$  را نشان دهید. ذره ای که با داشتن سطح مقطع پراکندگی  $\sigma$  این مسافت را طی می کند، یک استوانه ای با حجم  $\sigma\lambda$  را جاروب می کند. اگر ذره در این فاصله به طور متوسط یک برخورد انجام دهد و مسیرش عوض شود، باید داشته باشیم:

$$n\sigma\lambda \approx 1 \quad (۴۳)$$

Mean Free Time<sup>۵</sup>  
Mean Free Path<sup>۶</sup>

و در نتیجه

$$\lambda \approx \frac{1}{n\sigma}. \quad (44)$$

این رابطه نشان می دهد که هر چه چگالی بیشتر باشد، پویش آزاد میانگین هم کمتر می شود. نکته جالب این است که این فاصله به دما بستگی ندارد و تنها تابع چگالی است. این نتیجه هم قابل فهم است. از این نتیجه می توان زمان آزاد میانگین را هم بدست آورد. رابطه بین مسافت و زمان طی شده بین دو برخورد طبیعتا برابر است با  $\tau\bar{v} = \lambda$  که در آن  $\tau$  همان زمان آزاد میانگین و  $\bar{v}$  سرعت میانگین مولکولهاست. بنابراین خواهیم داشت:

$$\tau \approx \frac{1}{n\sigma\bar{v}} \propto \sqrt{\frac{m}{kT}} \frac{1}{n\sigma}. \quad (45)$$

این نتیجه هم از نظر فیزیکی مورد انتظار است: دمای زیاد باعث سرعت زیادتر ذرات می شود و در آن شلوغی که ناشی از چگالی بالاست، فاصله زمانی بین برخوردها کوتاه تر می شود. اما مسافت بین برخوردها فقط به میزان شلوغی بستگی دارد و نه به سرعت ذرات و در نتیجه به دما. پس از این استدلال سرانگشتی می توانیم به یک استدلال دقیق پردازم و خواهیم دید که به همان نتایج می رسیم.

سطح مقطع پراکندگی یک مولکول را با  $\sigma$  نشان می دهیم. در این صورت در فاصله زمانی  $dt$  این مولکول یک حجم  $\sigma v dt$  را جاروب می کند. احتمال اینکه در این فاصله زمانی مولکول یک برخورد انجام دهد برابر است با احتمال اینکه یک مولکول بر سر راهش قرار گیرد یعنی احتمال اینکه یک مولکول در این حجم جاروب شده قرار بگیرد. احتمال این که یک مولکول خاص مثلا مولکول شماره یک در این حجم قرار بگیرد برابر است با این احتمال برابر است با:  $\frac{\sigma v dt}{V}$  یعنی نسبت حجم جاروب شده به حجم کل فضا. اما هر مولکولی می تواند در این حجم جاروب شده قرار بگیرد، بنابراین احتمال این که مولکولی در این حجم جاروب شده قرار بگیرد برابر است با:

$$N \times \frac{\sigma v dt}{V}$$

که در آن  $N$  تعداد کل مولکول هاست. در این جا فرض شده است که مولکول ها رفتار مستقل از هم دارند که فرض درستی است. بنابراین احتمال برخورد در این فاصله زمانی برابر است با  $\sigma n v dt$  و احتمال برخورد نگردن نیز برابر است با  $1 - \sigma n v dt$ .

حال احتمال اینکه از زمان آخرین برخورد یک مولکول زمان  $t$  گذشته باشد را با  $P(t)$  نشان می دهیم. مثل هر تابع دیگری این تابع نیز در بسط زیر صدق می کند:

$$P(t + dt) = P(t) + \frac{dP}{dt} dt \quad (46)$$

از طرفی احتمال اینکه مولکول تا زمان  $t + dt$  برخورد نکرده باشد برابر است با احتمال اینکه تا زمان  $t$  برخوردی نداشته و در فاصله کوتاه  $dt$  نیز بدون برخورد مانده باشد، یعنی

$$P(t + dt) = P(t)(1 - n\sigma v dt). \quad (47)$$

بنابراین بدست می آوریم

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = -n\sigma v \quad (48)$$

اما بنابر تعریف می دانیم که  $P(0) = 1$  زیرا احتمال اینکه از زمان آخرین برخورد ذره صفر ثانیه گذشته باشد همواره برابر است با یک. در نتیجه حل معادله بالا عبارت است از:

$$P(t) = e^{-n\sigma v t}. \quad (49)$$

این عبارت احتمال این است که ذره پس از گذشت زمان  $t$  از آخرین برخوردش هنوز بدون برخورد مانده باشد. این عبارت چیزی در باره بعد از این لحظه نمی گوید. حالا می پرسیم احتمال اینکه ذره فاصله زمانی بین دو برخوردش برابر با  $t$  باشد چقدر است؟ این احتمال برابر است با احتمال اینکه ذره تا زمان  $t$  بدون برخورد مانده باشد و در فاصله زمانی  $(t, t + dt)$  یک برخورد انجام دهد. بنابراین اگر این تابع توزیع را با  $P_{coll}(t)$  نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$P_{col}(t)dt = P(t) \times n\sigma v dt = n\sigma v e^{-n\sigma v t} dt \quad (50)$$

با استفاده از این رابطه می توانیم زمان متوسط بین برخوردها را حساب کنیم:

$$\tau = \int_0^{\infty} t e^{-n\sigma v t} n\sigma v dt \quad (51)$$

و یا

$$\tau = \frac{1}{n\sigma v}. \quad (52)$$



تا کنون از آزمایش کانونیک استفاده کرده ایم و نشان داده ایم که رفتار یک مولکول از گاز به طور متوسط چگونه است، با چه احتمالی سرعت اش در یک راستای معین است و چیزهایی از این قبیل. این سوالها البته کنجکاوی ما را برطرف کرده و توانسته ایم پاسخ های خود را نیز با انجام آزمایش هایی بسنجیم. اما اکنون می خواهیم گام های بزرگ تری برداریم که دامنه اش وسیع تر از کنجکاوی در باره رفتار احتمالاتی تک تک مولکول هاست. با استفاده از آنچه که آموخته ایم می توانیم رفتار گاز را در خارج از تعادل نیز بفهمیم. می توانیم بفهمیم که در شرایط غیرتعادلی (مثلاً وقتی که فشار یکنواخت نیست) گاز چگونه مثل یک سیال حرکت می کند و معادله حاکم بر حرکت آن چگونه است. یا می توانیم بفهمیم که وقتی دما یکنواخت چیست، گرما چگونه از یک ناحیه به یک ناحیه دیگر از گاز سرایت می کند. یا وقتی که چگالی یک گاز یکنواخت نیست یا حتی بهتر از آن وقتی دو گاز متفاوت در کنار یکدیگر قرار می گیرند، چگونه در یکدیگر پخش می شوند. در این بخش به بعضی از این سوال ها می پردازیم.

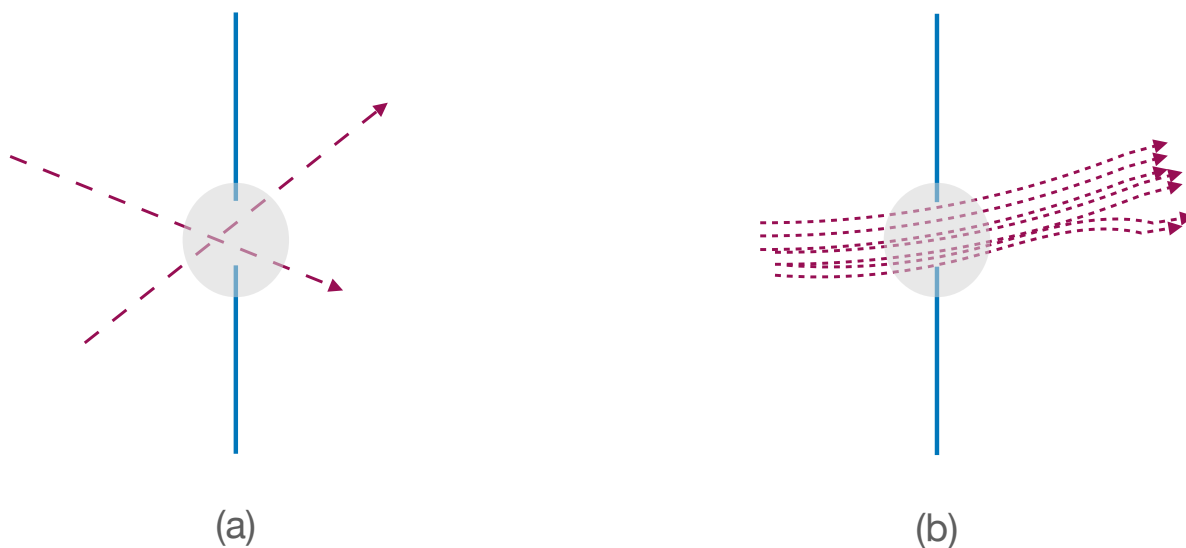
## ۸ هیدرودینامیک بدون وشکسانی

فرض کنید که تغییرات فضایی چگالی یا فشار یا دما در یک گاز یک طول مشخصه  $L$  داشته باشد، به این معنا که تنها با طی کردن چنین طولی متوجه این تغییرات شویم.  $L$  می تواند طول ظرف محتوی گاز، یا قطر یک روزنه در این ظرف یا هر چیزی شبیه به این باشد. معمولاً این طول بسیار بزرگ تر از یک طول مشخصه مهم گاز یعنی طول پویش آزاد میانگین است که آن را با  $\lambda$  نشان می دهیم. هرگاه که  $L \gg \lambda$  باشد، دانه دانه بودن گاز محسوس نیست و اصطلاحاً می گوییم در رژیم هیدرودینامیک<sup>۷</sup> هستیم. در غیر این صورت می گوییم گاز در رژیم بدون برخورد<sup>۸</sup> قرار دارد. اصطلاح رژیم در اینجا به معنای یک نوع تقریب با تصویر به کار می رود. شکل (۷) نشان می دهد که منظور از این دو رژیم چیست. در این بخش رژیم هیدرودینامیک را مطالعه می کنیم، آنهم در شرایطی که اصطکاک یا اصطلاحاً وشکسانی<sup>۹</sup> وجود ندارد. به عبارت دیگر فرض می کنیم اگر چه در رژیم هیدرودینامیک هستیم ولی برخورد بین مولکول ها آنقدر زیاد نیست که اصطکاک و وشکسانی ایجاد کند.

<sup>۷</sup>Hydrodynamic Regime

<sup>۸</sup>Collisionless Regime

<sup>۹</sup>viscosity



شکل ۷: شکل سمت چپ، رژیم بدون برخورد را نشان می دهد. در این شرایط، جریان مولکولهایی که از روزنه عبور می کنند آنقدر رقیق است که می توانیم آنها را بدون برخورد در نظر بگیریم و فرض کنیم که یکی یکی و با فاصله زیاد از روزنه عبور می کنند. اما در سمت راست، در هر لحظه میلیون ها یا میلیاردها مولکول از روزنه عبور می کنند و حین عبور هم برخورد می کنند. هر مولکول یک مسیر خیلی زیگزاکی شکل را طی می کند و به همین جهت می توانیم فرض کنیم که همه مولکولها مثل یک جریان سیال از روزنه عبور می کنند.

روابطی که برای یک سیال بدست می آوریم، همگی ناشی از توجه به قوانین پایستگی است. این قوانین را به ترتیب بررسی می کنیم:

■ **قانون پایستگی جرم:** چگالی موضعی تعداد ذرات را با  $n(\mathbf{r}, t)$  و جرم مولکولها را با  $m$  نشان می دهیم، در این صورت چگالی جرمی گاز در هر نقطه برابر است با:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = mn(\mathbf{r}, t). \quad (53)$$

مثل هر چگالی دیگری، برای این چگالی نیز یک قانون پایستگی به شکل زیر برقرار است:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (54)$$

که در آن  $\mathbf{u}$  سرعت موضعی سیال و  $\rho\mathbf{u}$  چگالی جریان سیال است. وقتی که سیال خیلی دور از تعادل نباشد، به این معنا که سرعت آن کم و تغییرات کمیت‌هایی مثل چگالی یا فشار و نظایر آن بسیار کوچک باشد، می‌توانیم از جملات مربعی (مثل  $\nabla\rho \cdot u$  یا  $\nabla\rho \cdot \nabla P$ ) صرف نظر کنیم. به همین دلیل است که رابطه پایستگی جرم را می‌توانیم در این حد به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla\rho \cdot \mathbf{u} \approx \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (55)$$

■ حال یک استوانه کوچک فرضی را که محور آن در راستای  $x$  قرار دارد و طول آن برابر با  $dx$  و سطح مقطع آن برابر با  $A$  است در نظر بگیرید. در این صورت اگر فشار سیال را با  $P$  نشان دهیم، نیروی وارد بر سیالی که در این استوانه فرضی قرار دارد برابر است با:

$$dF_x = [P(x) - P(x + dx)]A = -A \frac{\partial P}{\partial x} dx \quad (56)$$

که در آن طرف راست مربوط به اختلاف فشار سیال در دو طرف استوانه است. شکل (۸) چگونگی استخراج این نیرو را نشان می‌دهد.



شکل ۸: .....

به این ترتیب معادله نیوتن به شکل زیر در می‌آید:

$$dm \frac{du_x}{dt} = -A \frac{\partial P}{\partial x} dx, \quad (57)$$

که در آن  $dm = \rho A dx$  میزان جرم درون این استوانه و  $u_x$  مولفه سرعت آن در راستای  $x$  است. به این ترتیب به معادله زیر می‌رسیم:

$$\rho \frac{du_x}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (58)$$

البته باید دقت کنیم که در این معادله  $u_x$  تابعی از زمان و مکان هر دو است، به عبارت دیگر

$$u_x = u_x(t, x, y, z).$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)u_x. \quad (59)$$

هرگاه نیروی خارجی را نیز در نظر بگیریم (مثل گرانش، یا میدان های الکتریکی و مغناطیسی، معادله حرکت به صورت زیر در می آید که معمولاً معادله اوایلر نامیده می شود).

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \nabla P = \mathbf{f}^{ext} \quad (60)$$

■ علاوه بر این معادله یک شرط دیگر را نیز باید رعایت کنیم و آن اینکه در غیاب اصطکاک هیچ مکانیزمی برای انتقال حرارت بین نواحی مختلف این سیال (از جمله همین استوانه ای که در نظر گرفتیم، با بیرون از آن) وجود ندارد. می دانیم که در شرایط بی در رو رابطه زیر بین حجم و فشار برقرار است:

$$PV^\gamma = \text{constant}.$$

برای یک حجم از مایع که مثلاً درون استوانه فرضی ما قرار دارد، این رابطه به صورت  $P\rho^{-\gamma}$  در می آید. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} P\rho^{-\gamma} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) (P\rho^{-\gamma}) = 0 \quad (61)$$

البته باید توجه کنیم که در شرایطی که خیلی دور از تعادل نباشیم می توانیم از جملات درجه دوم تغییرات نسبت به درجات اول این تغییرات صرف نظر کنیم. به همین دلیل است که میتوانیم بنویسیم

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) (P\rho^{-\gamma}) \approx \frac{\partial}{\partial t} (P\rho^{-\gamma}). \quad (62)$$

به این ترتیب در تقریبی که خیلی از تعادل دور نیستیم، معادلات حاکم بر ترمودینامیک بدون وشکسانی به صورت زیر در می آیند.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla P &= \mathbf{f}^{ext}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(P \rho^{-\gamma}) &= 0.\end{aligned}\quad (63)$$

در این جا، رابطه اول ناشی از قانون بقای جرم، رابطه دوم ناشی از قانون بقای تکانه (یا همان معادله نیوتن) و رابطه سوم نیز ناشی از شرط بی دررو بودن است.

## ۹ امواج صوت

در این بخش از همین معادلات هیدرودینامیک استفاده می کنیم و معادله ای برای امواج صوت در یک گاز بدست می آوریم. در تمامی روابط خود نیز از جملات درجه دوم تغییرات مثل  $\frac{\partial \rho}{\partial t} \nabla P$  صرف نظر می کنیم و فقط جملات درجه اول را نگاه می داریم. حال از معادله پیوستگی یک بار مشتق می گیریم تا به رابطه زیر برسیم:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \quad (64)$$

و یا پس از صرف نظر کردن از جمله مربعی وسط،

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \quad (65)$$

اما از معادله دوم هیدرودینامیک می دانیم که

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P,$$

که با جایگذاری اش در معادله قبلی (باز هم با صرف نظر کردن از جملات مربعی تغییرات) بدست می آوریم:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \nabla^2 P = 0. \quad (66)$$

اما این معادله ای است که تغییرات زمانی چگالی را به تغییرات مکانی فشار ربط می دهد. برای آنکه معادله ای برای تغییرات چگالی بدست آوریم، باید تغییرات فشار را بر حسب تغییرات چگالی بنویسیم. برای این کار به یک رابطه ترمودینامیکی توجه می کنیم. همان سلول استوانه ای شکل

(۸) را در نظر بگیرید که حاوی مقدار مشخصی از جرم گاز به اندازه  $m$  است، حجم آن  $V$  و چگالی آن  $\rho = \frac{m}{V}$  است. در این صورت وقتی که در اثر تغییر فشار حجم این استوانه تغییر می کند، چگالی آن به صورت زیر تغییر می کند:

$$d\rho = -\frac{m}{V^2}dV = -\frac{m}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S dP = \frac{m}{V}\kappa_S dP = \rho\kappa_S dP. \quad (67)$$

و در نتیجه

$$\nabla P = \frac{1}{\rho\kappa_S}\nabla\rho. \quad (68)$$

و

$$\nabla^2 P = \nabla \cdot \nabla P = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho\kappa_S}\nabla\rho\right) \approx \frac{1}{\rho\kappa_S}\nabla^2\rho. \quad (69)$$

بنابراین معادله (۶۶) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho\kappa_S}\nabla^2\rho = 0. \quad (70)$$

به این ترتیب، معادله نهایی به صورت یک معادله موج برای چگالی در می آید

$$\nabla^2\rho - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = 0 \quad (71)$$

که در آن سرعت انتشار امواج برابر است با:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho\kappa_S}}. \quad (72)$$

## ۱۰ پخش

ظرفی پر از یک گاز در نظر بگیرید که با یک دیواره ظریف به دو قسمت مساوی تبدیل شده است. چگالی در طرف چپ زیاد و در طرف راست کم است. با برداشتن دیواره می دانیم که گاز از قسمت پر تراکم به قسمت رقیق پخش می شود و پس از مدتی چگالی یکنواخت می شود. سوال این است که چه مدت طول می کشد که چگالی یکنواخت شود؟ این یک مثال ساده از پدیده پخش<sup>۱۰</sup> است. در طبیعت و در زندگی روزمره بانواعی

<sup>۱۰</sup>Diffusion

از پدیده پخش روبرو می شویم، از جمله پخش شدن جوهر در آب، پخش شدن بوی گل ها در طبیعت، پخش شدن یک شایعه یا یک بیماری در اجتماع، همه نمونه هایی از پدیده ساده پخش هستند که البته در هر کدام ممکن است تفاوت هایی جزئی با پدیده پخش گاز وجود داشته باشد که بخواهیم آنها را در نظر بگیریم. بررسی خود از این پدیده را با یک محاسبه ساده و سرانگشتی شروع می کنیم. در همان مثالی که در ابتدا گفتیم، فرض می کنیم که دما در تمام ظرف یکنواخت است. هم چنین در نظر می گیریم که همه مولکولها با سرعت متوسط  $\bar{v} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$  حرکت می کنند. درست مثل موقعی که فشار گاز را حساب کردیم، فرض می کنیم که یک ششم مولکولها در راستای  $x$  و به طرف راست حرکت می کنند. ما دانیم که هرگاه چگالی مولکول ها برابر با  $n$  و سرعت آنها برابر با  $v$  باشد، چگالی جریان آنها برابر با  $J = nv$  است. بنابراین اگر چگالی مولکول ها در طول محور  $x$  متغیر باشد، جریان مولکول ها در راستای  $x$  برابر است با:

$$J_x \approx \frac{n_1}{6}\bar{v} - \frac{n_2}{6}\bar{v}. \quad (73)$$

که در آن  $n_1$  و  $n_2$  چگالی مولکول ها در دو نقطه نزدیک به هم باشد. منطقی است که فاصله این دو نقطه را از مرتبه  $2\lambda \approx r_0$  در نظر بگیریم، زیرا این فاصله ای است که یک مولکول می تواند با حرکت خود از یک نقطه به نقطه دیگر در تغییر چگالی موثر واقع شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$j_x \approx -\frac{r_0\bar{v}}{6} \frac{\partial n}{\partial x} = -D \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (74)$$

هرگاه چگالی در سه بعد تغییر کند، این رابطه به رابطه زیر تبدیل می شود:

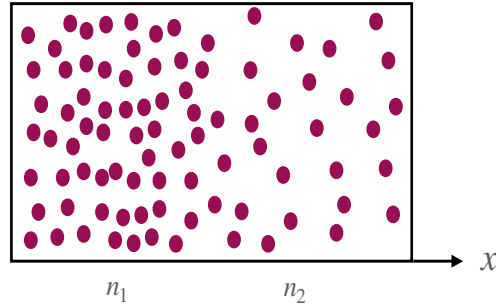
$$\mathbf{j} = -D\nabla n \quad (75)$$

که در آن

$$D = \frac{r_0\bar{v}}{6}, \quad (76)$$

ضریب پخش نامیده می شود. می توانیم  $r_0$  را دو برابر طول پویش آزاد میانگین بگیریم و قرار دهیم  $r_0 = 2\lambda = \frac{2}{n\sigma}$ . در این صورت با جایگذاری طول پویش آزاد میانگین و سرعت متوسط بدست می آوریم:

$$D \approx \frac{1}{3n\sigma} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}. \quad (77)$$



شکل ۹: هرگاه در یک گاز گرادیان چگالی وجود داشته باشد، پدیده پخش رخ می دهد تا گرادیان چگالی را خنثی کند.

با ترکیب این رابطه با رابطه پیوستگی یعنی  $\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  به معادله نهایی پخش می رسم.

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 n(\mathbf{r}, t) \quad (78)$$

■ **مثال:** حالتی را در نظر می گیریم که در لحظه صفر همه ذرات در مبدا مختصات هستند. (این می تواند مدلی ساده از پدیده پخش یک قطره از ماده رنگی در یک مایع مثلا آب باشد.) در این صورت باید معادله (78) را با شرایط اولیه

$$n(\mathbf{r}, 0) = N \delta_{\mathbf{r}}$$

حال کنیم. در این جا  $N$  تعداد کل ذرات در لکه جوهر است. برای حل معادله پخش از تبدیل فوریه استفاده می کنیم و می نویسیم:

$$n(\mathbf{r}, t) = \int \hat{n}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{k}. \quad (79)$$

با قراردادن این تبدیل، معادله پخش به شکل زیر درمی آید:

$$\frac{\partial \hat{n}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = -Dk^2 \hat{n}(\mathbf{k}, t) \quad (80)$$

که حل ساده ای به شکل زیر دارد:

$$\mathbf{n}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{n}(\mathbf{k}, 0) e^{-Dk^2 t}. \quad (81)$$



اما با توجه به شرایط اولیه می دانیم که

$$\hat{n}(\mathbf{k}, 0) = \frac{N}{(2\pi)^3} \quad (۸۲)$$

بنابراین به دست می آوریم:

$$\mathbf{n}(\mathbf{k}, t) = \frac{N}{(2\pi)^3} e^{-Dk^2 t}. \quad (۸۳)$$

و از آنجا

$$n(\mathbf{r}, t) = \int \frac{N}{(2\pi)^3} e^{-Dk^2 t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (۸۴)$$

این عبارت آخری حاصل ضرب سه انتگرال گاوسی ساده است. با استفاده از روابط انتگرال های گاوسی به خصوص رابطه زیر:

$$\int dk e^{-\frac{1}{2}ak^2 + bk} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{2a}} \quad (۸۵)$$

به رابطه نهایی زیر می رسم:

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{N}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-r^2/(4\pi Dt)} \quad (۸۶)$$

این رابطه نشان می دهد که چگالی ذرات به صورت یک تابع گاوسی که پهنای آن به تدریج زیاد و دامنه آن کم می شود، تغییر می کند تا سرانجام چگالی یکنواخت شود.

## ۱۱ انتقال گرما

به همان شکلی که ناهمگنی در چگالی جریانی از ذرات را پدید می آورد تا پدیده پخش ناهمگنی را به همگنی تبدیل کند، ناهمگنی در دما نیز جریانی از گرما و انرژی جنبشی را باعث می شود تا هر نوع تفاوت دما از بین رفته و تمام گاز یک دمای ثابت پیدا کند. به همین دلیل تجزیه و تحلیل انتقال گرما خیلی شبیه به پدیده پخش است. حال برای سادگی فرض می کنیم که چگالی یکنواخت و برابر با  $n$  ولی دما متغیر است. اگر گاز از مولکولهایی تشکیل شده باشد که دارای  $l$  درجه آزادی باشند، انرژی جنبشی متوسط هر مولکول برابر است با

$$\epsilon = \frac{l}{2} k_B T.$$

با تکرار استدلالی که در مورد پخش داشتیم، جریان گرما یعنی مقدار گرمای منتقل شده از چپ به راست را در واحد زمان و بر واحد سطح بدست می آوریم.

$$q_x = \frac{n}{6} \bar{v} \frac{lk_B T}{2} (k_B T_1 - k_B T_2) = \frac{n \bar{v} l}{12} (k_B T_1 - k_B T_2) \approx -\frac{n \bar{v} r_0 l k}{12} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (87)$$

در سه بعد این رابطه به شکل زیر در می آید:

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T \quad (88)$$

که در آن  $\kappa$  ضریب هدایت گرمایی است و مقدار آن چنین است:

$$\kappa = \frac{1}{6} n \bar{v} r_0 c_V \quad (89)$$

در این رابطه  $c_V = \frac{lk_B}{2}$  همان ظرفیت گرمایی ویژه است. با قراردادن  $r_0 = 2\lambda = \frac{2}{n\sigma}$  به رابطه زیر می رسیم:

$$\kappa = \frac{c_V}{3n\sigma} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (90)$$

هرگاه  $u$  را چگالی انرژی بگیریم و برای آن معادله پیوستگی به صورت

$$\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (91)$$

بنویسیم و با معادله انتقال حرارت ترکیب اش کنیم به معادله زیر می رسیم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad (92)$$

برای یک گاز ایده آل می دانیم که  $u = nC_v T$  است، بنابراین رابطه ای که شیوه توزیع دوباره ناهمگنی در دما را بدست می دهد به شکل زیر خواهد بود که عیناً شبیه معادله پخش است و طبیعی است که همان نوع حل را هم دارد:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{nC_V} \nabla^2 T. \quad (93)$$

## ۱۲ وشکسانی

وشکسانی یا ویسکوزیته<sup>۱۱</sup> پدیده ای است که بوجود آورنده اصطکاک در حرکت مایعات می شود. این پدیده را به وضوح در مایعات غلیظی مثل عسل یا قیر می بینیم، اما این اصطکاک در حرکت مایعات دیگر مثل آب یا حتی گازها هم وجود دارد، اگر چه مقدار آن متفاوت است. این

<sup>۱۱</sup>viscosity

اصطکاک ناشی از حرکت تصادفی مولکولها در لایه های مختلف یک مایع یا گاز است. اگر هر مولکول در یک خط مستقیم حرکت کند، لایه های مختلف بدون اصطکاک با یکدیگر به حرکت خود ادامه می دهند، اما اصطکاک وقتی به وجود می آید که حرکت کلی مایع مثلا در جهت  $x$  است، اما حرکت تصادفی مولکولها در جهت  $y$  باعث ایجاد تراحم و اصطکاک بین حرکت لایه های مختلف می شود. این همان پدیده ای است که در یک ترافیک بی نظم می بینیم، وقتی که اتومبیلها مرتباً مسیر حرکت خود را عوض می کنند و باعث کندی ترافیک می شوند. معمولاً وقتی که یک مایع یا گاز در جهت  $x$  حرکت می کند، طرح کلی حرکت مولکولها شبیه به شکل (۱۰) است. در واقع حرکت مولکولها در نزدیکی دیواره ها کند است و به تدریج که از دیواره ها فاصله می گیریم حرکت آنها تند تر می شود. محور  $y$  را در نظر بگیرید. فعلاً فرض کنید که سرعت مایع هیچ گونه تغییراتی در جهت های دیگر ندارد و تمامی تغییرات در جهت  $y$  رخ می دهد. مثل این است که صفحه های مایع که همگی در جهت عمود بر محور  $y$  قرار گرفته اند روی هم می لغزند و در جهت  $x$  با سرعت های متفاوت حرکت می کنند. می خواهیم نیروی اصطکاک بین این صفحات را حساب کنیم. طبیعی است که منظور ما نیرو بر واحد سطح است. اگر بخواهیم نیروی اصطکاک را که صفحه پایینی به صفحه بالایی وارد می کند باید حساب کنیم که در هر واحد زمان، چه مقدار تکانه  $p_x$  از صفحه پایینی به صفحه بالایی می رود و چه مقدار از صفحه بالایی به صفحه پایینی می رود. این محاسبه ساده است. می نویسیم:

$$F_y = \frac{1}{6} n \bar{v} \times [m u_x(y_1) - m u_x(y_2)]. \quad (94)$$

در این جا  $\frac{1}{6} n \bar{v}$  تعداد مولکولهایی است که در واحد زمان از واحد سطح به طرف بالا یا پایین حرکت می کنند.  $u_x(y_1)$  سرعت متوسط مولکولها در راستای  $x$  در لایه پایینی و  $u_x(y_2)$  سرعت متوسط مولکولها در راستای  $x$  در لایه بالایی است. اگر فاصله  $y_2 - y_1$  را برابر با  $r_0 = 2\lambda$  بگیریم، بدست می آوریم:

$$F_y = -\frac{n \bar{v}}{6} m r_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\nu \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (95)$$

که در آن

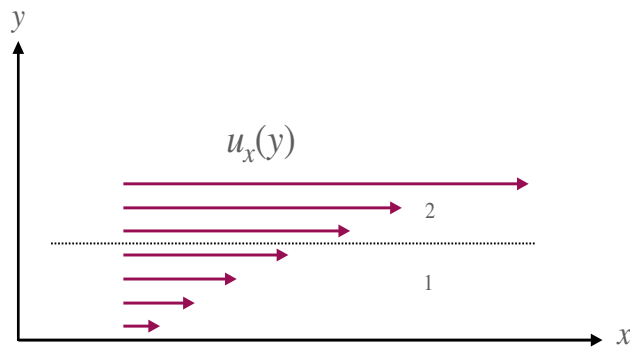
$$\nu = m n \bar{v} \frac{\lambda}{3} = \frac{\sqrt{2 m k_B T}}{3 \sigma}$$

ضریب وشکسانی خوانده می شود. در این جا یک حالت خیلی ساده را در نظر گرفته ایم. در حالت کلی در هر نقطه حرکت مایع با یک بردار  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  مشخص می شود که هر کدام از مولفه های آن می توانند دارای گرادیانی به صورت  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  باشند. هرگاه صفحه ای را با بردار یکه عمود بر آن یعنی  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  نشان دهیم، نیروی وارد بر این صفحه یعنی  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  از رابطه ای مثل  $F_i = \tau_{ij} n_j$  بدست می آید که در آن  $\tau_{ij}$  تانسور تنش خوانده می شود. بنابراین رابطه ساده ای که بدست آوردیم، در حالت کلی باید بیان کند که چگونه تانسور گرادیان

سرعت به تانسور تنش مربوط می شود. این رابطه به صورت زیر خواهد بود:

$$\tau_{ij} = \mu_{ij,kl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}. \quad (96)$$

می توان نشان داد که برای مایعات همسانگرد، این تانسور رتبه چهار تبدیل به یک تانسور رتبه دو می شود که دو مولفه مستقل بیشتر ندارد. خواننده علاقمند می تواند با مراجعه به کتاب های تخصصی تر، این موضوع را دنبال کند.



شکل ۱۰: طرح سرعت های یک مایع وقتی که در جهت  $x$  حرکت می کند.

## ۱۳. قدردانی

از آقای سپهر سلمانی یگانه، دانشجوی دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شریف که در نیمسال اول ۱۴۰۲ با دقت این درسنامه را خواندند و اشکالات متعدد آن را یادآوری کردند سپاسگزاری می کنم.

## ۱۴. مسئله ها:

■ انرژی متوسط مولکولهای هوا را در دمای اتاق حساب کنید. تقریباً هشتاد درصد هوا از نیتروژن و بیست درصد آن از اکسیژن تشکیل شده. سرعت متوسط مولکولهای اکسیژن و نیتروژن را جداگانه حساب کنید.

■ یک گاز در نظر بگیرید که تابع توزیع اندازه سرعت مولکولهایش  $f(v)$  باشد. یعنی درصد مولکول هایی که با سرعت بین  $v$  و  $v + dv$  حرکت می کنند برابر با  $f(v)dv$  باشد.

الف: نشان دهید که در صد مولکولهایی که با سرعت بین  $v$  و  $v + dv$  و زاویه بین  $\theta$  و  $\theta + d\theta$  نسبت به یک محور معین حرکت می کنند برابر است با

$$\frac{1}{2}f(v)dv \sin \theta d\theta. \quad (97)$$

ب: نشان دهید که تعداد مولکولهایی که با سرعت بین  $v$  و  $v + dv$  و زاویه بین  $\theta$  و  $\theta + d\theta$  نسبت به محور عمود بر دیواره ظرف و در واحد زمان به واحد سطح دیواره ظرف برخورد می کنند برابر است با

$$\frac{1}{2}nv f(v)dv \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad (98)$$

که در آن  $n$  چگالی مولکول های در هر نقطه از فضا است. فرض کرده ایم که چگالی در تمام ظرف یکسان است. حال برای گازی که تابع توزیع سرعت مولکولهایش از نوع ماکسول-بولتزمن است،  
ج: با استفاده از این رابطه فشار وارد شده بر دیواره های ظرف را حساب کنید.

■ با استفاده از تابع توزیع ماکسول - بولتزمن ، تابع توزیع بردار سرعت نسبی بین دو ذره را بدست آورید. منظور این است که اگر سرعت دو ذره را با  $\mathbf{v}_1$  و  $\mathbf{v}_2$  نشان دهیم، تابع توزیع بردار سرعت  $\mathbf{v}_r := \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  را محاسبه کنید. هم چنین تابع توزیع اندازه سرعت نسبی را بدست آورید. سپس کمیت های زیر را تعیین کنید:

$$\langle v_r \rangle, \quad \langle v_r^2 \rangle. \quad (99)$$

راهنمایی: ممکن است به رابطه زیر احتیاج پیدا کنید:  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}$ .

■ یک ظرف محتوی گاز مولکول دواتمی نیتروژن  $N_2$  است. فشار درون ظرف برابر با یک اتمسفر و دمای آن برابر صفر درجه سانتی گراد است. اگر در دیواره این ظرف یک سوراخ به شعاع پنج میلی متر درست شده باشد، تخمین بزنید که چه مدت طول می کشد که گاز درون ظرف خالی شود. دقت کنید که تخمین خواسته شده و نه محاسبه دقیق.

■ ظرف گازی را در نظر بگیرید که حاوی یک گاز در دما و فشار معین است. مولکولهایی که از یک سوراخ ایجاد شده در دیواره این ظرف به بیرون فرار می کنند قاعدتا سرعت متوسط بالاتری نسبت به بقیه مولکول ها دارند. اگر تابع توزیع مولکولها  $f(v)$  باشد، تابع توزیع

مولکولهایی که فرار می کنند برابر است با

$$vf(v). \quad (100)$$

اگر تابع توزیع مولکولها از نوع ماکسول-بولتزمن باشد، انرژی جنبشی متوسط مولکولهایی که از ظرف فرار می کنند، چقدر است؟ این انرژی متوسط چند برابر انرژی متوسط مولکولهای گاز است؟

■ گازی از مولکولهای به جرم  $m$  را در دمای  $T$  در نظر بگیرید. در دیواره ظرف سوراخ کوچکی وجود دارد که مولکولها از آن فرار می کنند. سرعت متوسط و احتمال ترین سرعت این مولکولها را حساب کنید.

■ نشان دهید که در توزیع ماکسول بولتزمن همواره رابطه زیر برقرار است:

$$\langle v \rangle \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \frac{4}{\pi}. \quad (101)$$

■ الف: در این درس نشان داده ایم که مقدار پهن شدگی خطوط طیفی یک گاز در یک دمای  $T$  برابر است:

$$\Delta\lambda = 7.16 \times 10^{-7} \lambda_0 \sqrt{\frac{T}{m}}, \quad (102)$$

که در آن  $m$  جرم مولکولهای گاز و  $\lambda_0$  طول موج میانی خط طیفی است.

ب: میزان پهن شدگی خط طیفی ۲۱ سانتی متر هیدروژن را در یک گاز میان ستاره ای که دمای آن ۱۰۰ درجه کلوین است حساب کنید.

پ: سرعت متوسط  $v_{rms}$  را برای اتم های سدیم در اتمسفر خورشید که دمای آن حدود ۶۰۰۰ درجه کلوین است حساب کنید. هم چنین میزان پهن شدگی دوپلری خط طیفی سدیم را که طول موج آن ۵۷۰۰ آنگستروم است حساب کنید.

■ ظرفی را در نظر بگیرید که مقداری مایع جیوه در آن ریخته شده است. مایع جیوه البته ظرف را پر نکرده است. سوراخ کوچکی به مساحت

$10^{-7} m^2$  در بالای ظرف قرار دارد. ظرف جیوه را در یک محیط تقریباً خلاء و در دمای ۲۷۳ درجه کلوین نگهداری می کنیم. پس از

۳۰ روز متوجه می شویم که وزن ظرف به اندازه  $2.4 \times 10^{-5} kg$  سبک شده است. فشار بخار جیوه ی درون ظرف را تخمین بزنید.

■ یک فضانورد برای پیاده روی در فضا از سفینه اش خارج می شود. فشار درون لباس فضانوردی او به مقدار یک اتمسفر تنظیم شده است.

اما در اثر برخورد با یک دانه کوچک سرگردان در فضا در این لباس سوراخی به شعاع  $1 \mu m$  ایجاد می شود. تخمین بزنید که در اثر خروج گاز از لباس این فضانورد، چه نیرویی را حس خواهد کرد.

■ نشان دهید که در یک ظرف به حجم  $V$  که روزنه کوچکی به مساحت  $A$  در دیواره آن قرار دارد، فشار به صورت زیر با زمان تغییر می کند:

$$P(t) = P(0)e^{-t/\tau}, \quad (103)$$

که در آن

$$\tau = \frac{V}{A} \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}}. \quad (104)$$

■ در دیواره یک مخزن که در خلاء بسیار بالا قرار دارد، شکافی به مساحت  $\sigma$  ایجاد می شود و هوای بیرون به درون مخزن راه پیدا می کند. الف: نرخ پر شدن مخزن را بر حسب تعداد مولکول در واحد زمان پیدا کنید.

ب: بعد از یک زمان مشخص، شکاف بسته شده و هوای راه یافته به درون مخزن به تعادل می رسد. نشان دهید که دمای درون مخزن با ضریب  $\frac{4}{3}$  از دمای بیرون بیشتر است.

■ گاز اورانیوم در دو نوع ایزوتوپ طبیعی وجود دارد، یکی  $^{238}U$  و دیگری  $^{235}U$  که نسبت های آنها به ترتیب برابر است با 99.27% و 0.73%. برای آنکه غلظت اورانیوم  $^{235}U$  بالا برود، اورانیوم نخست تبخیر شده و اجازه داده می شود که به درون رشته ای از مخازن خلاء نشت کند. با فرض این که هر بار اورانیوم نشت شده به تعادل برسد، حساب کنید که چند مرحله لازم است تا غلظت هر دو ایزوتوپ اورانیوم با هم مساوی شود.

■ یک لوله بلند و مستقیم به طول  $L$  حاوی  $N$  تا مولکول به جرم  $m$  است که در لحظه صفر همگی در یک انتهای لوله جمع شده اند. لوله در دمای  $T$  نگاه داشته شده و در سر دیگر لوله یک شمارشگر ذرات وجود دارد. حساب کنید که اولین ذره در چه زمانی در شمارشگر ثبت می شود.

■ در مرکز کره زمین به خاطر واپاشی رادیواکتیو عناصر سنگین، گرما با نرخ تقریبی 4 تراوات تولید می شود. یک تراوات برابر با 1000 بیلیون ژول در ثانیه است. البته رقم دقیق میزان گرمای تولید شده معلوم نیست ولی تخمین زده می شود که این رقم بین 2 تا 5 تراوات است. شعاع زمین را  $R$ ، چگالی آن را  $\rho$  و ضریب رسانش گرمایی آن را  $\kappa$  بگیرید و دمای داخل زمین را به عنوان تابعی از فاصله از مرکز یعنی  $r$  بدست آورید. ضریب رسانش گرمایی داخل زمین وابسته به فاصله از مرکز زمین است، اما برای آن مقدار ثابتی برابر با  $50W/m.Kelvin$  در نظر بگیرید و دمای  $T(r)$  را حساب کنید. دمای سطح زمین را 300 درجه کلوین بگیرید.